

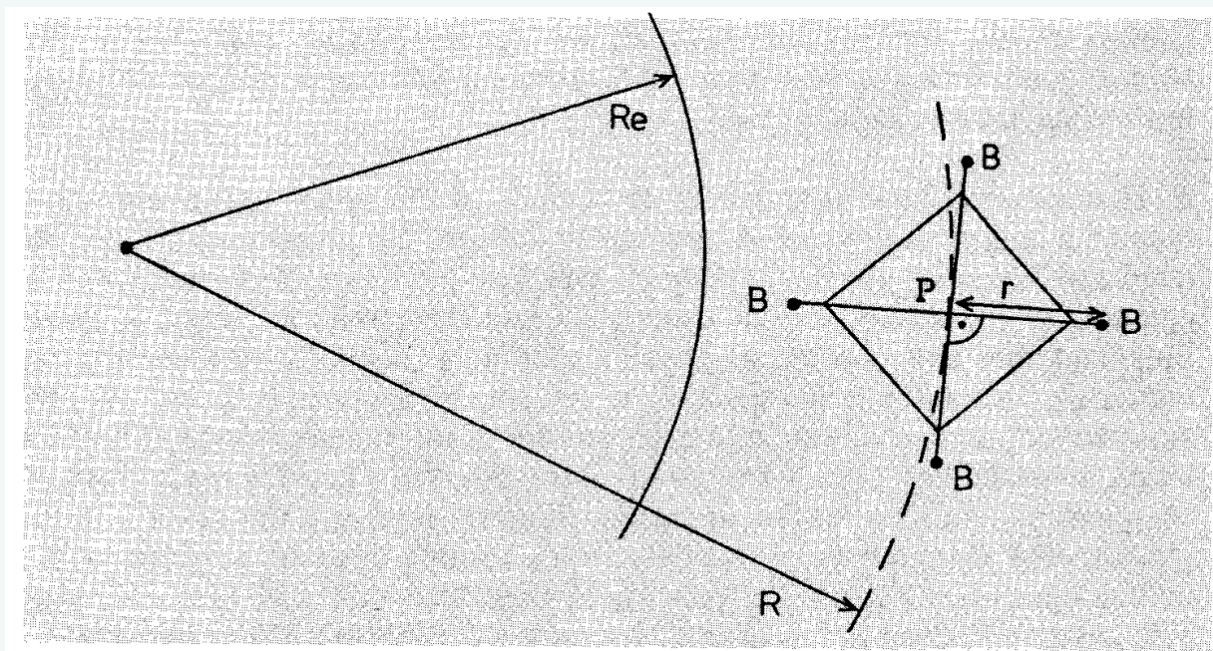
IPhO 1992

Theorieaufgaben und Lösungen · Espoo (Helsinki), Finnland · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1992/

Aufgabe 1: Ein rotierender Satellit

Die Abbildung zeigt einen Satelliten, der die Erde auf einer annähernd kreisförmigen Bahn in der Äquatorebene der Erde umkreist. Der Satellit besteht aus einem masselosen Zentralkörper P und vier kleinen äußeren Körpern B. Die vier Körper B haben jeweils die Masse m : Sie sind mit langen, dünnen, nicht dehnbaren Drähten der Länge r an P befestigt. Alle fünf Körper, P und die vier Körper B, liegen in der Äquatorebene und können innerhalb dieser Ebene rotieren. Die vier radialen Drähte sind durch weitere dünne Drähte miteinander verbunden, welche die Winkel zwischen den radialen Drähten konstant bei 90° halten.



Die Verbindungsdrähte sind Teil des Systems, um Schwingungsbewegungen der einzelnen Körper B zu verhindern, die die Analyse der Bewegungen andernfalls äußerst kompliziert machen würden. Alle Körper B rotieren mit derselben Winkelgeschwindigkeit um P; diese beträgt bezüglich der Fixsterne ω . Der Satellit verhält sich somit wie ein starrer Körper.

Untersuchen Sie die folgenden Fragen für den allgemeinen Fall und berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Situationen, einschließlich beider Drehrichtungen der Körper B. Bestimmen Sie außerdem Zahlenwerte für einige der in den Fragen (1) und (2) ermittelten Größen — die gesuchten Größen und die erforderlichen Zahlenangaben sind am Ende der Aufgabe aufgeführt.

1) Die Zeichnung zeigt den Satelliten in der Stellung, in der für die verschiedenen Drähte $\mathbf{r}$ parallel, antiparallel oder senkrecht zu $\mathbf{R}$ ist. (Der Vektor $\mathbf{r}$ verläuft vom Körper P zu einem Körper B und hat die Länge r ; der Vektor $\mathbf{R}$ verläuft vom Massenmittelpunkt der Erde zum Körper P.)

Bestimmen Sie die Kraft, die ein radialer Draht auf einen der Körper B in jeder dieser vier Stellungen ausübt. Diese Stellungen entsprechen näherungsweise den maximalen und minimalen Kräften.

2) Im Inneren der vier Körper B befinden sich vier identische, mit Sonnenenergie betriebene Maschinen, die mit den radialen Drähten verbunden sind. Jede Maschine zieht den Draht jeweils dann für kurze Zeit in Richtung B ein, wenn die Kraft im Draht nahezu maximal ist (wie in der vorherigen Frage angegeben), und lässt dieselbe Drahtlänge wieder heraus, wenn die Zugkraft minimal ist. Die eingezogene und wieder herausgelassene Drahtlänge beträgt 1% der mittleren Länge des radialen Drahtes. Die mittlere Länge ändert sich nicht mit der Zeit.

Wie groß ist die von einer Maschine umgesetzte Nettogleistung, gemittelt über eine Umdrehung des Satelliten?

Die Nettogleistung ist definiert als $\frac{W_1 - W_2}{T}$, wobei W_1 die Arbeit ist, welche die Maschine beim Einziehen am Draht verrichtet, W_2 die Arbeit ist, welche der Draht beim Herauslassen an der Maschine verrichtet, und T die Rotationsperiode ist.

3) Erörtern Sie die Änderungen der Bewegung des Satelliten, die durch den Betrieb der Maschinen hervorgerufen werden. Untersuchen Sie insbesondere die Änderungen, die in den einzelnen, in der Tabelle auf der Rückseite aufgeführten Situationen auftreten können.

Tragen Sie Ihre Ergebnisse und Anmerkungen in die Tabelle ein und vergessen Sie nicht, diese abzugeben.

Angaben:

Zahlenwerte werden für die folgende Situation verlangt:

Der Bahnradius des Zentralkörpers ist gegeben durch $R = R_E + 500 \text{ km}$.

Die mittlere Länge der radialen Drähte beträgt $r = 100 \text{ km}$.

Der Durchmesser des Satellitensystems beträgt somit 200 km .

Die Körper B haben die Massen $m = 1000 \text{ kg}$.

Anfangs rotieren die vier Körper B, bezogen auf die Sterne, mit 10 Umdrehungen/Stunde um den Zentralkörper P.

