

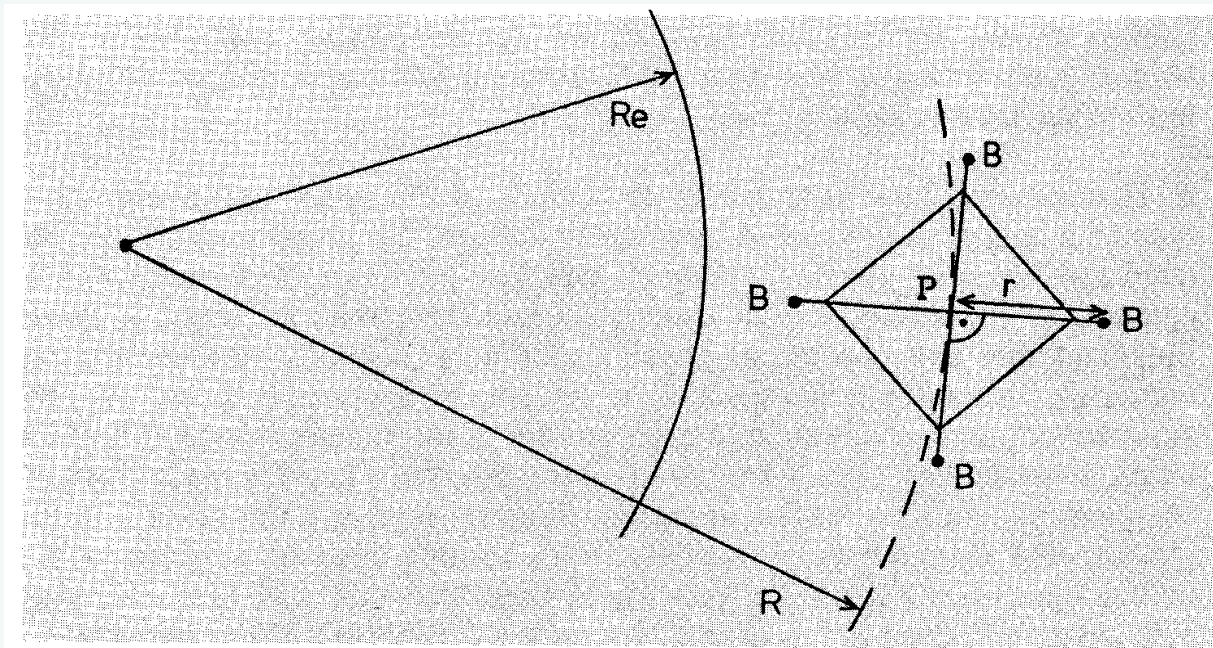
IPhO 1992

Problemas teóricos y soluciones · Espoo (Helsinki), Finlandia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1992/

Problema 1: Un satélite en rotación

La figura muestra un satélite que gira alrededor de la Tierra en una órbita aproximadamente circular situada en el plano ecuatorial terrestre. El satélite consta de un cuerpo central P sin masa y cuatro pequeños cuerpos periféricos B . Cada uno de los cuatro cuerpos B tiene una masa m : están unidos a P mediante hilos largos y delgados de longitud r que no se estiran. Estos cinco cuerpos, P y los cuatro cuerpos B , se encuentran en el plano ecuatorial y pueden girar dentro de este plano. Los cuatro hilos radiales están unidos entre sí mediante otros hilos delgados que mantienen constantes en 90° los ángulos entre los hilos radiales.



Los hilos de unión se incluyen en el sistema para impedir el movimiento oscilatorio de los cuerpos B individuales, que de otro modo complicaría enormemente el análisis de los movimientos. Todos los cuerpos B giran alrededor de P con la misma velocidad angular, que es ω con respecto a las estrellas fijas. Por tanto, el satélite se comporta como un sólido rígido.

Analice las siguientes cuestiones para el caso general, considerando todas las situaciones posibles, incluidos ambos sentidos de rotación de los cuerpos B . Obtenga también valores numéricos para algunas de las magnitudes halladas en las cuestiones (1) y (2): las magnitudes solicitadas y los datos numéricos necesarios se indican al final del problema.

1) El dibujo muestra el satélite en la posición en la que, para los distintos hilos, $\mathbf{r}$ es paralelo, antiparalelo o perpendicular a $\mathbf{R}$. (El vector $\mathbf{r}$ va desde el cuerpo P hasta un cuerpo B y tiene longitud r ; el vector $\mathbf{R}$ va desde el centro de masas de la Tierra hasta el cuerpo P.)

Determine la fuerza que ejerce un hilo radial sobre uno de los cuerpos B en cada una de estas cuatro posiciones. Estas posiciones corresponden aproximadamente a las fuerzas máxima y mínima.

2) En el interior de los cuatro cuerpos B hay cuatro máquinas idénticas, alimentadas por energía solar y conectadas a los hilos radiales. Cada máquina recoge el hilo, tirando de él hacia B, durante un breve intervalo de tiempo siempre que la fuerza en el hilo está cerca de su valor máximo (como se indica en la cuestión anterior), y vuelve a soltar la misma longitud de hilo cuando la tensión es mínima. La longitud de hilo que se recoge y se suelta es el 1% de la longitud media del hilo radial. La longitud media no cambia con el tiempo.

¿Cuál es la potencia neta transformada por una máquina, promediada sobre una rotación del satélite?

La potencia neta se define como $\frac{W_1 - W_2}{T}$, donde W_1 es el trabajo que la máquina realiza sobre el hilo al recogerlo, W_2 es el trabajo que el hilo realiza sobre la máquina al soltarlo y T es el período de rotación.

3) Discuta los cambios en el movimiento del satélite causados por la acción de las máquinas. En particular, analice los cambios que puedan producirse en cada una de las situaciones enumeradas en la tabla del reverso.

Complete la tabla con sus resultados y comentarios, y no olvide entregarla.

Datos:

Se requieren respuestas numéricas para la siguiente situación:

El radio de la órbita del cuerpo central viene dado por $R = R_E + 500 \text{ km}$.

La longitud media de los hilos radiales es $r = 100 \text{ km}$.

Por tanto, el diámetro del sistema del satélite es 200 km .

