

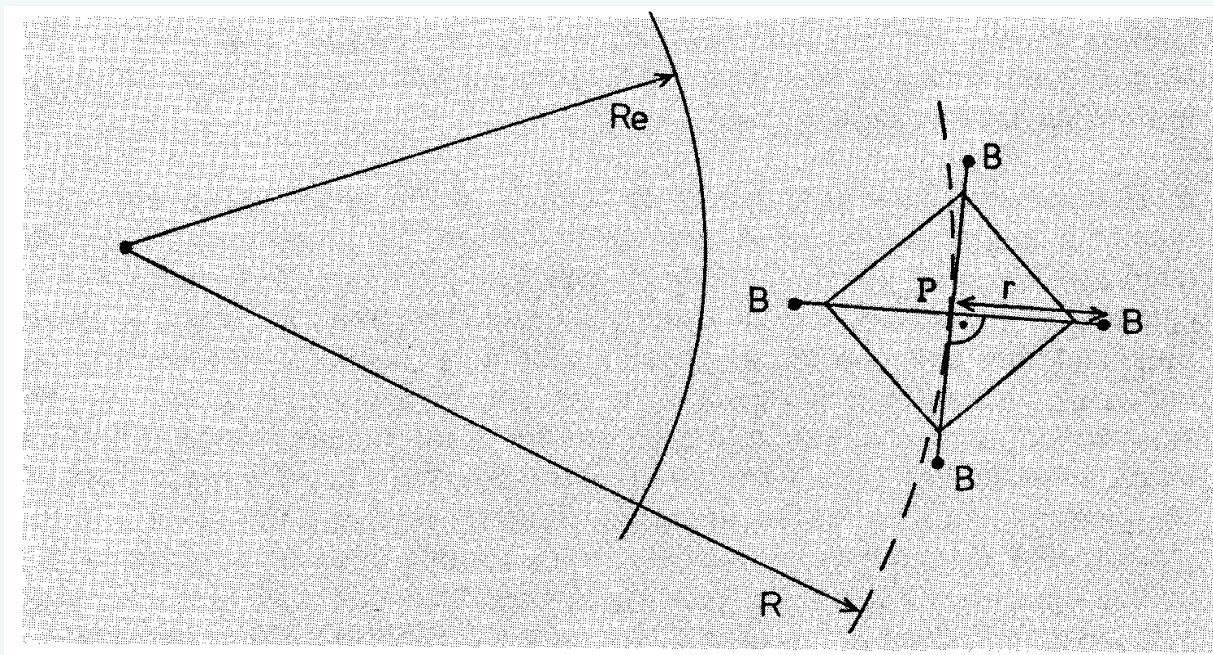
IPhO 1992

Теоретические задачи и решения · Эспоо (Хельсинки), Финляндия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1992/

Задача 1: Вращающийся спутник

На рисунке изображён спутник, обращающийся вокруг Земли по приблизительно круговой орбите в плоскости земного экватора. Спутник состоит из центрального тела P , масса которого равна нулю, и четырёх небольших периферийных тел B . Каждое из четырёх тел B имеет массу m : они прикреплены к P длинными тонкими нерастяжимыми тросами длиной r . Все эти пять тел, P и четыре тела B , находятся в плоскости экватора и могут вращаться в этой плоскости. Четыре радиальных троса соединены друг с другом дополнительными тонкими тросами, которые поддерживают постоянные углы 90° между радиальными тросами.



Соединительные тросы включены в систему, чтобы предотвратить колебания отдельных тел B , которые в противном случае чрезвычайно усложнили бы анализ движения. Все тела B вращаются вокруг P с одной и той же угловой скоростью, равной ω относительно неподвижных звёзд. Таким образом, спутник ведёт себя как твёрдое тело.

Разберите следующие вопросы в общем случае, рассмотрев все возможные ситуации, включая оба направления вращения тел B . Получите также численные значения некоторых величин, найденных в вопросах (1) и (2): искомые величины и необходимые численные данные приведены в конце условия задачи.

1) На рисунке спутник показан в положении, в котором для разных тросов вектор $\mathbf{r}$ сонаправлен, противоположно направлен или перпендикулярен вектору $\mathbf{R}$. (Вектор $\mathbf{r}$ направлен от тела P к телу B и имеет длину r ; вектор $\mathbf{R}$ направлен от центра масс Земли к телу P.)

Определите силу, с которой радиальный трос действует на одно из тел B, в каждом из этих четырёх положений. Эти положения приблизительно соответствуют максимальной и минимальной силам.

2) Внутри четырёх тел B находятся четыре одинаковых механизма, работающих от солнечной энергии и соединённых с радиальными тросами. Каждый механизм в течение короткого времени втягивает трос внутрь, к B, всякий раз, когда сила натяжения троса близка к максимальной (как указано в предыдущем вопросе), и снова выпускает такую же длину троса, когда натяжение минимально. Длина втягиваемого и выпускаемого участка троса составляет 1% средней длины радиального троса. Средняя длина не изменяется со временем.

Какова результирующая мощность, преобразуемая одним механизмом, в среднем за один оборот спутника?

Результирующая мощность определяется как $\frac{W_1 - W_2}{T}$, где W_1 — работа, которую механизм совершает над тросом при его втягивании, W_2 — работа, которую трос совершает над механизмом при выпуске троса, а T — период вращения.

3) Обсудите изменения движения спутника, вызванные работой механизмов. В частности, проанализируйте изменения, которые могут происходить в каждой из ситуаций, перечисленных в таблице на обороте.

Внесите в таблицу свои результаты и комментарии и не забудьте её сдать.

Данные:

Численные ответы требуются для следующей ситуации:

Радиус орбиты центрального тела равен $R = R_E + 500 \text{ km}$.

Средняя длина радиальных тросов равна $r = 100 \text{ km}$.

Таким образом, диаметр системы спутника составляет 200 km .

Массы тел B равны $m = 1000 \text{ kg}$.