Die Massen der Drähte sind vernachlässigbar, und der Zentralkörper P ist masselos.

Hinweise:

Berücksichtigen Sie beide Drehrichtungen für ω .

Exakte Lösungen werden nicht erwartet. Ergebnisse mit einer Genauigkeit von 5% sind völlig ausreichend.

Vernachlässigen Sie die Gravitationswirkung von Mond und Sonne.

Nützliche Daten:

Größe	Wert
Masse der Erde	$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Erdradius am Äquator	$R_E = 6378 \text{ km}$
Bezeichnen Sie das Produkt $M_E G$ mit K .	$K = 3.983 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Ländercode:

ANTWORTTABELLE

Füllen Sie diese Tabelle als Teil Ihrer Antwort aus. Tragen Sie, wo nötig, Gleichungen oder Ungleichungen und/oder kurze Erläuterungen ein.

Die unten angegebene Größe ...	nimmt zu, wenn ...	nimmt ab, wenn ...	bleibt unverändert, wenn ...	bleibt in allen Situationen unverändert.
Bahngeschwindigkeit des Satelliten				Ja ☐ Nein ☐
Radius R der Umlaufbahn des Satelliten				Ja ☐ Nein ☐
Winkelgeschwindigkeit ω des Satelliten				Ja ☐ Nein ☐
Gravitative potenzielle Energie des Satelliten				Ja ☐ Nein ☐

Könnte der Satellit infolge der von den Maschinen verrichteten Arbeit eine höhere Umlaufbahn erreichen?

Ja ☐

Nein ☐

Könnte der Satellit eine beliebig hohe Umlaufbahn erreichen und damit praktisch den Gravitationseinfluss der Erde verlassen? Warum?

Antwort:

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir wählen die Umlaufrichtung als positiv und definieren

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{R^3}} > 0, \quad \epsilon = \frac{\Delta r}{r} = 0.01.$$

Die Eigenrotationswinkelgeschwindigkeit ω ist vorzeichenbehaftet: positiv bei prograder und negativ bei retrograder Rotation.

1. In führender Ordnung in r/R haben die zu P gerichteten Drahtkräfte die Beträge

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2)$$

und

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Für beide angegebenen Drehrichtungen gilt

$$F_{\text{max}} \simeq 30.7 \text{ kN}, \quad F_{\text{min}} \simeq 30.3 \text{ kN}, \quad F_{\text{max}} - F_{\text{min}} \simeq 367 \text{ N}.$$

Eine vollständige Umdrehung mit gespannten biegsamen Drähten erfordert bei dieser Genauigkeit $|\omega| \geq \Omega$.

2. Die von **einer Maschine** zugeführte mittlere Nettogleistung beträgt

$$\overline{P}_1 = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

Numerisch ergibt sich

$$\overline{P}_1 = 1.91 \text{ kW} \quad (\text{prograd}), \quad \overline{P}_1 = 2.17 \text{ kW} \quad (\text{retrograd}).$$

Bei synchroner Rotation, $\omega = \Omega$, gibt es keinen wiederholten Pumpzyklus, und die mittlere Leistung ist null.

3. Die ausgefüllte Tabelle für das säkulare Starrkörpermodell lautet:

Größe	Nimmt zu, wenn	Nimmt ab, wenn	Bleibt unverändert, wenn	In allen Situationen unverändert?
Bahngeschwindigkeit v	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	Nein
Bahnradius R	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	Nein
Vorzeichenbehaftete Eigenrotationswinkelgeschwindigkeit ω	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	Nein
Gravitative potenzielle Energie U	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	Nein

Eine retrograde Rotation wird somit dem Betrag nach schneller. Formal wird eine prograde Eigenrotation mit $0 < \omega < \Omega$ langsamer und kehrt anschließend ihre Richtung um; die Realisierbarkeit mit biegsamen Drähten in diesem Intervall wird weiter unten eingeschränkt.

Höhere Umlaufbahn: Ja, auf dem aufsteigenden Zweig, insbesondere bei hinreichend schneller retrograder Rotation.

Beliebig hohe Umlaufbahn: Ja, innerhalb des idealen newtonschen Modells. Ein zunehmend negativer Eigendrehimpuls gleicht den zunehmenden Bahndrehimpuls aus. Es gibt keinen endlichen oberen Grenzwert für den Radius, obwohl das Erreichen des Unendlichen unendlich viel Zeit und eine unbegrenzt wachsende Eigenrotationsenergie erfordern würde.

Lösung

Wir verwenden die kleinen Parameter

$$\frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \simeq 0.0145, \quad \epsilon = 0.01.$$

Wir berücksichtigen die Kräfte aufgrund des Gravitationsgradienten in führender Ordnung und die Arbeit in führender Ordnung im kleinen Drahthub. Die Umlaufbahn wird während jedes Pumpzyklus als kreisförmig behandelt, wobei sich ihr Radius und die mittlere Eigenrotationswinkelgeschwindigkeit langsam ändern. Das mittlere Trägheitsmoment beträgt

$$I \simeq 4mr^2.$$

1) Kräfte in den vier radialen Drähten

Der Vektor $\mathbf{e}_R$ zeige von der Erde zu P, und $\boldsymbol{\rho} = r\mathbf{e}$ beschreibe die Lage eines äußeren Körpers relativ zu P. Die Entwicklung der Erdbeschleunigung um P ergibt

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \frac{K}{R^3} [3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\rho}].$$

Dies ist die Gezeitenbeschleunigung.

In den vier angegebenen Stellungen ist diese Beschleunigung in der berücksichtigten Ordnung bezüglich P radial gerichtet. Ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{e}$ und $\mathbf{e}_R$, so ist ihre radiale Komponente

$$\delta g_r = \Omega^2 r (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Der äußere Körper benötigt relativ zu P die Radialbeschleunigung $-\omega^2 r$. Wählen wir die Richtung von P nach außen als positiv, so liefert das zweite newtonsche Gesetz

$$-m\omega^2 r = m\delta g_r - F,$$

wobei F die nach innen gerichtete Drahtkraft ist. Damit gilt

$$F = mr [\omega^2 + \Omega^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

Für den außen und den innen liegenden Körper gilt $\cos^2 \theta = 1$:

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2).$$

Die unterschiedliche Anziehung durch die Erde wirkt darauf hin, diese Körper von P zu entfernen, und erhöht damit die erforderliche Zugkraft.

Für die beiden quer dazu liegenden Körper gilt $\cos^2 \theta = 0$:

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Hier zeigt die Gezeitenkraft zu P und liefert einen Teil der Zentripetalkraft.

Folglich gilt

$$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 3mr\Omega^2 = \frac{3Kmr}{R^3}.$$

Der kleine Unterschied zwischen dem erdnäheren und dem erdferneren Körper liegt jenseits dieser Näherung erster Ordnung.