Los cuerpos B tienen masas $m = 1000 \text{ kg}$.

Inicialmente, los cuatro cuerpos B giran, con respecto a las estrellas, alrededor del cuerpo central P a 10 revoluciones/hora.

Las masas de los hilos son despreciables y el cuerpo central P no tiene masa.

Recomendaciones:

Considere ambos sentidos de rotación para ω .

No se esperan soluciones exactas. Los resultados con una precisión del 5% son plenamente aceptables.

Ignore el efecto gravitatorio de la Luna y del Sol.

Datos útiles:

Magnitud	Valor
Masa de la Tierra	$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Radio de la Tierra en el ecuador	$R_E = 6378 \text{ km}$
Denote el producto $M_E G$ por K .	$K = 3.983 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Código del país:

TABLA DE RESPUESTAS

Complete esta tabla como parte de su respuesta. Escriba igualdades o desigualdades y/o explicaciones breves cuando sea necesario.

La magnitud indicada a continuación ...	aumenta si ...	disminuye si ...	permanece constante si ...	permanece constante en todas las situaciones.
velocidad orbital del satélite				Sí ☐ No ☐
radio R de la órbita del satélite				Sí ☐ No ☐
velocidad angular ω del satélite				Sí ☐ No ☐
energía potencial gravitatoria del satélite				Sí ☐ No ☐

¿Podría el satélite alcanzar una órbita más alta como resultado del trabajo realizado por las máquinas?

Sí ☐

No ☐

¿Podría el satélite alcanzar una órbita arbitrariamente alta, abandonando prácticamente la influencia gravitatoria de la Tierra? ¿Por qué?

Respuesta:

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Tomemos como positivo el sentido orbital y definamos

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{R^3}} > 0, \quad \epsilon = \frac{\Delta r}{r} = 0.01.$$

La velocidad angular de rotación ω tiene signo: es positiva para la rotación prógrada y negativa para la rotación retrógrada.

1. Al orden dominante en r/R , las fuerzas de los hilos, dirigidas hacia P, tienen módulos

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2)$$

y

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Para cualquiera de los dos sentidos de rotación especificados,

$$F_{\text{max}} \simeq 30.7 \text{ kN}, \quad F_{\text{min}} \simeq 30.3 \text{ kN}, \quad F_{\text{max}} - F_{\text{min}} \simeq 367 \text{ N}.$$

Una rotación completa con hilos flexibles tensos requiere $|\omega| \geq \Omega$, con esta precisión.

2. La potencia neta media suministrada por **una máquina** es

$$\overline{P}_1 = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

Numéricamente,

$$\overline{P}_1 = 1.91 \text{ kW} \quad (\text{prógrada}), \quad \overline{P}_1 = 2.17 \text{ kW} \quad (\text{retrógrada}).$$

En la rotación síncrona, $\omega = \Omega$, no hay un ciclo repetido de bombeo y la potencia media es cero.

3. La tabla completada para el modelo secular de sólido rígido es:

Magnitud	Aumenta si	Disminuye si	Permanece constante si	¿Constante en todas las situaciones?
Rapidez orbital v	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	No
Radio orbital R	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	No
Velocidad angular de rotación con signo ω	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	No
Energía potencial gravitatoria U	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	No

Así, la rotación retrógrada aumenta en valor absoluto. Formalmente, una rotación prógrada con $0 < \omega < \Omega$ se ralentiza y posteriormente invierte su sentido; más adelante se precisan las limitaciones de viabilidad con hilos flexibles en este intervalo.

Órbita más alta: Sí, en la rama ascendente, en particular con una rotación retrógrada suficientemente rápida.

Órbita arbitrariamente alta: Sí, dentro del modelo newtoniano ideal. Un momento angular de rotación cada vez más negativo compensa el aumento del momento angular orbital. No existe un radio máximo finito, aunque alcanzar el infinito requeriría un tiempo infinito y una energía de rotación ilimitada.

Solución

Utilizamos los parámetros pequeños

$$\frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \simeq 0.0145, \quad \epsilon = 0.01.$$

Conservamos los términos dominantes de las fuerzas debidas al gradiente gravitatorio y del trabajo en el pequeño recorrido del hilo. La órbita se considera circular durante cada ciclo de bombeo, mientras que su radio y la velocidad angular media de rotación cambian lentamente. El momento de inercia medio es

$$I \simeq 4mr^2.$$

1) Fuerzas en los cuatro hilos radiales

Sea $\mathbf{e}_R$ un vector que apunta desde la Tierra hacia P, y sea $\boldsymbol{\rho} = r\mathbf{e}$ el vector de posición de un cuerpo periférico respecto de P. El desarrollo de la aceleración gravitatoria terrestre alrededor de P da

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \frac{K}{R^3} [3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\rho}].$$

Esta es la aceleración de marea.

En las cuatro posiciones especificadas, esta aceleración es radial respecto de P, al orden conservado. Si θ es el ángulo entre $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}_R$, su componente radial es

$$\delta g_r = \Omega^2 r (3 \cos^2 \theta - 1).$$

El cuerpo periférico necesita una aceleración radial $-\omega^2 r$ respecto de P. Tomando como positivo el sentido hacia fuera desde P, la segunda ley de Newton da

$$-m\omega^2 r = m\delta g_r - F,$$

donde F es la fuerza del hilo dirigida hacia dentro. Por tanto,

$$F = mr [\omega^2 + \Omega^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

Para los cuerpos situados hacia fuera y hacia dentro, $\cos^2 \theta = 1$:

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2).$$

La atracción diferencial de la Tierra tiende a separar estos cuerpos de P, aumentando la tensión necesaria.

Para los dos cuerpos transversales, $\cos^2 \theta = 0$:

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Aquí la fuerza de marea apunta hacia P y proporciona parte de la fuerza centrípeta.

En consecuencia,

$$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 3mr\Omega^2 = \frac{3Kmr}{R^3}.$$

La pequeña diferencia entre los cuerpos más cercano y más lejano queda fuera de esta aproximación de primer orden.