Первоначально четыре тела B вращаются относительно звёзд вокруг центрального тела P с частотой 10 оборотов в час.

Массами тросов можно пренебречь, а масса центрального тела P равна нулю.

Указания:

Рассмотрите оба направления вращения для ω .

Точных решений не требуется. Результаты с точностью 5% вполне приемлемы.

Пренебрегите гравитационным воздействием Луны и Солнца.

Полезные данные:

Величина	Значение
Масса Земли	$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Гравитационная постоянная	$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Радиус Земли на экваторе	$R_E = 6378 \text{ km}$
Обозначьте произведение $M_E G$ через K .	$K = 3.983 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Код страны:

ТАБЛИЦА ОТВЕТОВ

Заполните эту таблицу как часть вашего ответа. При необходимости запишите равенства или неравенства и/или краткие пояснения.

Указанная ниже величина ...	увеличивается, если ...	уменьшается, если ...	остаётся неизменной, если ...	остаётся неизменной во всех ситуациях.
орбитальная скорость спутника				Да ☐ Нет ☐
радиус R орбиты спутника				Да ☐ Нет ☐
угловая скорость ω спутника				Да ☐ Нет ☐
гравитационная потенциальная энергия спутника				Да ☐ Нет ☐

Может ли спутник выйти на более высокую орбиту в результате работы, совершённой механизмами?

Да ☐

Нет ☐

Может ли спутник выйти на сколь угодно высокую орбиту, практически покинув область гравитационного влияния Земли? Почему?

Ответ:

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Примем направление орбитального движения за положительное и определим

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{R^3}} > 0, \quad \epsilon = \frac{\Delta r}{r} = 0.01.$$

Угловая скорость собственного вращения ω учитывается со знаком: она положительна при прямом вращении и отрицательна при обратном.

1. В главном порядке по r/R силы натяжения тросов, направленные к Р, имеют величины

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2)$$

и

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Для обоих заданных направлений собственного вращения

$$F_{\text{max}} \simeq 30.7 \text{ kN}, \quad F_{\text{min}} \simeq 30.3 \text{ kN}, \quad F_{\text{max}} - F_{\text{min}} \simeq 367 \text{ N}.$$

Для полного оборота с натянутыми гибкими тросами с указанной точностью необходимо $|\omega| \geq \Omega$.

2. Средняя результирующая мощность, сообщаемая **одним механизмом**, равна

$$\overline{P}_1 = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

Численно,

$$\overline{P}_1 = 1.91 \text{ kW} \quad (\text{прямое вращение}), \quad \overline{P}_1 = 2.17 \text{ kW} \quad (\text{обратное вращение}).$$

При синхронном вращении, $\omega = \Omega$, повторяющихся циклов подкачки энергии нет, и средняя мощность равна нулю.

3. Заполненная таблица для модели вековой эволюции твёрдого тела имеет вид:

Величина	Увеличивается, если	Уменьшается, если	Остаётся неизменной, если	Неизменна во всех ситуациях?
Орбитальная скорость v	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	Нет
Радиус орбиты R	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	Нет
Угловая скорость собственного вращения со знаком ω	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	Нет
Гравитационная потенциальная энергия U	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	Нет

Таким образом, скорость обратного вращения возрастает по модулю. Формально прямое вращение при $0 < \omega < \Omega$ замедляется, а затем меняет направление; возможность реализации такого движения с гибкими тросами в этом интервале оговаривается ниже.

Более высокая орбита: Да, на восходящей ветви, в частности при достаточно быстром обратном вращении.

Сколько угодно высокая орбита: Да, в рамках идеальной ньютоновской модели. Всё более отрицательный момент импульса собственного вращения компенсирует возрастающий орбитальный момент импульса. Конечного верхнего предела радиуса нет, хотя для

достижения бесконечности потребовались бы бесконечное время и неограниченная энергия собственного вращения.

Решение

Используем малые параметры

$$\frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \simeq 0.0145, \quad \epsilon = 0.01.$$

Сохраняем главные члены сил, обусловленных градиентом гравитационного поля, и главный член работы по малому ходу троса. В течение каждого цикла подкачки энергии орбиту считаем круговой, причём её радиус и средняя угловая скорость собственного вращения изменяются медленно. Средний момент инерции равен

$$I \simeq 4mr^2.$$

1) Силы в четырёх радиальных тросах

Пусть $\mathbf{e}_R$ направлен от Земли к Р, а $\boldsymbol{\rho} = r\mathbf{e}$ задаёт положение периферийного тела относительно Р. Разложение ускорения силы тяжести Земли в окрестности Р даёт

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \frac{K}{R^3} [3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\rho}].$$

Это приливное ускорение.

В четырёх указанных положениях это ускорение направлено радиально относительно Р в сохраняемом порядке приближения. Если θ — угол между $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_R$, то его радиальная составляющая равна

$$\delta g_r = \Omega^2 r (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Периферийному телу необходимо радиальное ускорение $-\omega^2 r$ относительно Р. Принимая направление от Р за положительное, по второму закону Ньютона получаем

$$-m\omega^2 r = m\delta g_r - F,$$

где F — сила натяжения троса, направленная к центру. Следовательно,

$$F = mr [\omega^2 + \Omega^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

Для внешнего и внутреннего тел $\cos^2 \theta = 1$:

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2).$$

Разность сил притяжения Земли стремится удалить эти тела от Р, увеличивая необходимую силу натяжения.

Для двух тел, расположенных в поперечном направлении, $\cos^2 \theta = 0$:

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Здесь приливная сила направлена к Р и обеспечивает часть центростремительной силы.

Следовательно,

$$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 3mr\Omega^2 = \frac{3Kmr}{R^3}.$$

Небольшое различие между ближним и дальним телами выходит за пределы этого приближения первого порядка.