Mit den angegebenen Daten ergibt sich

$$R = 6.878 \times 10^6 \text{ m}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3.983 \times 10^{14}}{(6.878 \times 10^6)^3}} = 1.1064 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1},$$

und

$$|\omega| = \frac{10(2\pi)}{3600} = 1.74533 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}.$$

Die beiden charakteristischen Kraftbeträge sind

$$mr\omega^2 = 3.04617 \times 10^4 \text{ N}, \quad mr\Omega^2 = 122.412 \text{ N}.$$

Daher gilt

$$F_{\max} \simeq 3.07066 \times 10^4 \text{ N}, \quad F_{\min} \simeq 3.03393 \times 10^4 \text{ N},$$

woraus sich die gerundeten Antworten 30.7 kN und 30.3 kN ergeben.

Die Drehrichtung beeinflusst diese Kräfte nicht, da sie von ω^2 abhängen.

Aus $F_{\min} \geq 0$ folgt eine physikalische Einschränkung:

$$|\omega| \geq \Omega.$$

Für $|\omega| < \Omega$ wäre in der Querstellung eine radiale Druckkraft erforderlich. Ein biegsamer Draht kann diese nicht ausüben, sodass die angenommene starre Rotation nicht über einen vollständigen Zyklus aufrechterhalten werden kann.

2) Nettoleistung einer Maschine

Der Hub beträgt

$$\Delta r = \epsilon r = 1000 \text{ m}.$$

In erster Ordnung in diesem Hub sind die während eines Einziehvorgangs zugeführte und die während des folgenden Herauslassens zurückgewonnene Arbeit

$$W_{\text{in}} \simeq F_{\max} \Delta r, \quad W_{\text{out}} \simeq F_{\min} \Delta r.$$

Die durch einen Zyklus aus Einziehen und Herauslassen zugeführte Arbeit beträgt somit

$$\Delta W = (F_{\max} - F_{\min}) \Delta r = 3\epsilon mr^2 \Omega^2.$$

Die Zentrifugalbeiträge heben sich in dieser Ordnung auf. Numerisch ergibt sich

$$\Delta W \simeq 3.67236 \times 10^5 \text{ J}.$$

Die Verbindungslinie zwischen Erde und Satellit rotiert relativ zu den Sternen mit Ω . Daher ändert sich die Orientierung des Drahtes relativ zu dieser Linie mit

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega.$$

Jeder Draht durchläuft **zwei Maxima und zwei Minima pro relativer Umdrehung**. Die Periode einer relativen Umdrehung beträgt

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|},$$

sodass die Nettoarbeit einer Maschine während dieser Periode $2\Delta W$ beträgt. Damit gilt

$$\overline{P}_1 = \frac{2\Delta W}{T_{\text{rel}}} = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

Für prograde Rotation, $\omega = |\omega|$, gilt:

$$T_{\text{rel}} = 384.37 \text{ s}, \quad \overline{P}_1 = \frac{2(3.67236 \times 10^5)}{384.37} \simeq \boxed{1.91 \text{ kW}}.$$

Für retrograde Rotation, $\omega = -|\omega|$, gilt:

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega| + \Omega} = 338.54 \text{ s},$$

$$\overline{P}_1 \simeq \boxed{2.17 \text{ kW}}.$$

Bei $\omega = \Omega$ bleibt die Orientierung relativ zur Erde fest. Die Maxima und Minima der Zugkraft werden nicht wiederholt durchlaufen, sodass die dauerhaft erzielbare mittlere Leistung null ist.

3) Änderungen der Bewegung des Satelliten

Wir bezeichnen die Gesamtmasse des Satelliten mit $M = 4m$. Mit der berücksichtigten Genauigkeit sind seine Bahngeschwindigkeit, sein Drehimpuls, seine mechanische Energie und seine gravitative potenzielle Energie gegeben durch

$$v = \sqrt{\frac{K}{R}},$$

$$L = M\sqrt{KR} + I\omega,$$

$$E = -\frac{KM}{2R} + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad U = -\frac{KM}{R}.$$

Jede Gravitationskraft zeigt zum Erdmittelpunkt und übt daher bezüglich dieses Punktes kein Drehmoment aus. Die Maschinen üben innere Kräfte aus. Unter Vernachlässigung des Strahlungsdrucks gilt somit

$$\boxed{\dot{L} = 0}.$$

Durch Ableiten ergibt sich

$$\frac{M}{2} \sqrt{\frac{K}{R}} \dot{R} + I\dot{\omega} = 0,$$

oder

$$\boxed{\dot{R} = -\frac{2I}{MR\Omega} \dot{\omega} = -\frac{2r^2}{R\Omega} \dot{\omega}}.$$

Eine Zunahme des vorzeichenbehafteten Eigendrehimpulses verringert daher den Bahnradius.

Die vier Maschinen führen insgesamt die mechanische Leistung $P_{\text{tot}} = 4\overline{P}_1$ zu. Ableiten der Energie und Einsetzen der Drehimpulserhaltung liefert

$$P_{\text{tot}} = \frac{KM}{2R^2} \dot{R} + I\omega\dot{\omega} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

Somit gilt

$$\boxed{P_{\text{tot}} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}}.$$

Da die laufenden Maschinen eine positive Nettoleistung zuführen, gilt

$$\text{sgn}(\dot{\omega}) = \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

Explizit lauten die über einen Zyklus gemittelten Änderungsraten

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{3\epsilon\Omega^2}{\pi} \text{sgn}(\omega - \Omega)}$$

und

$$\dot{R} = -\frac{6\epsilon r^2 \Omega}{\pi R} \operatorname{sgn}(\omega - \Omega).$$

Diese Beziehungen begründen jeden Eintrag in der Antworttabelle:

- **Schnellere prograde Rotation, $\omega > \Omega$:** Die Eigenrotationswinkelgeschwindigkeit nimmt zu, die Umlaufbahn schrumpft, die Bahngeschwindigkeit nimmt zu und die gravitative potenzielle Energie nimmt ab.
- **Retrograde Rotation, $\omega < 0$:** Die vorzeichenbehaftete Eigenrotationswinkelgeschwindigkeit nimmt ab, sodass ihr retrograder Betrag zunimmt. Die Umlaufbahn weitet sich aus, die Bahngeschwindigkeit nimmt ab und die gravitative potenzielle Energie nimmt zu.
- **Formal, $0 < \omega < \Omega$:** Die prograde Eigenrotation wird langsamer, während sich die Umlaufbahn ausweitete. Ein fortgesetzter Betrieb würde die Eigenrotation umkehren. Für dieses Intervall gilt die in Teil (1) gefundene Einschränkung durch die Biegsamkeit der Drähte.
- **Synchrone Rotation, $\omega = \Omega$:** Es gibt keine wiederholte Betätigung und daher keine durch die Maschinen verursachte säkulare Änderung.

Insbesondere folgen die Vorzeichen der Änderungen der Bahngeschwindigkeit und der potenziellen Energie unmittelbar aus

$$\dot{v} = -\frac{v}{2R} \dot{R}, \quad \dot{U} = \frac{KM}{R^2} \dot{R}.$$

Wird die Winkelgeschwindigkeit in der entsprechenden Tabellenzeile als vorzeichenloser Betrag aufgefasst, gilt: $|\omega|$ nimmt sowohl bei schnellerer prograder als auch bei retrograder Rotation zu; im formalen Fall einer langsameren prograden Rotation nimmt dieser Betrag ab, bis sich die Eigenrotation umkehrt.