Utilizando los datos proporcionados,

$$R = 6.878 \times 10^6 \text{ m}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3.983 \times 10^{14}}{(6.878 \times 10^6)^3}} = 1.1064 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1},$$

y

$$|\omega| = \frac{10(2\pi)}{3600} = 1.74533 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}.$$

Las dos escalas de fuerza son

$$mr\omega^2 = 3.04617 \times 10^4 \text{ N}, \quad mr\Omega^2 = 122.412 \text{ N}.$$

Por tanto,

$$F_{\max} \simeq 3.07066 \times 10^4 \text{ N}, \quad F_{\min} \simeq 3.03393 \times 10^4 \text{ N},$$

lo que da las respuestas redondeadas 30.7 kN y 30.3 kN.

El sentido de rotación no afecta a estas fuerzas, ya que dependen de ω^2 .

De $F_{\min} \geq 0$ se deduce una restricción física:

$$|\omega| \geq \Omega.$$

Si $|\omega| < \Omega$, la posición transversal requeriría una fuerza radial de compresión. Un hilo flexible no puede proporcionarla, por lo que la rotación rígida supuesta no puede mantenerse durante un ciclo completo.

2) Potencia neta de una máquina

El recorrido es

$$\Delta r = \epsilon r = 1000 \text{ m}.$$

A primer orden en este recorrido, el trabajo suministrado durante una recogida del hilo y el recuperado durante la posterior suelta son

$$W_{\text{in}} \simeq F_{\max} \Delta r, \quad W_{\text{out}} \simeq F_{\min} \Delta r.$$

Así, un ciclo de recogida y suelta suministra

$$\Delta W = (F_{\max} - F_{\min}) \Delta r = 3\epsilon mr^2 \Omega^2.$$

Las contribuciones centrífugas se cancelan a este orden. Numéricamente,

$$\Delta W \simeq 3.67236 \times 10^5 \text{ J}.$$

La línea Tierra-satélite gira a Ω con respecto a las estrellas. Por tanto, la orientación del hilo respecto de esa línea cambia a razón de

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega.$$

Cada hilo pasa por **dos máximos y dos mínimos por revolución relativa**. El período de la revolución relativa es

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|},$$

de modo que el trabajo neto de una máquina durante ese período es $2\Delta W$. Por tanto,

$$\boxed{\bar{P}_1 = \frac{2\Delta W}{T_{\text{rel}}} = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|}.$$

Para la rotación prógrada, $\omega = |\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = 384.37 \text{ s}, \quad \bar{P}_1 = \frac{2(3.67236 \times 10^5)}{384.37} \simeq \boxed{1.91 \text{ kW}}.$$

Para la rotación retrógrada, $\omega = -|\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega| + \Omega} = 338.54 \text{ s},$$

$$\overline{P}_1 \simeq \boxed{2.17 \text{ kW}}.$$

Cuando $\omega = \Omega$, la orientación respecto de la Tierra es fija. No hay pasos repetidos por máximos y mínimos de tensión, por lo que la potencia media sostenida es cero.

3) Cambios en el movimiento del satélite

Escribamos la masa total del satélite como $M = 4m$. Con la precisión conservada, su rapidez orbital, su momento angular, su energía mecánica y su energía potencial gravitatoria son

$$v = \sqrt{\frac{K}{R}},$$

$$L = M\sqrt{KR} + I\omega,$$

$$E = -\frac{KM}{2R} + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad U = -\frac{KM}{R}.$$

Cada fuerza gravitatoria apunta hacia el centro de la Tierra y, por tanto, no ejerce momento respecto de ese centro. Las máquinas ejercen fuerzas internas. Así, despreciando la presión de radiación,

$$\boxed{\dot{L} = 0}.$$

Derivando,

$$\frac{M}{2} \sqrt{\frac{K}{R}} \dot{R} + I\dot{\omega} = 0,$$

o bien

$$\boxed{\dot{R} = -\frac{2I}{MR\Omega} \dot{\omega} = -\frac{2r^2}{R\Omega} \dot{\omega}}.$$

Por tanto, un aumento del momento angular de rotación con signo reduce el radio orbital.

Las cuatro máquinas suministran una potencia mecánica total $P_{\text{tot}} = 4\overline{P}_1$. Derivando la energía y sustituyendo la conservación del momento angular se obtiene

$$P_{\text{tot}} = \frac{KM}{2R^2} \dot{R} + I\omega\dot{\omega} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

Así,

$$\boxed{P_{\text{tot}} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}}.$$

Como las máquinas en funcionamiento suministran una potencia neta positiva,

$$\text{sgn}(\dot{\omega}) = \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

De forma más explícita, las tasas de variación promediadas sobre el ciclo son

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{3\epsilon\Omega^2}{\pi} \text{sgn}(\omega - \Omega)}$$

y

$$\boxed{\dot{R} = -\frac{6\epsilon r^2 \Omega}{\pi R} \text{sgn}(\omega - \Omega)}.$$

Estas relaciones justifican todas las entradas de la tabla de respuestas:

- **Rotación prógrada más rápida, $\omega > \Omega$:** la velocidad angular de rotación aumenta, la órbita se contrae, la rapidez orbital aumenta y la energía potencial gravitatoria disminuye.
- **Rotación retrógrada, $\omega < 0$:** la velocidad angular de rotación con signo disminuye, por lo que su valor absoluto retrógrado aumenta. La órbita se expande, la rapidez orbital disminuye y la energía potencial gravitatoria aumenta.
- **Formalmente, $0 < \omega < \Omega$:** la rotación prógrada se ralentiza mientras la órbita se expande. El funcionamiento continuado invertiría el sentido de rotación. Este intervalo está sujeto a la limitación de los hilos flexibles hallada en el apartado (1).
- **Rotación síncrona, $\omega = \Omega$:** no hay accionamiento repetido y, por tanto, tampoco hay cambios seculares causados por las máquinas.

En particular, los signos de las variaciones de la rapidez orbital y de la energía potencial se deducen directamente de

$$\dot{v} = -\frac{v}{2R}\dot{R}, \quad \dot{U} = \frac{KM}{R^2}\dot{R}.$$

Si se interpreta la fila de velocidad angular de la tabla como una rapidez de rotación sin signo: $|\omega|$ aumenta tanto para la rotación prógrada más rápida como para la rotación retrógrada; disminuye en el caso formal de rotación prógrada más lenta hasta que se invierte el sentido de rotación.