Используя приведённые данные, получаем

$$R = 6.878 \times 10^6 \text{ m}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3.983 \times 10^{14}}{(6.878 \times 10^6)^3}} = 1.1064 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1},$$

и

$$|\omega| = \frac{10(2\pi)}{3600} = 1.74533 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}.$$

Две характерные величины сил равны

$$mr\omega^2 = 3.04617 \times 10^4 \text{ N}, \quad mr\Omega^2 = 122.412 \text{ N}.$$

Поэтому

$$F_{\max} \simeq 3.07066 \times 10^4 \text{ N}, \quad F_{\min} \simeq 3.03393 \times 10^4 \text{ N},$$

что даёт округлённые ответы 30.7 kN и 30.3 kN.

Направление вращения не влияет на эти силы, поскольку они зависят от ω^2 .

Из условия $F_{\min} \geq 0$ следует физическое ограничение:

$$|\omega| \geq \Omega.$$

Если $|\omega| < \Omega$, то в поперечном положении потребовалась бы сжимающая радиальная сила. Гибкий трос не может её создать, поэтому предполагаемое вращение как твёрдого тела не может сохраняться в течение полного цикла.

2) Результирующая мощность одного механизма

Ход троса равен

$$\Delta r = \epsilon r = 1000 \text{ m}.$$

В первом порядке по этому ходу работа, сообщаемая при одном втягивании и возвращаемая при последующем выпуске троса, равна

$$W_{\text{in}} \simeq F_{\max} \Delta r, \quad W_{\text{out}} \simeq F_{\min} \Delta r.$$

Таким образом, один цикл втягивания и выпуска сообщает работу

$$\Delta W = (F_{\max} - F_{\min}) \Delta r = 3\epsilon mr^2 \Omega^2.$$

Центробежные вклады в этом порядке взаимно сокращаются. Численно,

$$\Delta W \simeq 3.67236 \times 10^5 \text{ J}.$$

Линия Земля — спутник вращается относительно звёзд с угловой скоростью Ω . Поэтому ориентация троса относительно этой линии изменяется со скоростью

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega.$$

Каждый трос проходит **два максимума и два минимума за один относительный оборот**.

Период относительного вращения равен

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|},$$

поэтому результирующая работа одного механизма за этот период равна $2\Delta W$. Следовательно,

$$\bar{P}_1 = \frac{2\Delta W}{T_{\text{rel}}} = \frac{3\epsilon m r^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

Для прямого вращения $\omega = |\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = 384.37 \text{ s}, \quad \bar{P}_1 = \frac{2(3.67236 \times 10^5)}{384.37} \simeq \boxed{1.91 \text{ kW}}.$$

Для обратного вращения $\omega = -|\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega| + \Omega} = 338.54 \text{ s},$$

$$\bar{P}_1 \simeq \boxed{2.17 \text{ kW}}.$$

При $\omega = \Omega$ ориентация относительно Земли остаётся постоянной. Повторных проходов через максимумы и минимумы натяжения нет, поэтому установившаяся средняя мощность равна нулю.

3) Изменения движения спутника

Обозначим полную массу спутника через $M = 4m$. С принятой точностью его орбитальная скорость, момент импульса, механическая энергия и гравитационная потенциальная энергия равны

$$v = \sqrt{\frac{K}{R}},$$

$$L = M\sqrt{KR} + I\omega,$$

$$E = -\frac{KM}{2R} + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad U = -\frac{KM}{R}.$$

Каждая гравитационная сила направлена к центру Земли и поэтому не создаёт момента относительно этого центра. Силы, создаваемые механизмами, являются внутренними. Таким образом, пренебрегая давлением излучения, получаем

$$\dot{L} = 0.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{M}{2} \sqrt{\frac{K}{R}} \dot{R} + I\dot{\omega} = 0,$$

или

$$\dot{R} = -\frac{2I}{MR\Omega} \dot{\omega} = -\frac{2r^2}{R\Omega} \dot{\omega}.$$

Следовательно, увеличение момента импульса собственного вращения с учётом знака уменьшает радиус орбиты.

Четыре механизма сообщают суммарную механическую мощность $P_{\text{tot}} = 4\bar{P}_1$.

Дифференцирование энергии и подстановка закона сохранения момента импульса дают

$$P_{\text{tot}} = \frac{KM}{2R^2} \dot{R} + I\omega\dot{\omega} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

Таким образом,

$$P_{\text{tot}} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

Поскольку работающие механизмы сообщают положительную результирующую мощность,

$$\text{sgn}(\dot{\omega}) = \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

В явном виде усреднённые по циклу скорости изменения равны

$$\dot{\omega} = \frac{3\epsilon\Omega^2}{\pi}\text{sgn}(\omega - \Omega)$$

и

$$\dot{R} = -\frac{6\epsilon r^2\Omega}{\pi R}\text{sgn}(\omega - \Omega).$$

Эти соотношения обосновывают все записи в таблице ответов:

- **Более быстрое прямое вращение, $\omega > \Omega$:** собственное вращение ускоряется, орбита сжимается, орбитальная скорость увеличивается, а гравитационная потенциальная энергия уменьшается.
- **Обратное вращение, $\omega < 0$:** угловая скорость собственного вращения с учётом знака уменьшается, поэтому модуль скорости обратного вращения увеличивается. Орбита расширяется, орбитальная скорость уменьшается, а гравитационная потенциальная энергия увеличивается.
- **Формально, $0 < \omega < \Omega$:** прямое вращение замедляется, а орбита расширяется. Продолжение работы привело бы к изменению направления собственного вращения. На этот интервал распространяется ограничение, связанное с гибкостью тросов и найденное в части (1).
- **Синхронное вращение, $\omega = \Omega$:** повторных срабатываний нет, следовательно, механизмы не вызывают вековых изменений.

В частности, знаки изменений орбитальной скорости и потенциальной энергии непосредственно следуют из

$$\dot{v} = -\frac{v}{2R}\dot{R}, \quad \dot{U} = \frac{KM}{R^2}\dot{R}.$$

Если понимать строку таблицы с угловой скоростью как относящуюся к модулю скорости вращения, то $|\omega|$ увеличивается как при более быстром прямом вращении, так и при обратном вращении; в формальном случае более медленного прямого вращения этот модуль уменьшается до изменения направления вращения.