Möglichkeit, höhere und beliebig hohe Umlaufbahnen zu erreichen

Für einen hinreichend schnell gegen die Umlaufrichtung rotierenden Satelliten gilt $\omega < -\Omega$, sodass seine Drähte gespannt bleiben und $\dot{R} > 0$ ist. Er kann daher eine höhere Umlaufbahn erreichen.

Die Drehimpulserhaltung setzt dem Radius keine endliche obere Grenze. Zwischen dem Anfangszustand und einer späteren Kreisbahn gilt

$$M\sqrt{KR} + I\omega = M\sqrt{KR_0} + I\omega_0.$$

Da $I/M = r^2$, gilt

$$\omega(R) = \omega_0 - \frac{\sqrt{K}}{r^2} (\sqrt{R} - \sqrt{R_0}).$$

Mit wachsendem R wird der zunehmend positive Bahndrehimpuls durch einen zunehmend negativen Eigendrehimpuls ausgeglichen. Die mit Sonnenenergie betriebenen Maschinen liefern die erforderliche Energie.

Die Aufstiegsrate wird immer kleiner. Auf dem aufsteigenden Zweig gilt

$$\dot{R} = \frac{6\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} R^{-5/2},$$

Die Integration ergibt

$$R(t)^{7/2} = R_0^{7/2} + \frac{21\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} t.$$

In diesem idealen Modell wird jeder endliche Zielradius nach endlicher Zeit erreicht, doch $R \rightarrow \infty$ erfordert $t \rightarrow \infty$. Außerdem wächst die erforderliche Eigenrotationsenergie unbegrenzt:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 \sim \frac{2mK}{r^2} R \quad (R \rightarrow \infty).$$

Somit sind **unter den angegebenen Idealisierungen beliebig hohe endliche Umlaufbahnen möglich**, während das Entweichen in unendliche Entfernung nur einen asymptotischen Grenzfall dieses Pumpvorgangs auf Kreisbahnen darstellt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Die Longitudinalbewegung eines linearen Moleküls

In dieser Aufgabe untersuchen Sie die Longitudinalbewegung eines linearen Moleküls, d. h. die Bewegung entlang der Molekülachse. Die Rotationsbewegung und die Biegung des Moleküls werden nicht berücksichtigt. Es wird angenommen, dass das Molekül aus N Atomen mit den Massen $m_1, m_2, \dots, m_N$ besteht. Jedes Atom sei durch eine chemische Bindung mit seinen Nachbarn verbunden. Jede Bindung wird durch eine masselose Feder angenähert, die dem Hookeschen Gesetz gehorcht; die Federkonstanten sind $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. Das Molekül ist in Abb. 1 dargestellt.

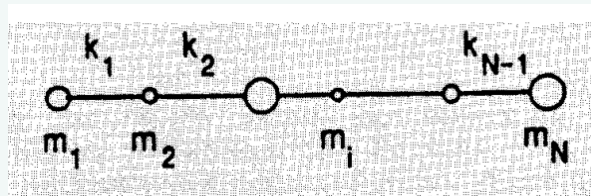


Abb. 1. Ein lineares Molekül mit N Atomen.

Verwenden Sie bei der Lösung dieser Aufgabe die folgenden Tatsachen: Die longitudinale Schwingungsbewegung eines linearen Moleküls besteht aus einer Überlagerung einzelner Schwingungsbewegungen, die als Normalschwingungen oder Normalmoden bezeichnet werden. In einer Normalmode führen alle Atome harmonische Schwingungen mit derselben Frequenz aus und durchlaufen ihre Gleichgewichtslagen gleichzeitig.

Fragen

1) Sei x_i die Auslenkung des Atoms i aus seiner Gleichgewichtslage. Drücken Sie die auf jedes Atom wirkende Kraft F_i als Funktion der Auslenkungen $x_1, x_2, \dots, x_N$ und der Federkonstanten $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ aus. Welche Beziehung besteht zwischen den Kräften $F_1, F_2, \dots, F_N$? Leiten Sie mithilfe dieser Beziehung eine Beziehung zwischen den Auslenkungen $x_1, x_2, \dots, x_N$ her und geben Sie eine physikalische Deutung dieser Beziehung an.

2) Untersuchen Sie die Bewegung eines zweiatomigen Moleküls AB (Abb. 2). Die Federkonstante hat den Wert k . Leiten Sie einen Ausdruck für die auf die Atome A und B wirkenden Kräfte her. Bestimmen Sie die möglichen Bewegungsarten des Moleküls. Bestimmen Sie die zugehörigen

Schwingungsfrequenzen und deuten Sie das Ergebnis. Wie ist es insbesondere möglich, dass die Atome mit derselben Frequenz schwingen, obwohl ihre Massen unterschiedlich sind?

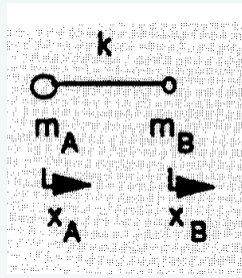


Abb. 2. Das zweiatomige Molekül AB

3) Untersuchen Sie die Bewegung des dreiatomigen Moleküls BA_2 (Abb. 3)

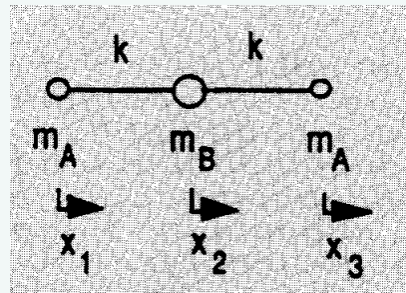


Abb. 3. Das dreiatomige Molekül BA_2 .

Drücken Sie die resultierende Kraft auf jedes Atom als Funktion ausschließlich seiner eigenen Auslenkung aus. Leiten Sie die möglichen Bewegungen des Moleküls und die zugehörigen Schwingungsfrequenzen ab.

4) Die Frequenzen der beiden longitudinalen Schwingungsmoden des CO_2 -Moleküls betragen 3.998×10^{13} Hz bzw. 7.042×10^{13} Hz. Bestimmen Sie einen Zahlenwert für die Federkonstante der CO-Bindung.

Wie gut beschreibt Ihrer Meinung nach diese Näherung für die Bindungsstruktur des Moleküls die Schwingungsbewegung des realen Moleküls?