Posibilidad de alcanzar órbitas más altas y arbitrariamente altas

Un satélite que gira en sentido contrario al orbital con suficiente rapidez tiene $\omega < -\Omega$, por lo que sus hilos permanecen tensos y $\dot{R} > 0$. Por tanto, puede alcanzar una órbita más alta.

La conservación del momento angular no impone un radio máximo finito. Entre el estado inicial y una órbita circular posterior,

$$M\sqrt{KR} + I\omega = M\sqrt{KR_0} + I\omega_0.$$

Como $I/M = r^2$,

$$\boxed{\omega(R) = \omega_0 - \frac{\sqrt{K}}{r^2}(\sqrt{R} - \sqrt{R_0})}.$$

A medida que R crece, el momento angular orbital cada vez más positivo se compensa con un momento angular de rotación cada vez más negativo. Las máquinas alimentadas por energía solar suministran la energía necesaria.

La velocidad de ascenso se hace progresivamente menor. En la rama ascendente,

$$\dot{R} = \frac{6\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} R^{-5/2},$$

cuya integración da

$$\boxed{R(t)^{7/2} = R_0^{7/2} + \frac{21\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} t}.$$

En este modelo ideal, cualquier radio objetivo finito se alcanza tras un tiempo finito, pero $R \rightarrow \infty$ requiere $t \rightarrow \infty$. Además, la energía de rotación necesaria crece sin límite:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \sim \frac{2mK}{r^2}R \quad (R \rightarrow \infty).$$

Por tanto, **las órbitas finitas arbitrariamente altas son posibles bajo las idealizaciones indicadas**, mientras que el escape a una distancia infinita es solo un límite asintótico de este proceso de bombeo en órbita circular.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: El movimiento longitudinal de una molécula lineal

En este problema analizará el movimiento longitudinal de una molécula lineal, es decir, el movimiento a lo largo del eje molecular. No se consideran el movimiento de rotación ni la flexión de la molécula. Se supone que la molécula consta de N átomos de masas $m_1, m_2, \dots, m_N$, respectivamente. Se supone que cada átomo está unido a sus vecinos mediante un enlace químico. Cada enlace se aproxima mediante un resorte sin masa que obedece la ley de Hooke, con constantes elásticas $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. La molécula se muestra en la Fig. 1.

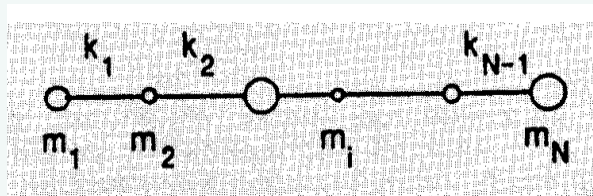


Fig.1. Una molécula lineal con N átomos.

Utilice los siguientes hechos para resolver este problema: el movimiento vibratorio longitudinal de una molécula lineal consiste en una superposición de movimientos vibratorios independientes denominados vibraciones normales o modos normales. En un modo normal, todos los átomos vibran con movimiento armónico simple a la misma frecuencia y pasan simultáneamente por sus posiciones de equilibrio.

Preguntas

- 1) Sea x_i el desplazamiento del átomo i respecto de su posición de equilibrio. Expresa la fuerza F_i que actúa sobre cada átomo en función de los desplazamientos $x_1, x_2, \dots, x_N$ y de las constantes elásticas $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. ¿Qué relación existe entre las fuerzas $F_1, F_2, \dots, F_N$? Utilizando esta relación, deduzca una relación entre los desplazamientos $x_1, x_2, \dots, x_N$ y dé una interpretación física de esta relación.
- 2) Analice el movimiento de una molécula diatómica AB (Fig. 2). El valor de la constante elástica es k . Deduzca una expresión para las fuerzas que actúan sobre los átomos A y B. Determine los tipos de movimiento posibles de la molécula. Determine las frecuencias de vibración correspondientes e interprete el resultado. En particular, ¿cómo es posible que los átomos vibren con la misma frecuencia aunque sus masas sean distintas?

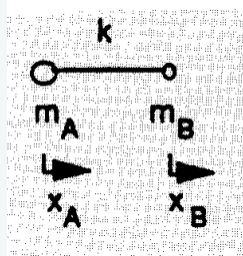


Fig.2. La molécula diatómica AB

3) Analice el movimiento de la molécula triatómica BA_2 (Fig. 3)

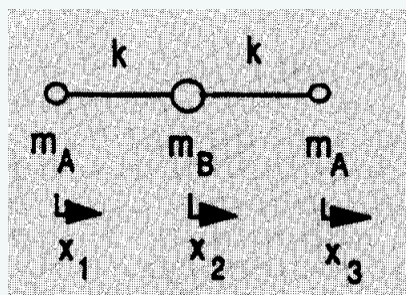


Fig.3. La molécula triatómica BA_2 .

Expresé la fuerza neta sobre cada átomo únicamente en función de su propio desplazamiento. Deduzca los movimientos posibles de la molécula y las frecuencias de vibración correspondientes.

4) Las frecuencias de los dos modos longitudinales de vibración de la molécula de CO_2 son 3.998×10^{13} Hz y 7.042×10^{13} Hz, respectivamente. Determine un valor numérico para la constante elástica del enlace CO.

¿En qué medida cree que esta aproximación de la estructura de enlaces de la molécula describe el movimiento vibratorio de la molécula real?

La masa atómica del átomo de carbono = 12 amu y la del átomo de oxígeno = 16 amu. La unidad de masa atómica = 1.660×10^{-27} kg.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. Las fuerzas son

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}). \end{aligned}$$

Satisfacen $\sum_i F_i = 0$, por lo que

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

El centro de masas se mueve uniformemente. Para las vibraciones internas medidas en su sistema de referencia en reposo,

$$\sum_i m_i x_i = 0.$$

2. Para AB,

$$F_A = k(x_B - x_A), \quad F_B = k(x_A - x_B).$$

Hay una traslación rígida de frecuencia nula y un modo de vibración interna:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

En esta vibración, $m_A x_A = -m_B x_B$: los átomos se mueven en sentidos opuestos, con amplitudes inversamente proporcionales a sus masas.