Возможность достижения более высоких и сколь угодно высоких орбит

У спутника, достаточно быстро вращающегося в противоположном направлении, $\omega < -\Omega$, поэтому его тросы остаются натянутыми и $\dot{R} > 0$. Следовательно, он может выйти на более высокую орбиту.

Закон сохранения момента импульса не накладывает конечного верхнего ограничения на радиус. Для начального состояния и более поздней круговой орбиты имеем

$$M\sqrt{KR} + I\omega = M\sqrt{KR_0} + I\omega_0.$$

Поскольку $I/M = r^2$,

$$\omega(R) = \omega_0 - \frac{\sqrt{K}}{r^2} (\sqrt{R} - \sqrt{R_0}).$$

По мере роста R всё более положительный орбитальный момент импульса компенсируется всё более отрицательным моментом импульса собственного вращения. Необходимую энергию сообщают механизмы, работающие от солнечной энергии.

Скорость подъёма постепенно уменьшается. На восходящей ветви

$$\dot{R} = \frac{6\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} R^{-5/2},$$

интегрирование чего даёт

$$R(t)^{7/2} = R_0^{7/2} + \frac{21\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} t.$$

В этой идеальной модели любой заданный конечный радиус достигается за конечное время, но $R \rightarrow \infty$ требует $t \rightarrow \infty$. Кроме того, необходимая энергия собственного вращения неограниченно растёт:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 \sim \frac{2mK}{r^2} R \quad (R \rightarrow \infty).$$

Таким образом, **при указанных идеализациях возможны сколь угодно высокие конечные орбиты**, тогда как уход на бесконечное расстояние является лишь асимптотическим пределом этого процесса подкачки энергии на круговой орбите.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Продольное движение линейной молекулы

В этой задаче вам предстоит исследовать продольное движение линейной молекулы, то есть движение вдоль её оси. Вращение и изгиб молекулы не рассматриваются.

Предполагается, что молекула состоит из N атомов с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$ соответственно. Считается, что каждый атом соединён со своими соседями химической связью. Каждая связь моделируется невесомой пружиной, подчиняющейся закону Гука; жёсткости пружин равны $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. Молекула показана на рис. 1.

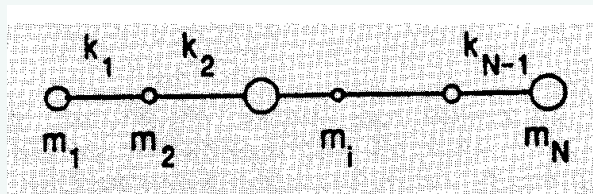


Рис. 1. Линейная молекула из N атомов.

При решении задачи используйте следующие сведения: продольное колебательное движение линейной молекулы представляет собой суперпозицию отдельных колебаний, называемых нормальными колебаниями, или нормальными модами. В нормальной моде

все атомы совершают гармонические колебания с одной и той же частотой и одновременно проходят через свои положения равновесия.

Вопросы

1) Пусть x_i — смещение атома i из положения равновесия. Выразите силу F_i , действующую на каждый атом, через смещения $x_1, x_2, \dots, x_N$ и жёсткости пружин $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$.

Какое соотношение связывает силы $F_1, F_2, \dots, F_N$? Используя это соотношение, выведите соотношение между смещениями $x_1, x_2, \dots, x_N$ и объясните его физический смысл.

2) Исследуйте движение двухатомной молекулы АВ (рис. 2). Жёсткость пружины равна k . Получите выражения для сил, действующих на атомы А и В. Определите возможные типы движения молекулы. Найдите соответствующие частоты колебаний и объясните полученный результат. В частности, как атомы могут колебаться с одной и той же частотой, если их массы различны?

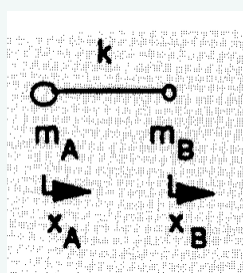


Рис. 2. Двухатомная молекула АВ

3) Исследуйте движение трёхатомной молекулы BA_2 (рис. 3)

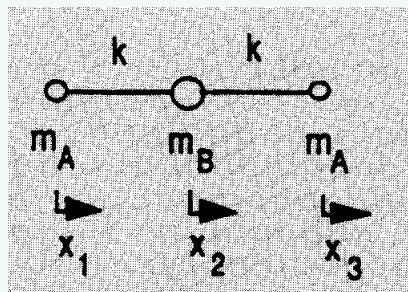


Рис. 3. Трёхатомная молекула BA_2 .

Выразите равнодействующую сил, действующих на каждый атом, только через смещение этого атома. Определите возможные движения молекулы и соответствующие частоты колебаний.

4) Частоты двух продольных нормальных колебаний молекулы CO_2 равны 3.998×10^{13} Hz и 7.042×10^{13} Hz соответственно. Найдите численное значение жёсткости связи CO.

Как вы считаете, насколько хорошо такое приближённое представление связей в молекуле описывает колебательное движение реальной молекулы?

Масса атома углерода = 12 а.е.м., а масса атома кислорода = 16 а.е.м. Атомная единица массы = 1.660×10^{-27} kg.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. Силы равны

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}). \end{aligned}$$

Они удовлетворяют соотношению $\sum_i F_i = 0$, поэтому

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

Центр масс движется равномерно. Для внутренних колебаний, рассматриваемых в системе отсчёта, в которой центр масс покоится,

$$\sum_i m_i x_i = 0.$$

2. Для АВ

$$F_A = k(x_B - x_A), \quad F_B = k(x_A - x_B).$$

Возможны поступательное движение молекулы как целого с нулевой частотой и одна внутренняя колебательная мода:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

При этом колебании $m_A x_A = -m_B x_B$: атомы движутся в противоположных направлениях с амплитудами, обратно пропорциональными их массам.