Die Atommasse des Kohlenstoffatoms = 12 amu und die des Sauerstoffatoms = 16 amu. Die atomare Masseneinheit = 1.660×10^{-27} kg.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Die Kräfte lauten

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}). \end{aligned}$$

Sie erfüllen $\sum_i F_i = 0$, daher gilt

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig. Für innere Schwingungen, die in seinem Ruhesystem gemessen werden, gilt

$$\sum_i m_i x_i = 0.$$

2. Für AB gilt

$$F_A = k(x_B - x_A), \quad F_B = k(x_A - x_B).$$

Es gibt eine starre Translation mit der Frequenz null und eine innere Schwingungsmode:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

Bei dieser Schwingung gilt $m_A x_A = -m_B x_B$: Die Atome bewegen sich in entgegengesetzte Richtungen, wobei ihre Amplituden umgekehrt proportional zu ihren Massen sind.

3. Für BA_2 ergeben sich die folgenden Normalmoden:

Bewegung	Auslenkungsverhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$	Frequenz
Starre Translation	1 : 1 : 1	0
Symmetrische Streckschwingung	1 : 0 : -1	$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}$
Asymmetrische Streckschwingung	$1 : -\frac{2m_A}{m_B} : 1$	$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$

Bei der symmetrischen Streckschwingung gilt

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

Bei der asymmetrischen Streckschwingung gilt

$$\begin{aligned} F_1 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_1, \\ F_2 &= -k \left(2 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_2, \\ F_3 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Bewegung ist eine Überlagerung der beiden Schwingungen und einer gleichförmigen Translation.

4. Aus den beiden gemessenen Frequenzen erhält man jeweils

$$k_s = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}, \quad k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Ein repräsentativer Näherungswert für die Bindungssteifigkeit ist somit $k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$. Kein einzelner Wert von k gibt beide Frequenzen exakt wieder: Das vorhergesagte Frequenzverhältnis beträgt 1.915, während das beobachtete Verhältnis 1.761 beträgt. Das Modell liefert eine brauchbare Näherung mit einer Abweichung von etwa 9% bei diesem Verhältnis.

Lösung

1) Kräfte und Schwerpunkt

Wählen wir für jede Auslenkung dieselbe positive Richtung entlang der Molekülachse. Die Längenänderung der Feder, die die Atome i und $i + 1$ verbindet, ist

$$\Delta \ell_i = x_{i+1} - x_i.$$

Die potenzielle Energie der idealen Hookeschen Federn beträgt daher

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Mit $F_i = -\partial U / \partial x_i$ erhält man

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

und

$$F_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}).$$

Jede Feder übt an ihren beiden Enden gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte aus. Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0.$$

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt dann

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i x_i \right) = 0,$$

also

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

Mit der Bezeichnung $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ ist die Verschiebung des Schwerpunkts

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{\text{tot}}}.$$

Der Schwerpunkt hat somit eine konstante Geschwindigkeit, wie es für ein isoliertes System ohne äußere Kraft zu erwarten ist.

Für eine Normalmode mit einer von null verschiedenen Frequenz gilt

$$x_i = a_i \cos(\omega t + \phi).$$

Da $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$, gilt

$$0 = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\omega^2 \sum_i m_i x_i.$$

Daher folgt

$$\boxed{\sum_i m_i x_i = 0 \quad (\omega \neq 0).}$$

Bei einer inneren Schwingung bleibt der Schwerpunkt in Ruhe. Eine gleichförmige Translation kann unabhängig davon überlagert werden.

2) Das zweiatomige Molekül AB

Die Federdehnung beträgt $x_B - x_A$, also gilt

$$m_A \ddot{x}_A = k(x_B - x_A), \quad m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A).$$

Wir führen die Verschiebung des Schwerpunkts und die relative Auslenkung ein:

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad q = x_B - x_A.$$

Die Addition der Bewegungsgleichungen ergibt

$$\ddot{X} = 0.$$

Die Subtraktion der Beschleunigungen ergibt

$$\ddot{q} = -k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) q.$$

Damit gilt

$$X = X_0 + Vt, \quad q = Q \cos(\omega t + \phi),$$

wobei

$$\boxed{\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

Die vollständige Bewegung lautet

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= X_0 + Vt - \frac{m_B}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi), \\ x_B &= X_0 + Vt + \frac{m_A}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}}$$

Es gibt zwei unabhängige Bewegungsarten:

- **Starre Translation:** $q = 0$, also $x_A = x_B = X_0 + Vt$. Die Feder ist unverformt, und beide Kräfte verschwinden. Dies ist die Mode mit der Frequenz null.
- **Innere Schwingung:** Im Ruhesystem des Schwerpunkts gilt

$$m_A x_A + m_B x_B = 0.$$

Die Atome schwingen gegenphasig mit der Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Um zu verstehen, warum die Frequenzen trotz unterschiedlicher Massen gleich sind, eliminieren wir jeweils die Auslenkung des anderen Atoms:

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B} x_A, \quad x_A = -\frac{m_B}{m_A} x_B.$$

Dann gilt

$$F_A = -k \left(1 + \frac{m_A}{m_B} \right) x_A, \quad F_B = -k \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_B.$$

Dividiert man jeden Rückstellkraftkoeffizienten durch die zugehörige Masse, erhält man denselben Wert:

$$\frac{k(1 + m_A/m_B)}{m_A} = \frac{k(1 + m_B/m_A)}{m_B} = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right).$$

Beide Atome haben somit dieselbe Kreisfrequenz. Ihren unterschiedlichen Massen entsprechen unterschiedliche Amplituden:

$$\frac{|x_A|_{\max}}{|x_B|_{\max}} = \frac{m_B}{m_A}.$$

Das schwerere Atom hat sowohl die kleinere Auslenkungsamplitude als auch die kleinere Beschleunigungsamplitude.

3) Das dreiatomige Molekül BA_2

Wir schreiben $m = m_A$ und $M = m_B$. Das Hookesche Gesetz liefert

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ M\ddot{x}_2 &= k(x_1 + x_3 - 2x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Bei einer starren Translation, $x_1 = x_2 = x_3 = X_0 + Vt$, verschwinden alle drei Kräfte.

Für die innere Schwingung betrachten wir das Ruhesystem des Schwerpunkts:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

Wir definieren den Mittelwert und die halbe Differenz der Auslenkungen der äußeren Atome:

$$s = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad d = \frac{x_1 - x_3}{2}.$$

Dann gilt

$$x_1 = s + d, \quad x_3 = s - d, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Addition und Subtraktion der Gleichungen für die äußeren Atome ergeben

$$m\ddot{s} = k(x_2 - s) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)s,$$

$$m\ddot{d} = -kd.$$

Dies sind zwei unabhängige harmonische Oszillatoren; damit sind alle inneren Normalmoden bestimmt.

Symmetrische Streckschwingungsmode. Wir setzen $s = 0$. Dann gilt

$$x_2 = 0, \quad x_1 = d, \quad x_3 = -d.$$

Das mittlere Atom bleibt in Ruhe, während sich die äußeren Atome mit gleichen Amplituden in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Beide Bindungen verlängern und verkürzen sich jeweils gemeinsam.

Die Kräfte, jeweils durch die eigene Auslenkung des Atoms ausgedrückt, lauten

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

Daher gilt

$$\boxed{\omega_s^2 = \frac{k}{m_A}, \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}.}$$

Die Masse des mittleren Atoms geht nicht in diese Frequenz ein, da sich die beiden auf dieses Atom wirkenden Federkräfte während der gesamten Bewegung aufheben.