3. Para BA_2 , los modos normales son:

Movimiento	Proporciones entre desplazamientos $x_1 : x_2 : x_3$	Frecuencia
Traslación rígida	1 : 1 : 1	0
Estiramiento simétrico	1 : 0 : -1	$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}$
Estiramiento asimétrico	$1 : -\frac{2m_A}{m_B} : 1$	$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$

En el estiramiento simétrico,

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

En el estiramiento asimétrico,

$$\begin{aligned} F_1 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_1, \\ F_2 &= -k \left(2 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_2, \\ F_3 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_3. \end{aligned}$$

El movimiento general es una superposición de las dos vibraciones y una traslación uniforme.

4. Las dos frecuencias medidas dan, por separado,

$$k_s = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}, \quad k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Por tanto, un valor aproximado representativo de la rigidez del enlace es $k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$. Ningún valor único de k reproduce exactamente ambas frecuencias: el cociente de frecuencias predicho es 1.915, mientras que el cociente observado es 1.761. El modelo proporciona una aproximación razonable, con una discrepancia de alrededor del 9% en este cociente.

Solución

1) Fuerzas y centro de masas

Tómese el mismo sentido positivo a lo largo del eje molecular para todos los desplazamientos. La variación de longitud del resorte que une los átomos i e $i + 1$ es

$$\Delta \ell_i = x_{i+1} - x_i.$$

Por tanto, la energía potencial de los resortes ideales que obedecen la ley de Hooke es

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Al utilizar $F_i = -\partial U / \partial x_i$, se obtiene

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 (x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i (x_{i+1} - x_i) - k_{i-1} (x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

y

$$F_N = -k_{N-1} (x_N - x_{N-1}).$$

Cada resorte ejerce fuerzas iguales y opuestas en sus dos extremos. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0.$$

La segunda ley de Newton da entonces

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i x_i \right) = 0,$$

de modo que

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

Escribiendo $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$, el desplazamiento del centro de masas es

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{\text{tot}}}.$$

Así, el centro de masas tiene velocidad constante, como cabe esperar de un sistema aislado sin fuerzas externas.

Para un modo normal de frecuencia no nula,

$$x_i = a_i \cos(\omega t + \phi).$$

Como $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$,

$$0 = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\omega^2 \sum_i m_i x_i.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sum_i m_i x_i = 0 \quad (\omega \neq 0).}$$

La vibración interna deja fijo el centro de masas. Se puede superponer de forma independiente una traslación uniforme.

2) La molécula diatómica AB

El alargamiento del resorte es $x_B - x_A$, por lo que

$$m_A \ddot{x}_A = k(x_B - x_A), \quad m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A).$$

Introduzcamos el desplazamiento del centro de masas y el desplazamiento relativo:

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad q = x_B - x_A.$$

Al sumar las ecuaciones de movimiento, se obtiene

$$\ddot{X} = 0.$$

Al restar las aceleraciones, se obtiene

$$\ddot{q} = -k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) q.$$

Por tanto,

$$X = X_0 + Vt, \quad q = Q \cos(\omega t + \phi),$$

donde

$$\boxed{\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

El movimiento completo es

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= X_0 + Vt - \frac{m_B}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi), \\ x_B &= X_0 + Vt + \frac{m_A}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}}$$

Hay dos tipos independientes de movimiento:

- **Traslación rígida:** $q = 0$, de modo que $x_A = x_B = X_0 + Vt$. El resorte no está deformado y ambas fuerzas se anulan. Este es el modo de frecuencia nula.
- **Vibración interna:** en el sistema de referencia en el que el centro de masas está en reposo,

$$m_A x_A + m_B x_B = 0.$$

Los átomos oscilan en oposición de fase con frecuencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Para comprender por qué las frecuencias son iguales pese a que las masas son distintas, eliminemos el desplazamiento del otro átomo:

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B} x_A, \quad x_A = -\frac{m_B}{m_A} x_B.$$

Entonces

$$F_A = -k \left(1 + \frac{m_A}{m_B} \right) x_A, \quad F_B = -k \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_B.$$

Al dividir cada coeficiente de la fuerza recuperadora entre la masa correspondiente, se obtiene el mismo valor:

$$\frac{k(1 + m_A/m_B)}{m_A} = \frac{k(1 + m_B/m_A)}{m_B} = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right).$$

Por tanto, ambos átomos tienen la misma frecuencia angular. Sus masas distintas se compensan con amplitudes distintas:

$$\frac{|x_A|_{\max}}{|x_B|_{\max}} = \frac{m_B}{m_A}.$$

El átomo más pesado tiene tanto una amplitud de desplazamiento menor como una amplitud de aceleración menor.

3) La molécula triatómica BA_2

Escribamos $m = m_A$ y $M = m_B$. La ley de Hooke da

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ M\ddot{x}_2 &= k(x_1 + x_3 - 2x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

La traslación rígida, $x_1 = x_2 = x_3 = X_0 + Vt$, hace que las tres fuerzas sean nulas.

Para la vibración interna, trabajemos en el sistema de referencia en el que el centro de masas está en reposo:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

Definamos la media y la semidiferencia de los desplazamientos de los extremos:

$$s = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad d = \frac{x_1 - x_3}{2}.$$

Entonces

$$x_1 = s + d, \quad x_3 = s - d, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Al sumar y restar las ecuaciones de los extremos, se obtiene

$$m\ddot{s} = k(x_2 - s) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)s,$$

$$m\ddot{d} = -kd.$$

Estos son dos osciladores armónicos independientes, por lo que identifican todos los modos normales internos.

Modo de estiramiento simétrico. Hagamos $s = 0$. Entonces

$$x_2 = 0, \quad x_1 = d, \quad x_3 = -d.$$

El átomo central permanece inmóvil, mientras que los átomos exteriores se mueven con amplitudes iguales en sentidos opuestos. Ambos enlaces se alargan a la vez y se acortan a la vez.