3. Для BA_2 нормальные моды имеют вид:

Движение	Отношение смещений $x_1 : x_2 : x_3$	Частота
Поступательное движение как целого	1 : 1 : 1	0
Симметричное валентное колебание	1 : 0 : -1	$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}$
Асимметричное валентное колебание	$1 : -\frac{2m_A}{m_B} : 1$	$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$

При симметричном валентном колебании

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

При асимметричном валентном колебании

$$\begin{aligned} F_1 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_1, \\ F_2 &= -k \left(2 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_2, \\ F_3 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_3. \end{aligned}$$

В общем случае движение представляет собой суперпозицию этих двух колебаний и равномерного поступательного движения.

4. Каждая из двух измеренных частот даёт своё значение:

$$k_s = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}, \quad k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Таким образом, характерное приближённое значение жёсткости связи составляет $k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$. Ни одно значение k не позволяет точно воспроизвести обе частоты: предсказываемое отношение частот равно 1.915, тогда как наблюдаемое равно 1.761. Модель даёт разумное приближение; расхождение в этом отношении составляет около 9%.

Решение

1) Силы и центр масс

Выберем для всех смещений одно и то же положительное направление вдоль оси молекулы. Изменение длины пружины, соединяющей атомы i и $i + 1$, равно

$$\Delta \ell_i = x_{i+1} - x_i.$$

Поэтому потенциальная энергия идеальных пружин, подчиняющихся закону Гука, равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Используя $F_i = -\partial U / \partial x_i$, получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N - 1, \end{aligned}$$

и

$$F_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}).$$

Каждая пружина действует на свои концы с равными по модулю и противоположно направленными силами. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0.$$

Тогда из второго закона Ньютона следует

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i x_i \right) = 0,$$

так что

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

Обозначив $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$, запишем смещение центра масс:

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{\text{tot}}}.$$

Таким образом, центр масс движется с постоянной скоростью, как и должно быть для изолированной системы, на которую не действуют внешние силы.

Для нормальной моды с ненулевой частотой

$$x_i = a_i \cos(\omega t + \phi).$$

Поскольку $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$,

$$0 = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\omega^2 \sum_i m_i x_i.$$

Отсюда

$$\boxed{\sum_i m_i x_i = 0 \quad (\omega \neq 0).}$$

При внутреннем колебании центр масс остаётся неподвижным. На него можно независимо наложить равномерное поступательное движение.

2) Двухатомная молекула АВ

Удлинение пружины равно $x_B - x_A$, поэтому

$$m_A \ddot{x}_A = k(x_B - x_A), \quad m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A).$$

Введём смещение центра масс и относительное смещение:

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad q = x_B - x_A.$$

Складывая уравнения движения, получаем

$$\ddot{X} = 0.$$

Вычитая ускорения, получаем

$$\ddot{q} = -k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) q.$$

Следовательно,

$$X = X_0 + Vt, \quad q = Q \cos(\omega t + \phi),$$

где

$$\boxed{\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

Полное движение имеет вид

$$\begin{aligned} x_A &= X_0 + Vt - \frac{m_B}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi), \\ x_B &= X_0 + Vt + \frac{m_A}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Существуют два независимых типа движения:

- **Поступательное движение как целого:** $q = 0$, поэтому $x_A = x_B = X_0 + Vt$. Пружина не деформирована, и обе силы равны нулю. Это мода с нулевой частотой.
- **Внутреннее колебание:** в системе отсчёта, в которой центр масс покоится,

$$m_A x_A + m_B x_B = 0.$$

Атомы колеблются в противофазе с частотой

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Чтобы понять, почему частоты одинаковы при различных массах, исключим смещение другого атома:

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B} x_A, \quad x_A = -\frac{m_B}{m_A} x_B.$$

Тогда

$$F_A = -k \left(1 + \frac{m_A}{m_B} \right) x_A, \quad F_B = -k \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_B.$$

Деление каждого коэффициента возвращающей силы на соответствующую массу даёт одно и то же значение:

$$\frac{k(1 + m_A/m_B)}{m_A} = \frac{k(1 + m_B/m_A)}{m_B} = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right).$$

Таким образом, оба атома имеют одинаковую угловую частоту. Различие их масс компенсируется различием амплитуд:

$$\frac{|x_A|_{\max}}{|x_B|_{\max}} = \frac{m_B}{m_A}.$$

У более тяжёлого атома меньше как амплитуда смещения, так и амплитуда ускорения.

3) Трёхатомная молекула BA_2

Обозначим $m = m_A$ и $M = m_B$. По закону Гука

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ M\ddot{x}_2 &= k(x_1 + x_3 - 2x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

При поступательном движении как целого, $x_1 = x_2 = x_3 = X_0 + Vt$, все три силы равны нулю.

Для внутреннего колебания будем работать в системе отсчёта, в которой центр масс покоится:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

Введём среднее и полуразность смещений крайних атомов:

$$s = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad d = \frac{x_1 - x_3}{2}.$$

Тогда

$$x_1 = s + d, \quad x_3 = s - d, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Складывая и вычитая уравнения для крайних атомов, получаем

$$m\ddot{s} = k(x_2 - s) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)s,$$

$$m\ddot{d} = -kd.$$

Это уравнения двух независимых гармонических осцилляторов, поэтому они определяют все внутренние нормальные моды.

Симметричное валентное колебание. Положим $s = 0$. Тогда

$$x_2 = 0, \quad x_1 = d, \quad x_3 = -d.$$

Средний атом остаётся неподвижным, а крайние атомы движутся с одинаковыми амплитудами в противоположных направлениях. Обе связи одновременно удлиняются и одновременно укорачиваются.

Силы, выраженные через собственное смещение каждого атома, равны

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

Следовательно,

$$\boxed{\omega_s^2 = \frac{k}{m_A}, \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}.}$$

Масса центрального атома не входит в выражение для этой частоты, поскольку две силы пружин, действующие на него, компенсируют друг друга в течение всего движения.