Asymmetrische Streckschwingungsmode. Wir setzen $d = 0$. Dann gilt

$$x_1 = x_3 = s, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Die äußeren Atome bewegen sich gemeinsam, und das mittlere Atom bewegt sich entgegengesetzt. Eine Bindung verlängert sich, während sich die andere verkürzt.

Für die beiden äußeren Atome gilt jeweils

$$F_1 = k(x_2 - x_1) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_1,$$

$$F_3 = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_3.$$

Für das mittlere Atom verwenden wir $x_1 + x_3 = -(M/m)x_2$:

$$F_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) = -k\left(2 + \frac{M}{m}\right)x_2.$$

Alle drei Gleichungen liefern

$$\boxed{\omega_a^2 = k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B}\right), \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B}\right)}.$$

Diese Kraftgesetze, die jeweils nur eine Auslenkung enthalten, gelten für die angegebenen Normalmoden. Eine allgemeine Überlagerung gehorcht den ursprünglichen gekoppelten Kraftgleichungen.

Die vollständige Bewegung lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (X_0 + Vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/m_B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt somit zwei longitudinale Schwingungsmoden und eine Translationsmode.

4) Numerischer Wert der Bindungssteifigkeit und Beurteilung des Modells

Bei CO_2 sind die äußeren Atome Sauerstoffatome und das mittlere Atom ein Kohlenstoffatom:

$$m_A = m_O = 16(1.660 \times 10^{-27}) = 2.656 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_B = m_C = 12(1.660 \times 10^{-27}) = 1.992 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

Da $f_a > f_s$, ordnen wir zu:

$$f_s = 3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}, \quad f_a = 7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

Aus der symmetrischen Mode folgt

$$k_s = m_O(2\pi f_s)^2,$$

also

$$k_s = (2.656 \times 10^{-26}) [2\pi(3.998 \times 10^{13})]^2 = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Aus der asymmetrischen Mode folgt

$$k_a = \frac{(2\pi f_a)^2}{1/m_O + 2/m_C},$$

also

$$k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Diese Abschätzungen ergeben eine Bindungssteifigkeit in der Nähe von

$$k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Ihr Unterschied zeigt, dass das Modell nicht beide gemessenen Frequenzen mit einer einzigen Federkonstante wiedergeben kann.

Eine direkte, von k unabhängige Konsistenzprüfung bietet das Frequenzverhältnis. Das Modell sagt voraus:

$$\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} = \sqrt{1 + \frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.915.$$

Das gemessene Verhältnis beträgt

$$\left(\frac{f_a}{f_s}\right)_{\text{measured}} = \frac{7.042}{3.998} = 1.761.$$

Passt man beispielsweise das Modell an die niedrigere Frequenz an, so sagt es voraus:

$$f_a = 1.91485(3.998 \times 10^{13}) = 7.656 \times 10^{13} \text{ Hz},$$

was um 8.71% über der gemessenen höheren Frequenz liegt.

Das Modell idealer Federn liefert somit eine brauchbare näherungsweise Beschreibung der beiden Streckschwingungen und der Größenordnung ihrer Frequenzen. Seine quantitative Genauigkeit ist begrenzt: Die tatsächlichen molekularen Rückstellkräfte können eine Kopplung zwischen den beiden Bindungsdehnungen sowie Abweichungen vom Hookeschen Gesetz aufweisen, die dieses Modell nicht berücksichtigt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Ein Satellit im Sonnenlicht

In dieser Aufgabe berechnen Sie die Temperatur eines Satelliten im Weltraum. Der Satellit wird als Kugel mit einem Durchmesser von 1 m angenommen. Im gesamten Satelliten herrscht eine einheitliche Temperatur. Die gesamte Kugeloberfläche des Satelliten ist mit derselben Beschichtung versehen. Der Satellit befindet sich in der Nähe der Erde, jedoch nicht im Erdschatten.

Die Oberflächentemperatur der Sonne (ihre Oberflächentemperatur als schwarzer Körper) beträgt $T_{\text{sun}} = 6000 \text{ K}$, und ihr Radius beträgt $6.96 \times 10^8 \text{ m}$. Der Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. Das Sonnenlicht erwärmt den Satelliten auf eine Temperatur, bei der die vom Satelliten als schwarzer Körper abgestrahlte Leistung gleich der aus dem Sonnenlicht absorbierten Leistung ist. Die von einem schwarzen Körper pro Flächeneinheit abgestrahlte Leistung ist durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz $P = \sigma T^4$ gegeben, wobei σ die universelle Konstante $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ist. In erster Näherung können Sie annehmen, dass sowohl die Sonne als auch der Satellit sämtliche auf sie einfallende elektromagnetische Strahlung absorbieren.

- 1) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Temperatur T des Satelliten. Welchen Zahlenwert hat diese Temperatur?
- 2) Das Spektrum der Schwarzkörperstrahlung $u(T, f)$ eines Körpers bei der Temperatur T gehorcht dem Planckschen Strahlungsgesetz

$$u(T, f) df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

wobei $\eta = hf/kT$ gilt und $u(T, f)df$ die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung in einem Frequenzintervall $[f, f + df]$ ist. In dieser Gleichung ist $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ die Plancksche Konstante, $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ die Boltzmann-Konstante und $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ die Lichtgeschwindigkeit.

Die Integration des Schwarzkörperspektrums über alle Frequenzen f und Abstrahlrichtungen ergibt die gesamte abgestrahlte Leistung pro Flächeneinheit $P = \sigma T^4$, wie sie durch das oben angegebene Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben wird.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

Die Abbildung zeigt das normierte Spektrum

$$\frac{c^3 h^3}{8\pi k^4} \frac{u(T, f)}{T^4}$$

als Funktion von η .

Bei vielen Anwendungen muss der Satellit möglichst kühl gehalten werden. Zur Kühlung des Satelliten verwenden Ingenieure eine reflektierende Beschichtung, die Licht oberhalb einer Grenzfrequenz reflektiert, das Entweichen von Wärmestrahlung bei niedrigeren Frequenzen jedoch nicht verhindert. Nehmen Sie an, dass diese (scharfe) Grenzfrequenz $hf/k = 1200 \text{ K}$ entspricht.

Wie hoch ist die neue Gleichgewichtstemperatur des Satelliten? Eine exakte Antwort ist nicht erforderlich. Führen Sie daher keine aufwendigen Integrationen durch, sondern verwenden Sie bei Bedarf Näherungen. Das Integral über den gesamten Bereich lautet

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

und das Maximum von $\eta^3/(e^\eta - 1)$ liegt bei $\eta = 2.82$. Für kleine η können Sie die Exponentialfunktion in der Form $e^\eta \simeq 1 + \eta$ entwickeln.