Las fuerzas, expresadas en función del desplazamiento de cada átomo, son

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

Por tanto,

$$\boxed{\omega_s^2 = \frac{k}{m_A}, \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}.}$$

La masa central no interviene en esta frecuencia porque las dos fuerzas que ejercen los resortes sobre ella se cancelan durante todo el movimiento.

Modo de estiramiento asimétrico. Hagamos $d = 0$. Entonces

$$x_1 = x_3 = s, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Los átomos exteriores se mueven juntos y el átomo central se mueve en sentido opuesto. Un enlace se alarga mientras el otro se acorta.

Para cualquiera de los átomos exteriores,

$$F_1 = k(x_2 - x_1) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_1,$$

$$F_3 = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_3.$$

Para el átomo central, utilicemos $x_1 + x_3 = -(M/m)x_2$:

$$F_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) = -k\left(2 + \frac{M}{m}\right)x_2.$$

Las tres ecuaciones dan

$$\boxed{\omega_a^2 = k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B}\right), \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B}\right)}.}$$

Estas leyes de fuerza en función de un solo desplazamiento se aplican a los modos normales indicados. Una superposición general obedece las ecuaciones de fuerza acopladas originales.

El movimiento completo puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (X_0 + Vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/m_B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, hay dos modos de vibración longitudinal y un modo de traslación.

4) Valor numérico de la rigidez del enlace y evaluación del modelo

Para CO_2 , los átomos exteriores son de oxígeno y el átomo central es de carbono:

$$m_A = m_O = 16(1.660 \times 10^{-27}) = 2.656 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_B = m_C = 12(1.660 \times 10^{-27}) = 1.992 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

Como $f_a > f_s$, asignamos

$$f_s = 3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}, \quad f_a = 7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

A partir del modo simétrico,

$$k_s = m_O(2\pi f_s)^2,$$

de modo que

$$k_s = (2.656 \times 10^{-26}) [2\pi(3.998 \times 10^{13})]^2 = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

A partir del modo asimétrico,

$$k_a = \frac{(2\pi f_a)^2}{1/m_O + 2/m_C},$$

de modo que

$$k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Estas estimaciones sitúan la rigidez del enlace cerca de

$$k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Su diferencia muestra que el modelo no puede reproducir ambas frecuencias medidas con una única constante elástica.

Una comprobación directa de la coherencia, independiente de k , es el cociente de frecuencias. El modelo predice

$$\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} = \sqrt{1 + \frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.915.$$

El cociente medido es

$$\left(\frac{f_a}{f_s}\right)_{\text{measured}} = \frac{7.042}{3.998} = 1.761.$$

Por ejemplo, al ajustar la frecuencia menor, se predice

$$f_a = 1.91485(3.998 \times 10^{13}) = 7.656 \times 10^{13} \text{ Hz},$$

que está un 8.71% por encima de la frecuencia mayor medida.

Por tanto, el modelo de resortes ideales proporciona una descripción aproximada razonable de los dos movimientos de estiramiento y de la escala de sus frecuencias. Su precisión cuantitativa es limitada: las fuerzas recuperadoras de la molécula real pueden incluir acoplamiento entre los alargamientos de los dos enlaces y desviaciones respecto de la ley de Hooke, que este modelo omite.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Un satélite a la luz del Sol

En este problema calculará la temperatura de un satélite espacial. Se supone que el satélite es una esfera de 1 m de diámetro. Todo el satélite se mantiene a una temperatura uniforme. Toda la superficie esférica del satélite está recubierta con el mismo tipo de revestimiento. El satélite se encuentra cerca de la Tierra, pero no está en su sombra.

La temperatura superficial del Sol (su temperatura superficial de cuerpo negro) es $T_{\text{sun}} = 6000 \text{ K}$ y su radio es $6.96 \times 10^8 \text{ m}$. La distancia entre el Sol y la Tierra es $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. La luz solar calienta el satélite hasta una temperatura a la que la emisión de cuerpo negro del satélite iguala la potencia absorbida de la luz solar. La potencia emitida por unidad de superficie por un cuerpo negro viene dada por la ley de Stefan-Boltzmann $P = \sigma T^4$, donde σ es la constante universal $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. En una primera aproximación, puede suponer que tanto el Sol como el satélite absorben toda la radiación electromagnética que incide sobre ellos.

1) Obtenga una expresión para la temperatura T del satélite. ¿Cuál es el valor numérico de esta temperatura?

2) El espectro de radiación de cuerpo negro $u(T, f)$ de un cuerpo a temperatura T obedece la ley de radiación de Planck

$$u(T, f) df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

donde $\eta = hf/kT$ y $u(T, f)df$ es la densidad de energía de la radiación electromagnética en un intervalo de frecuencias $[f, f + df]$. En la ecuación, $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ es la constante de Planck, $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ es la constante de Boltzmann y $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ es la velocidad de la luz.

El espectro de cuerpo negro, integrado sobre todas las frecuencias f y direcciones de emisión, da la potencia total radiada por unidad de superficie $P = \sigma T^4$, tal como se expresa en la ley de Stefan-Boltzmann indicada anteriormente.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

La figura muestra el espectro normalizado

$$\frac{c^3 h^3}{8\pi k^4} \frac{u(T, f)}{T^4}$$

en función de η .

En muchas aplicaciones es necesario mantener el satélite lo más frío posible. Para enfriar el satélite, los ingenieros utilizan un revestimiento reflectante que refleja la luz por encima de una frecuencia de corte, pero que no impide que escape la radiación térmica de menor frecuencia. Suponga que esta frecuencia de corte (abrupto) corresponde a $hf/k = 1200 \text{ K}$.

¿Cuál es la nueva temperatura de equilibrio del satélite? No se necesita la respuesta exacta. Por tanto, no realice integraciones tediosas; haga aproximaciones cuando sea necesario. La integral sobre todo el intervalo es

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

y el máximo de $\eta^3/(e^\eta - 1)$ se alcanza en $\eta = 2.82$. Para valores pequeños de η , puede desarrollar la función exponencial como $e^\eta \simeq 1 + \eta$.