Асимметричное валентное колебание. Положим $d = 0$. Тогда

$$x_1 = x_3 = s, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Крайние атомы движутся вместе, а средний атом — в противоположном направлении. Одна связь удлиняется, а другая укорачивается.

Для каждого из крайних атомов

$$F_1 = k(x_2 - x_1) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_1,$$

$$F_3 = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_3.$$

Для среднего атома используем $x_1 + x_3 = -(M/m)x_2$:

$$F_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) = -k\left(2 + \frac{M}{m}\right)x_2.$$

Все три уравнения дают

$$\omega_a^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right), \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}.$$

Эти выражения сил через смещение одного атома справедливы для указанных нормальных мод. Произвольная суперпозиция подчиняется исходным связанным уравнениям для сил.

Полное движение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (X_0 + Vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/m_B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, существуют две продольные колебательные моды и одна поступательная мода.

4) Численное значение жёсткости связи и оценка модели

В молекуле CO₂ крайние атомы — кислород, а центральный атом — углерод:

$$m_A = m_O = 16(1.660 \times 10^{-27}) = 2.656 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_B = m_C = 12(1.660 \times 10^{-27}) = 1.992 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

Поскольку $f_a > f_s$, положим

$$f_s = 3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}, \quad f_a = 7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

Из симметричной моды

$$k_s = m_O(2\pi f_s)^2,$$

поэтому

$$k_s = (2.656 \times 10^{-26}) [2\pi(3.998 \times 10^{13})]^2 = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Из асимметричной моды

$$k_a = \frac{(2\pi f_a)^2}{1/m_O + 2/m_C},$$

поэтому

$$k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Эти оценки дают жёсткость связи, близкую к

$$k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Их различие показывает, что модель не может воспроизвести обе измеренные частоты при одном и том же значении жёсткости пружины.

Непосредственную проверку согласованности, не зависящую от k , даёт отношение частот. Модель предсказывает

$$\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} = \sqrt{1 + \frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.915.$$

Измеренное отношение равно

$$\left(\frac{f_a}{f_s}\right)_{\text{measured}} = \frac{7.042}{3.998} = 1.761.$$

Например, подбор жёсткости по меньшей частоте даёт для большей частоты предсказание

$$f_a = 1.91485(3.998 \times 10^{13}) = 7.656 \times 10^{13} \text{ Hz},$$

что на 8.71% выше измеренной большей частоты.

Таким образом, модель идеальных пружин даёт разумное приближённое описание двух валентных колебаний и характерного масштаба их частот. Её количественная точность ограничена: реальные возвращающие силы в молекуле могут учитывать взаимодействие между удлинениями двух связей и отклонения от закона Гука, которые в этой модели не учитываются.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Спутник в солнечном свете

В этой задаче вам предстоит рассчитать температуру космического спутника.

Предполагается, что спутник представляет собой сферу диаметром 1 м. Температура всех частей спутника одинакова. На всю сферическую поверхность спутника нанесено одинаковое покрытие. Спутник находится вблизи Земли, но не в её тени.

Температура поверхности Солнца (температура его поверхности как абсолютно чёрного тела) составляет $T_{\text{sun}} = 6000 \text{ K}$, а его радиус равен $6.96 \times 10^8 \text{ m}$. Расстояние между Солнцем и Землёй равно $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. Солнечный свет нагревает спутник до температуры, при которой мощность излучения спутника как абсолютно чёрного тела равна мощности поглощаемого солнечного света. Мощность излучения абсолютно чёрного тела с единицы площади определяется законом Стефана — Больцмана $P = \sigma T^4$, где σ — универсальная постоянная, равная $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. В первом приближении можно считать, что и Солнце, и спутник поглощают всё падающее на них электромагнитное излучение.

1) Найдите выражение для температуры T спутника. Каково численное значение этой температуры?

2) Спектр излучения абсолютно чёрного тела $u(T, f)$ при температуре T подчиняется закону излучения Планка

$$u(T, f) df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

где $\eta = hf/kT$, а $u(T, f)df$ — плотность энергии электромагнитного излучения в интервале частот $[f, f + df]$. В этом уравнении $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ — постоянная Планка, $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ — постоянная Больцмана, а $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ — скорость света.

Интегрирование спектра абсолютно чёрного тела по всем частотам f и направлениям излучения даёт полную мощность излучения с единицы площади $P = \sigma T^4$, как и в приведённом выше законе Стефана — Больцмана.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

На рисунке показан нормированный спектр

$$\frac{c^3 h^3}{8\pi k^4} \frac{u(T, f)}{T^4}$$

как функция η .

Во многих случаях необходимо поддерживать как можно более низкую температуру спутника. Для охлаждения спутника инженеры используют отражающее покрытие, которое отражает свет с частотами выше некоторой граничной частоты, но не препятствует выходу теплового излучения с более низкими частотами. Предположим, что эта (резкая) граница по частоте соответствует $hf/k = 1200$ К.

Какова новая равновесная температура спутника? Точный ответ не требуется. Поэтому не выполняйте трудоёмкого интегрирования; при необходимости используйте приближения. Интеграл по всему диапазону равен

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

а максимум $\eta^3/(e^\eta - 1)$ достигается при $\eta = 2.82$. При малых η экспоненту можно разложить в ряд: $e^\eta \simeq 1 + \eta$.