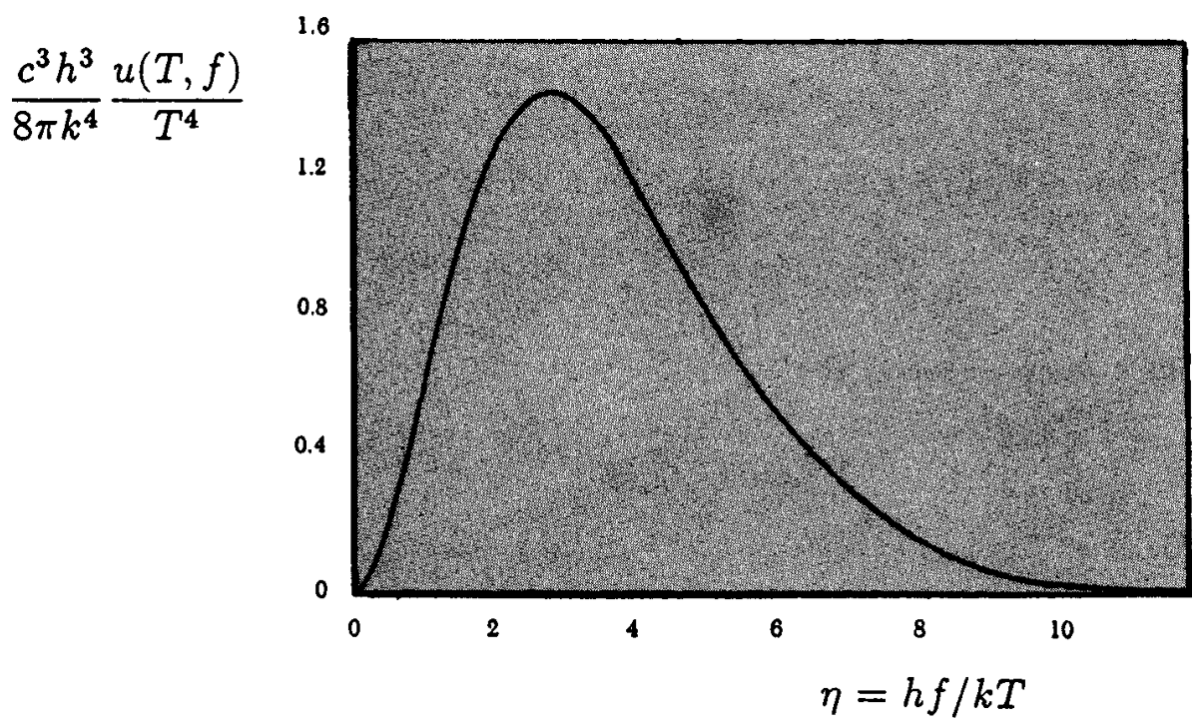
3) Betrachten wir nun einen realen Satelliten mit ausladenden Solarmodulen, die elektrische Energie erzeugen, so wirkt die in der Elektronik im Inneren des Satelliten entstehende Verlustwärme als zusätzliche Wärmequelle. Wie hoch ist die Gleichgewichtstemperatur des Satelliten im obigen Fall 2, wenn die Leistung der inneren Wärmequelle 1 kW beträgt?

4) Ein Hersteller wirbt für einen Spezialanstrich folgendermaßen:

„Dieser Anstrich reflektiert mehr als 90% der gesamten einfallenden Strahlung (sowohl sichtbares Licht als auch Infrarotstrahlung), strahlt jedoch bei allen Frequenzen (sichtbares Licht und Infrarotstrahlung) wie ein schwarzer Körper ab und führt dadurch viel Wärme vom Satelliten ab. Somit trägt der Anstrich dazu bei, den Satelliten möglichst kühl zu halten.“

Kann es einen solchen Anstrich geben? Warum beziehungsweise warum nicht?

5) Welche Eigenschaften sollte eine Beschichtung haben, um die Temperatur eines kugelförmigen Körpers, der dem hier betrachteten Satelliten ähnelt, über die in 1) berechnete Temperatur zu erhöhen?



Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Mit dem Sonnenradius $R_{\odot}$ und dem Abstand D zwischen Sonne und Satellit gilt

$$T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}} \simeq 289 \text{ K.}$$

2. Mit der angegebenen Näherung für kleine η ergibt sich

$$T_2 \simeq T_1 \left[\frac{5}{\pi^4} \left(\frac{1200 \text{ K}}{T_{\text{sun}}} \right)^3 \right]^{1/4} \simeq 41 \text{ K.}$$

3. Unter Berücksichtigung der Unterdrückung der hochfrequenten Wärmeabstrahlung durch die Beschichtung ergibt sich $T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}$
 \quad \text{(ungefähr 317 K).}

4. **Nein.** Nach dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz müssen Absorptionsgrad und Emissionsgrad bei jeder Frequenz gleich sein. Eine Oberfläche, die mehr als 90% reflektiert, kann bei diesen Frequenzen nicht gleichzeitig wie ein schwarzer Körper emittieren.
5. Die Beschichtung sollte **Sonnenstrahlung stark absorbieren und thermische Infrarotstrahlung schwach emittieren**: hoher Absorptionsgrad bei den Frequenzen der Sonnenstrahlung und hoher Reflexionsgrad bei den niedrigeren Frequenzen der Wärmestrahlung des Satelliten.

Lösung

Der Radius des Satelliten sei $a = 0.50 \text{ m}$, der Sonnenradius sei $R_\odot$ und der Abstand zwischen Sonne und Satellit sei D . Wir verwenden das angegebene Strahlungsbilanzmodell und vernachlässigen die Strahlung der Erde sowie andere Formen des Wärmeaustauschs.

1) Satellit als schwarzer Körper

Die Leuchtkraft der Sonne beträgt

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_{\text{sun}}^4.$$

Damit beträgt die solare Bestrahlungsstärke am Ort des Satelliten

$$S = \frac{L_\odot}{4\pi D^2} = \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2.$$

Der Satellit fängt Sonnenlicht über seine projizierte Fläche πa^2 auf, während seine gesamte Oberfläche $4\pi a^2$ Strahlung emittiert. Das thermische Gleichgewicht erfordert daher

$$\pi a^2 S = 4\pi a^2 \sigma T_1^4.$$

Somit gilt

$$T_1^4 = \frac{1}{4} T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2, \quad \boxed{T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_\odot}{2D}}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$T_1 = 6000 \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2(1.5 \times 10^{11})}} \text{ K} = \boxed{289 \text{ K}}.$$

Der Radius des Satelliten kürzt sich heraus, da sowohl die absorbierte als auch die emittierte Leistung proportional zu a^2 sind.

2) Satellit mit der frequenzselektiven Beschichtung

Wir setzen

$$\Theta = \frac{hf_c}{k} = 1200 \text{ K},$$

wobei f_c die Grenzfrequenz ist. Der ideal beschichtete Satellit absorbiert und emittiert unterhalb von f_c wie ein schwarzer Körper, während die Reflexion oberhalb von f_c sowohl Absorption als auch Emission unterdrückt. Diese Gleichheit von spektralem Absorptionsgrad und Emissionsgrad ist das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz.