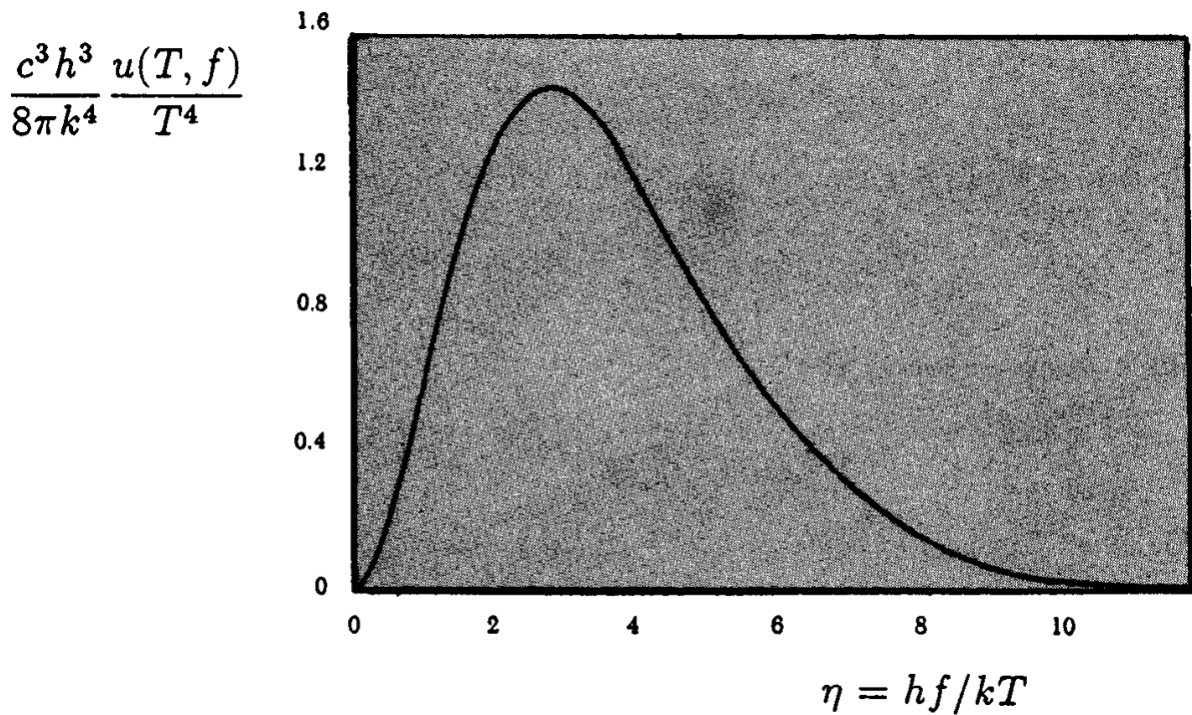
3) Si ahora tenemos un satélite real, con paneles solares desplegados que generan electricidad, el calor disipado en los componentes electrónicos del interior del satélite actúa como una fuente adicional de calor. Suponiendo que la potencia de la fuente interna de calor es de 1 kW, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del satélite en el caso 2 anterior?

4) Un fabricante anuncia una pintura especial de la siguiente manera:

«Esta pintura reflejará más del 90% de toda la radiación incidente (tanto la luz visible como la infrarroja), pero radiará a todas las frecuencias (luz visible e infrarroja) como un cuerpo negro, eliminando así una gran cantidad de calor del satélite. Por tanto, la pintura ayudará a mantener el satélite lo más frío posible».

¿Puede existir una pintura así? ¿Por qué sí o por qué no?

5) ¿Qué propiedades debería tener un revestimiento para elevar la temperatura de un cuerpo esférico similar al satélite considerado aquí por encima de la temperatura calculada en 1)?



Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. Con el radio solar $R_{\odot}$ y la distancia Sol-satélite D ,

$$T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}} \simeq 289 \text{ K.}$$

2. Utilizando la aproximación indicada para valores pequeños de η ,

$$T_2 \simeq T_1 \left[\frac{5}{\pi^4} \left(\frac{1200 \text{ K}}{T_{\text{sun}}} \right)^3 \right]^{1/4} \simeq 41 \text{ K.}$$

3. Teniendo en cuenta la supresión de la emisión térmica de alta frecuencia debida al revestimiento, $\boxed{T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}}$
 $\quad \text{quad} \text{ (aproximadamente } 317 \text{ K).}$

4. **No.** La ley de Kirchhoff exige que la absorptividad y la emisividad sean iguales a cada frecuencia. Una superficie que refleje más del 90% no puede emitir simultáneamente como un cuerpo negro a esas frecuencias.
5. El revestimiento debe **absorber intensamente la radiación solar y emitir débilmente la radiación infrarroja térmica**: alta absorptividad a las frecuencias solares y alta reflectividad a las frecuencias térmicas más bajas del satélite.

Solución

Sean $a = 0.50 \text{ m}$ el radio del satélite, $R_\odot$ el radio solar y D la distancia Sol-satélite. Utilizamos el modelo de balance radiativo indicado, despreciando la radiación procedente de la Tierra y otros intercambios de calor.

1) Satélite de cuerpo negro

La luminosidad del Sol es

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_{\text{sun}}^4.$$

Por consiguiente, la irradiancia solar en el satélite es

$$S = \frac{L_\odot}{4\pi D^2} = \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2.$$

El satélite intercepta la luz solar sobre su área proyectada πa^2 , mientras que toda su superficie $4\pi a^2$ emite radiación. Por tanto, el equilibrio térmico requiere

$$\pi a^2 S = 4\pi a^2 \sigma T_1^4.$$

Así,

$$T_1^4 = \frac{1}{4} T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2, \quad \boxed{T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_\odot}{2D}}}.$$

Numéricamente,

$$T_1 = 6000 \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2(1.5 \times 10^{11})}} \text{ K} = \boxed{289 \text{ K}}.$$

El radio del satélite se cancela porque tanto la potencia absorbida como la emitida son proporcionales a a^2 .

2) Satélite con el revestimiento selectivo en frecuencia

Escribimos

$$\Theta = \frac{hf_c}{k} = 1200 \text{ K},$$

donde f_c es la frecuencia de corte. El satélite con el revestimiento ideal absorbe y emite como un cuerpo negro por debajo de f_c , mientras que la reflexión suprime tanto la absorción como la emisión por encima de f_c . Esta igualdad entre la absorptividad y la emisividad espectrales es la ley de Kirchhoff.