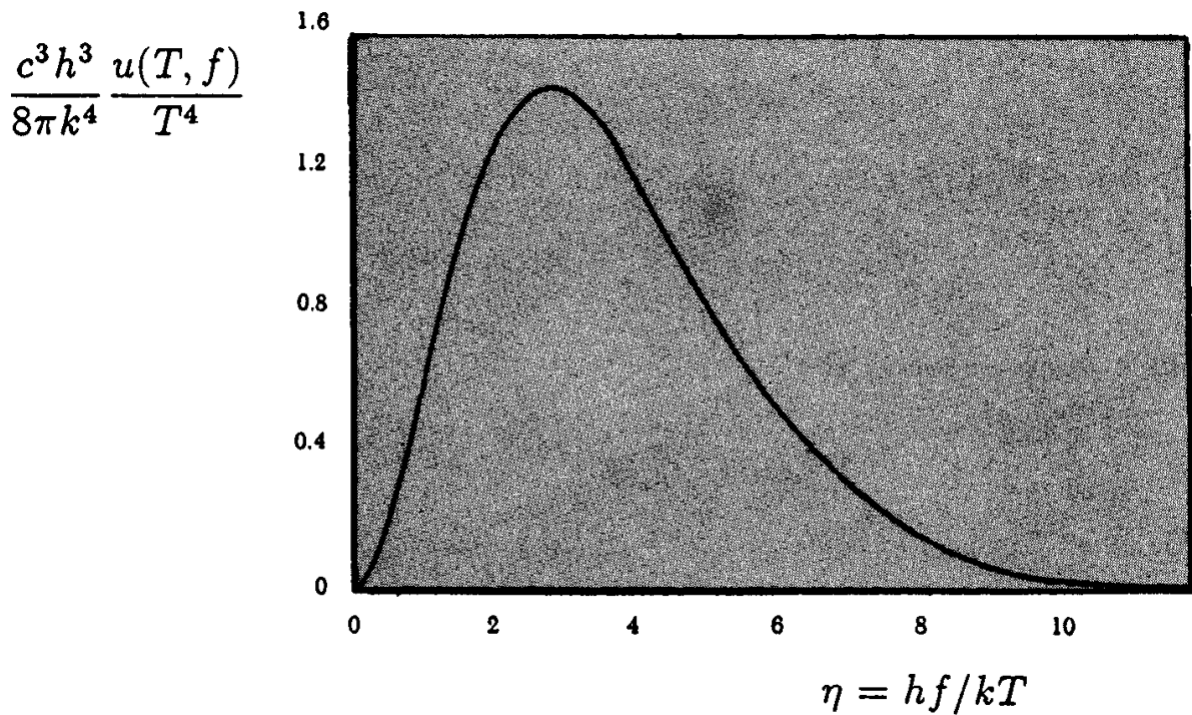
3) Рассмотрим теперь реальный спутник с выдвижными солнечными батареями, вырабатывающими электроэнергию. Тепло, выделяемое электронной аппаратурой внутри спутника, служит дополнительным источником нагрева. Предполагая, что мощность внутреннего источника тепла равна 1 кВт, найдите равновесную температуру спутника в случае 2, рассмотренном выше.

4) Производитель рекламирует специальную краску следующим образом:

«Эта краска будет отражать более 90% всего падающего излучения (как видимого света, так и инфракрасного излучения), но при этом будет излучать на всех частотах (в видимом и инфракрасном диапазонах) как абсолютно чёрное тело, отводя тем самым большое количество тепла от спутника. Таким образом, краска поможет поддерживать как можно более низкую температуру спутника».

Может ли существовать такая краска? Почему?

5) Какими свойствами должно обладать покрытие, чтобы повысить температуру сферического тела, подобного рассмотренному здесь спутнику, по сравнению с температурой, рассчитанной в пункте 1)?



Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. При радиусе Солнца $R_{\odot}$ и расстоянии от Солнца до спутника D

$$T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}} \simeq 289 \text{ K.}$$

2. Используя указанное приближение для малых η , получаем

$$T_2 \simeq T_1 \left[\frac{5}{\pi^4} \left(\frac{1200 \text{ K}}{T_{\text{sun}}} \right)^3 \right]^{1/4} \simeq 41 \text{ K.}$$

3. С учётом подавления покрытием высокочастотного теплового излучения $\boxed{T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K} \quad \text{ (приблизительно 317 K).}}$
4. **Нет.** Согласно закону Кирхгофа, поглощательная и излучательная способности должны быть равны на каждой частоте. Поверхность, отражающая более 90% излучения, не может одновременно излучать как абсолютно чёрное тело на этих частотах.
5. Покрытие должно **сильно поглощать солнечное излучение и слабо испускать тепловое инфракрасное излучение**: обладать высокой поглощательной способностью на частотах солнечного излучения и высокой отражательной способностью на более низких частотах теплового излучения спутника.

Решение

Обозначим радиус спутника через $a = 0.50$ m, радиус Солнца — через $R_{\odot}$, а расстояние от Солнца до спутника — через D . Используем заданную модель радиационного баланса, пренебрегая излучением Земли и другими видами теплообмена.

1) Спутник как абсолютно чёрное тело

Светимость Солнца равна

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\text{sun}}^4.$$

Следовательно, плотность потока солнечного излучения в месте нахождения спутника равна

$$S = \frac{L_{\odot}}{4\pi D^2} = \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2.$$

Спутник перехватывает солнечный свет площадью своей проекции πa^2 , а излучает всей своей поверхностью $4\pi a^2$. Поэтому условие теплового равновесия имеет вид

$$\pi a^2 S = 4\pi a^2 \sigma T_1^4.$$

Таким образом,

$$T_1^4 = \frac{1}{4} T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2, \quad \boxed{T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}}}.$$

Численно получаем

$$T_1 = 6000 \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2(1.5 \times 10^{11})}} \text{ K} = \boxed{289 \text{ K}}.$$

Радиус спутника сокращается, поскольку и поглощаемая, и излучаемая мощности пропорциональны a^2 .

2) Спутник с частотно-селективным покрытием

Запишем

$$\Theta = \frac{hf_c}{k} = 1200 \text{ K},$$

где f_c — граничная частота. Спутник с идеальным покрытием поглощает и излучает как абсолютно чёрное тело на частотах ниже f_c , тогда как на частотах выше f_c отражение подавляет и поглощение, и излучение. Это равенство спектральных поглощательной и излучательной способностей выражает закон Кирхгофа.