Wir definieren den Anteil der Schwarzkörperstrahlungsleistung unterhalb einer dimensionslosen Grenzfrequenz x durch

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta.$$

Für einen Körper bei der Temperatur T ist die maßgebliche Grenzfrequenz $x = \Theta/T$. Die Gleichgewichtsbedingung lautet daher

$$\pi a^2 \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right) = 4\pi a^2 \sigma T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right).$$

Mit Teil 1 ergibt sich

$$T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2}\right) = T_1^4 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}}\right).$$

Für das Sonnenlicht gilt

$$x_{\odot} = \frac{1200}{6000} = 0.20.$$

Im gesamten kleinen Intervall gilt $e^{\eta} - 1 \simeq \eta$, also

$$F(0.20) \simeq \frac{15}{\pi^4} \int_0^{0.20} \eta^2 d\eta = \frac{5(0.20)^3}{\pi^4} \simeq 4.11 \times 10^{-4}.$$

Somit werden nur etwa 0.041% der einfallenden Sonnenstrahlungsleistung absorbiert.

Wir nehmen zunächst an, dass der abgekühlte Satellit nahezu seine gesamte Wärmestrahlung unterhalb der Grenzfrequenz emittiert, sodass $F(\Theta/T_2) \simeq 1$ gilt. Dann ist

$$T_2 \simeq T_1 [F(0.20)]^{1/4} = 289(4.11 \times 10^{-4})^{1/4} \text{ K},$$

woraus folgt:

$$\boxed{T_2 \simeq 41 \text{ K.}}$$

Diese Annahme ist in sich konsistent: Die Grenzfrequenz des Satelliten beträgt

$$\frac{\Theta}{T_2} \simeq \frac{1200}{41} \simeq 29,$$

und liegt damit weit jenseits des spektralen Maximums bei $\eta = 2.82$. Der ausgeschlossene hochfrequente Ausläufer des thermischen Spektrums ist vernachlässigbar.

3) Hinzufügen einer inneren Wärmequelle mit 1 kW

Die abstrahlende Fläche wird nun ausdrücklich benötigt:

$$A = 4\pi a^2 = \pi \text{ m}^2.$$

Vor dem Aufbringen der Beschichtung betrug die absorbierte Sonnenstrahlungsleistung

$$Q_{\odot,0} = A\sigma T_1^4 \simeq 1.24 \times 10^3 \text{ W}.$$

Mit der Beschichtung beträgt sie

$$Q_{\odot} = Q_{\odot,0} F(0.20) \simeq (1.24 \times 10^3)(4.11 \times 10^{-4}) \simeq 0.51 \text{ W}.$$

Dies ist gegenüber der inneren Wärmequelle $Q_{\text{int}} = 1000 \text{ W}$ vernachlässigbar. Die Bilanz lautet

$$\boxed{A\sigma T_3^4 F\left(\frac{1200 \text{ K}}{T_3}\right) = 1000 \text{ W} + Q_{\odot}.$$

Hier können wir nicht $F = 1$ setzen. Selbst ein ohne spektrale Einschränkung abstrahlender schwarzer Körper müsste die Temperatur

$$\left(\frac{1000 \text{ W}}{A\sigma}\right)^{1/4} \simeq 274 \text{ K},$$

haben, bei der die Grenzfrequenz bereits bei $\eta_c \simeq 4.38$ läge. Ein erheblicher Teil des thermischen Spektrums liegt oberhalb dieser Grenzfrequenz, sodass der beschichtete Satellit heißer werden muss.

Wir können den benötigten Anteil direkt aus der gegebenen Grafik abschätzen. In der Nähe von $\eta_c = 3.8$ beträgt die Fläche unter der Kurve ungefähr

$$\int_0^{3.8} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta \simeq 3.6.$$

Da die Gesamtfläche $\pi^4/15 \simeq 6.49$ beträgt, gilt

$$F(3.8) \simeq \frac{3.6}{6.49} \simeq 0.55.$$

Einsetzen ergibt

$$T_3 \simeq \left[\frac{1000.5 \text{ W}}{(\pi \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4})(3.6/6.49)} \right]^{1/4} \simeq 317 \text{ K}.$$

Die zugehörige Grenzfrequenz beträgt $1200/317 \simeq 3.79$, was die grafische Abschätzung bestätigt. Daher gilt

$$T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}.$$

4) Der beworbene Anstrich

Das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz besagt, dass bei einer gegebenen Frequenz und für einander entsprechende Richtungen gilt:

$$\epsilon_f = \alpha_f,$$

wobei ϵ_f der Emissionsgrad und α_f der Absorptionsgrad ist.

Aus der Energieerhaltung folgt

$$\alpha_f + \rho_f + \tau_f = 1,$$

wobei ρ_f und τ_f der Reflexionsgrad beziehungsweise der Transmissionsgrad sind. Wenn also $\rho_f > 0.90$ gilt, folgt

$$\alpha_f < 0.10 \implies \epsilon_f < 0.10.$$

Die Emission eines schwarzen Körpers würde hingegen $\epsilon_f = 1$ erfordern.

Die behauptete Kombination aus hoher Reflexion und thermischer Emission wie bei einem schwarzen Körper bei denselben Frequenzen ist für einen passiven Anstrich somit unmöglich. Sie würde das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz und das detaillierte thermische Gleichgewicht verletzen.

5) Eine Beschichtung, die die Temperatur erhöht

Die Beschichtung sollte die entgegengesetzte spektrale Selektivität zur Beschichtung in Teil 2 aufweisen:

- Starke Absorption bei den relativ hohen Frequenzen, auf die der größte Teil der Sonnenstrahlung entfällt.
- Schwache Emission und entsprechend starke Reflexion bei den niedrigeren Infrarotfrequenzen, auf die der größte Teil der Wärmestrahlung des Satelliten entfällt.

Es sei $\bar{\alpha}_\odot$ der über das Sonnenspektrum gemittelte Absorptionsgrad und $\bar{\epsilon}_T$ der über das Schwarzkörperspektrum des Satelliten bei der Temperatur T gemittelte Emissionsgrad. Die Bilanz ohne innere Heizung lautet

$$\pi a^2 \bar{\alpha}_{\odot} S = 4\pi a^2 \bar{\epsilon}_T \sigma T^4.$$

Daraus folgt

$$T = T_1 \left(\frac{\bar{\alpha}_{\odot}}{\bar{\epsilon}_T} \right)^{1/4}.$$

Die Gleichgewichtstemperatur übersteigt T_1 , wenn

$$\bar{\alpha}_{\odot} > \bar{\epsilon}_T.$$

Dies ist mit dem Kirchhoffschen Strahlungsgesetz vereinbar, da die beiden Mittelwerte unterschiedliche Frequenzbereiche gewichten. Eine frequenzunabhängige graue Beschichtung hätte denselben Absorptionsgrad und Emissionsgrad und würde die Gleichgewichtstemperatur unverändert lassen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.