Definimos la fracción de la potencia de cuerpo negro por debajo de un límite de corte adimensional x mediante

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta.$$

Para un cuerpo a temperatura T , el límite de corte correspondiente es $x = \Theta/T$. Por tanto, la ecuación de equilibrio es

$$\pi a^2 \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right) = 4\pi a^2 \sigma T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right).$$

Utilizando el apartado 1,

$$T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2}\right) = T_1^4 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}}\right).$$

Para la luz solar,

$$x_{\odot} = \frac{1200}{6000} = 0.20.$$

En todo este pequeño intervalo, $e^{\eta} - 1 \simeq \eta$, por lo que

$$F(0.20) \simeq \frac{15}{\pi^4} \int_0^{0.20} \eta^2 d\eta = \frac{5(0.20)^3}{\pi^4} \simeq 4.11 \times 10^{-4}.$$

Así, solo se absorbe aproximadamente el 0.041% de la potencia solar incidente.

Suponemos inicialmente que el satélite enfriado emite casi toda su radiación térmica por debajo de la frecuencia de corte, de modo que $F(\Theta/T_2) \simeq 1$. Entonces

$$T_2 \simeq T_1 [F(0.20)]^{1/4} = 289(4.11 \times 10^{-4})^{1/4} \text{ K},$$

lo que da

$$\boxed{T_2 \simeq 41 \text{ K.}}$$

Esta suposición es coherente con el resultado: el límite de corte del satélite es

$$\frac{\Theta}{T_2} \simeq \frac{1200}{41} \simeq 29,$$

muy por encima del máximo espectral situado en $\eta = 2.82$. La cola térmica de alta frecuencia que queda excluida es despreciable.

3) Adición de una fuente interna de calor de 1 kW

Ahora se necesita explícitamente el área emisora:

$$A = 4\pi a^2 = \pi \text{ m}^2.$$

Antes de aplicar el revestimiento, la potencia solar absorbida era

$$Q_{\odot,0} = A\sigma T_1^4 \simeq 1.24 \times 10^3 \text{ W}.$$

Con el revestimiento, pasa a ser

$$Q_{\odot} = Q_{\odot,0} F(0.20) \simeq (1.24 \times 10^3)(4.11 \times 10^{-4}) \simeq 0.51 \text{ W}.$$

Esta potencia es despreciable frente a la fuente interna de calor $Q_{\text{int}} = 1000 \text{ W}$. El balance es

$$\boxed{A\sigma T_3^4 F\left(\frac{1200 \text{ K}}{T_3}\right) = 1000 \text{ W} + Q_{\odot}.$$

Aquí no podemos tomar $F = 1$. Incluso un cuerpo negro sin restricción espectral necesitaría la temperatura

$$\left(\frac{1000 \text{ W}}{A\sigma}\right)^{1/4} \simeq 274 \text{ K},$$

para la cual el límite de corte ya se encontraría en $\eta_c \simeq 4.38$. Una parte significativa del espectro térmico está por encima de ese límite, de modo que el satélite recubierto debe calentarse más.

Podemos estimar la fracción necesaria directamente a partir de la gráfica proporcionada. Cerca de $\eta_c = 3.8$, el área bajo la curva es aproximadamente

$$\int_0^{3.8} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta \simeq 3.6.$$

Como el área total es $\pi^4/15 \simeq 6.49$,

$$F(3.8) \simeq \frac{3.6}{6.49} \simeq 0.55.$$

Al sustituir se obtiene

$$T_3 \simeq \left[\frac{1000.5 \text{ W}}{(\pi \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4})(3.6/6.49)} \right]^{1/4} \simeq 317 \text{ K}.$$

El límite de corte correspondiente es $1200/317 \simeq 3.79$, lo que confirma la estimación gráfica. Por tanto,

$$T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}.$$

4) La pintura anunciada

La ley de Kirchhoff de la radiación térmica establece que, a una frecuencia dada y para las direcciones correspondientes,

$$\epsilon_f = \alpha_f,$$

donde ϵ_f es la emisividad y α_f es la absorptividad.

La conservación de la energía da

$$\alpha_f + \rho_f + \tau_f = 1,$$

donde ρ_f y τ_f son la reflectividad y la transmisividad. Por consiguiente, si $\rho_f > 0.90$,

$$\alpha_f < 0.10 \implies \epsilon_f < 0.10.$$

En cambio, la emisión de cuerpo negro requeriría $\epsilon_f = 1$.

Por tanto, la combinación anunciada de alta reflexión y emisión térmica de cuerpo negro a las mismas frecuencias es imposible para una pintura pasiva. Violaría la ley de Kirchhoff y el balance térmico detallado.

5) Un revestimiento que eleva la temperatura

El revestimiento debe tener una selectividad espectral opuesta a la del apartado 2:

- Absorción intensa a las frecuencias relativamente altas que transportan la mayor parte de la radiación solar.
- Emisión débil y, en consecuencia, reflexión intensa a las frecuencias infrarrojas más bajas que transportan la mayor parte de la radiación térmica del satélite.

Sea $\bar{\alpha}_\odot$ la absorptividad promediada sobre el espectro solar, y sea $\bar{\epsilon}_T$ la emisividad promediada sobre el espectro de cuerpo negro del satélite a temperatura T . El balance sin calentamiento interno es

$$\pi a^2 \bar{\alpha}_\odot S = 4\pi a^2 \bar{\epsilon}_T \sigma T^4.$$

Por tanto,

$$T = T_1 \left(\frac{\bar{\alpha}_\odot}{\bar{\epsilon}_T} \right)^{1/4}.$$

La temperatura de equilibrio supera T_1 cuando

$$\bar{\alpha}_{\odot} > \bar{\epsilon}_T.$$

Esto es compatible con la ley de Kirchhoff porque los dos promedios ponderan intervalos de frecuencia diferentes. Un revestimiento gris independiente de la frecuencia tendría la misma absorptividad y emisividad y dejaría inalterada la temperatura de equilibrio.

La solución se comprobó con la solución oficial.