Определим долю мощности излучения абсолютно чёрного тела ниже безразмерной границы x следующим образом:

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{\eta^3}{e^{\eta} - 1} d\eta.$$

Для тела при температуре T соответствующая граница равна $x = \Theta/T$. Поэтому уравнение равновесия имеет вид

$$\pi a^2 \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right) = 4\pi a^2 \sigma T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right).$$

Используя результат пункта 1, получаем

$$T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2}\right) = T_1^4 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}}\right).$$

Для солнечного света

$$x_{\odot} = \frac{1200}{6000} = 0.20.$$

Во всём этом малом интервале $e^{\eta} - 1 \simeq \eta$, поэтому

$$F(0.20) \simeq \frac{15}{\pi^4} \int_0^{0.20} \eta^2 d\eta = \frac{5(0.20)^3}{\pi^4} \simeq 4.11 \times 10^{-4}.$$

Таким образом, поглощается лишь около 0.041% мощности падающего солнечного излучения.

Сначала предположим, что почти всё тепловое излучение охлаждённого спутника приходится на частоты ниже граничной, так что $F(\Theta/T_2) \simeq 1$. Тогда

$$T_2 \simeq T_1 [F(0.20)]^{1/4} = 289(4.11 \times 10^{-4})^{1/4} \text{ K},$$

откуда

$$\boxed{T_2 \simeq 41 \text{ K}.}$$

Это предположение самосогласованно: безразмерная граничная частота для спутника равна

$$\frac{\Theta}{T_2} \simeq \frac{1200}{41} \simeq 29,$$

то есть находится далеко за максимумом спектра при $\eta = 2.82$. Отсекаемый высокочастотный хвост теплового спектра пренебрежимо мал.

3) Добавление внутреннего источника тепла мощностью 1 kW

Теперь необходимо явно вычислить площадь излучающей поверхности:

$$A = 4\pi a^2 = \pi \text{ m}^2.$$

До нанесения покрытия поглощаемая мощность солнечного излучения составляла

$$Q_{\odot,0} = A\sigma T_1^4 \simeq 1.24 \times 10^3 \text{ W}.$$

После нанесения покрытия она становится равной

$$Q_{\odot} = Q_{\odot,0} F(0.20) \simeq (1.24 \times 10^3)(4.11 \times 10^{-4}) \simeq 0.51 \text{ W}.$$

Эта величина пренебрежимо мала по сравнению с мощностью внутреннего источника тепла $Q_{\text{int}} = 1000 \text{ W}$. Уравнение баланса имеет вид

$$\boxed{A\sigma T_3^4 F\left(\frac{1200 \text{ K}}{T_3}\right) = 1000 \text{ W} + Q_{\odot}.$$

Здесь нельзя полагать $F = 1$. Даже для абсолютно чёрного тела без ограничения спектра излучения потребовалась бы температура

$$\left(\frac{1000 \text{ W}}{A\sigma}\right)^{1/4} \simeq 274 \text{ K},$$

при которой граница уже находилась бы при $\eta_c \simeq 4.38$. Значительная часть теплового спектра лежит выше этой границы, поэтому спутник с покрытием должен нагреться сильнее.

Нужную долю можно оценить непосредственно по приведённому графику. Вблизи $\eta_c = 3.8$ площадь под кривой приблизительно равна

$$\int_0^{3.8} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta \simeq 3.6.$$

Поскольку полная площадь равна $\pi^4/15 \simeq 6.49$,

$$F(3.8) \simeq \frac{3.6}{6.49} \simeq 0.55.$$

Подстановка даёт

$$T_3 \simeq \left[\frac{1000.5 \text{ W}}{(\pi \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4})(3.6/6.49)} \right]^{1/4} \simeq 317 \text{ K}.$$

Соответствующая безразмерная граничная частота равна $1200/317 \simeq 3.79$, что подтверждает графическую оценку. Следовательно,

$$T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}.$$

4) Рекламируемая краска

Закон Кирхгофа для теплового излучения утверждает, что на заданной частоте и для соответствующих направлений

$$\epsilon_f = \alpha_f,$$

где ϵ_f — излучательная способность, а α_f — поглощательная способность.

Из закона сохранения энергии следует

$$\alpha_f + \rho_f + \tau_f = 1,$$

где ρ_f и τ_f — коэффициенты отражения и пропускания. Следовательно, если $\rho_f > 0.90$, то

$$\alpha_f < 0.10 \implies \epsilon_f < 0.10.$$

Для излучения как у абсолютно чёрного тела, напротив, требовалось бы $\epsilon_f = 1$.

Таким образом, заявленное сочетание сильного отражения и теплового излучения как у абсолютно чёрного тела на тех же частотах невозможно для пассивной краски. Оно нарушало бы закон Кирхгофа и принцип детального теплового равновесия.

5) Покрытие, повышающее температуру

Покрытие должно обладать спектральной селективностью, противоположной той, что рассматривалась в пункте 2:

- Сильное поглощение на относительно высоких частотах, на которые приходится основная часть солнечного излучения.
- Слабое излучение и, соответственно, сильное отражение на более низких инфракрасных частотах, на которые приходится основная часть теплового излучения спутника.

Пусть $\bar{\alpha}_\odot$ — поглощательная способность, усреднённая по солнечному спектру, а $\bar{\epsilon}_T$ — излучательная способность, усреднённая по спектру излучения спутника как абсолютно чёрного тела при температуре T . Баланс в отсутствие внутреннего нагрева имеет вид

$$\pi a^2 \bar{\alpha}_\odot S = 4\pi a^2 \bar{\epsilon}_T \sigma T^4.$$

Отсюда

$$T = T_1 \left(\frac{\bar{\alpha}_\odot}{\bar{\epsilon}_T} \right)^{1/4}.$$

Равновесная температура превышает T_1 , если

$$\bar{\alpha}_\odot > \bar{\epsilon}_T.$$

Это согласуется с законом Кирхгофа, поскольку при вычислении этих двух средних разные диапазоны частот учитываются с разными весами. Серое покрытие со свойствами, не зависящими от частоты, имело бы одинаковые поглощательную и излучательную способности и оставляло бы равновесную температуру неизменной.

Решение проверено по официальному решению.