

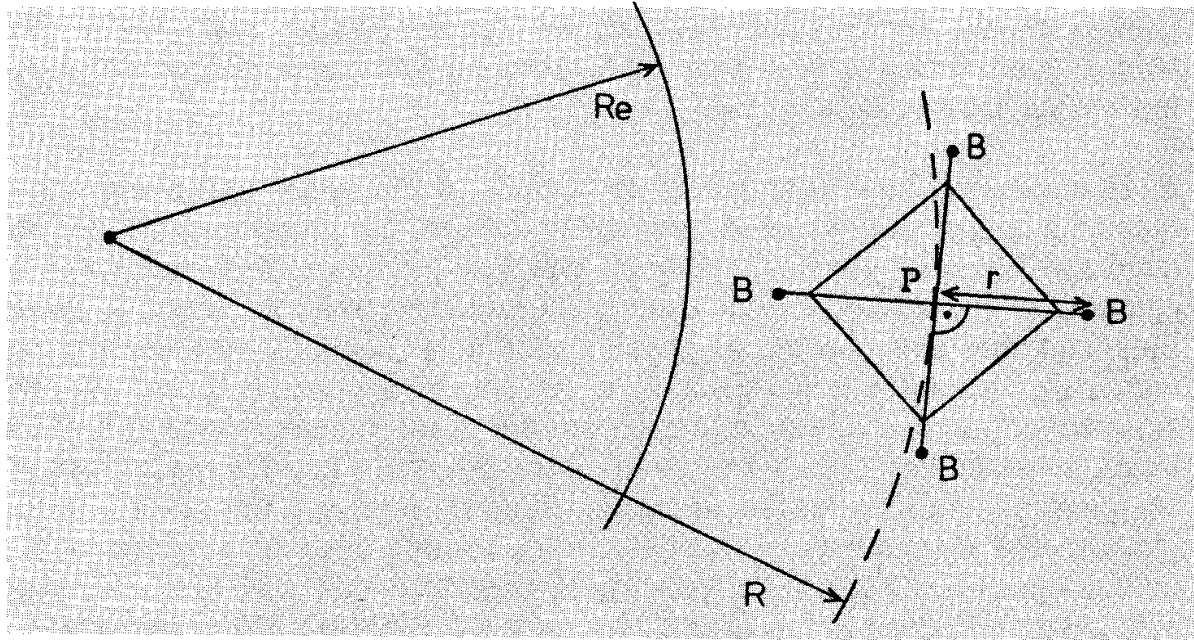
IPhO 1992

المسائل النظرية والحلول · إسبو (هلسنكي)، فنلندا · 3 مسائل نظرية مع حلول كاملة

eulersolve.org/iph/1992/

المسألة 1: قمر صناعي دوّار

يوضح الشكل قمراً صناعياً يدور حول الأرض في مدار دائري تقريباً يقع في المستوى الاستوائي للأرض. يتكون القمر الصناعي من جسم مركزي عديم الكتلة P وأربعة أجسام طرفية صغيرة B . كتلة كل واحد من الأجسام الأربعة B هي m : وهي مثبتة بالجسم P بواسطة أسلاك طويلة رفيعة غير قابلة للاستطالة، طول كل منها r . تقع هذه الأجسام الخمسة جميعها، أي P والأجسام الأربعة B ، في المستوى الاستوائي، ويمكنها الدوران ضمن هذا المستوى. وترتبط الأسلاك الشعاعية الأربعة ببعضها ببعض بأسلاك رفيعة إضافية تحافظ على ثبات الزوايا بين الأسلاك الشعاعية عند 90° .



أُدرجت أسلاك الربط في المنظومة لمنع الحركة الاهتزازية للأجسام B كل على حدة، إذ إن هذه الحركة ستجعل تحليل الحركات بالغ التعقيد. تدور الأجسام B جميعها حول P بالسرعة الزاوية نفسها، وهي ω بالنسبة إلى النجوم الثابتة. وبذلك يتصرف القمر الصناعي كجسم صلب.

حلّ الأسئلة الآتية في الحالة العامة، مع مراعاة جميع الحالات الممكنة، بما فيها اتجاه دوران الأجسام B . واحسب أيضاً قيماً عديدة لبعض الكميات التي تجدها في السؤالين (1) و(2): وقد أُدرجت الكميات المطلوبة والمعطيات العددية اللازمة في نهاية المسألة.

(1) يوضح الرسم القمر الصناعي في الوضع الذي يكون فيه r ، للأسلاك المختلفة، موازياً للمتجه R وفي اتجاهه، أو موازياً له ومعاكساً لاتجاهه، أو عمودياً عليه. (يمتد المتجه r من الجسم P إلى أحد الأجسام B وطوله r ؛ ويمتد المتجه R من مركز كتلة الأرض إلى الجسم P).

حدّد القوة التي يؤثر بها سلك شعاعي في أحد الأجسام B في كل واحد من هذه الأوضاع الأربعة. تقابل هذه الأوضاع تقريباً القيمتين العظمى والصغرى للقوة.

(2) توجد داخل الأجسام الأربعة B أربع آلات متماثلة تعمل بالطاقة الشمسية، وهي متصلة بالأسلاك الشعاعية. تسحب كل آلة السلك إلى الداخل، نحو B، لمدة قصيرة كلما اقتربت القوة في السلك من قيمتها العظمى (كما ورد في السؤال السابق)، ثم تطلق الطول نفسه من السلك مجدداً عندما يكون الشد عند قيمته الصغرى. يبلغ طول الجزء الذي يُسحب من السلك ويُطلق 1% من متوسط طول السلك الشعاعي. ولا يتغير متوسط الطول مع الزمن.

ما صافي القدرة التي تحولها آلة واحدة، محسوباً كمتوسط على دورة واحدة للقمر الصناعي؟

يُعرف صافي القدرة بأنه $\frac{W_1 - W_2}{T}$ ، حيث W_1 هو الشغل الذي تبذله الآلة على السلك عند سحبه إلى الداخل، و W_2 هو الشغل الذي يبذله السلك على الآلة عند إطلاقه إلى الخارج، و T هو زمن الدورة.

(3) ناقش التغيرات في حركة القمر الصناعي التي يسببها عمل الآلات. وعلى وجه الخصوص، حلّل أي تغيرات قد تحدث في كل حالة من الحالات الواردة في الجدول على الصفحة التالية.

املاً الجدول بنتائجك وتعليقاتك، ولا تنس تسليمه.

المعطيات:

تُطلب إجابات عديدة في الحالة الآتية:

يُعطى نصف قطر مدار الجسم المركزي بالعلاقة $R = R_E + 500 \text{ km}$.

متوسط طول الأسلاك الشعاعية هو $r = 100 \text{ km}$.

ومن ثم فإن قطر منظومة القمر الصناعي هو 200 km .

كتلة كل من الأجسام B هي $m = 1000 \text{ kg}$.

في البداية تدور الأجسام الأربعة B، بالنسبة إلى النجوم، حول الجسم المركزي P بمعدل 10 دورات/ساعة.

كتل الأسلاك مهمة، والجسم المركزي P عديم الكتلة.

إرشادات:

راعِ كلا اتجاهي الدوران ω .

لا يُتوقع الحصول على حلول دقيقة تماماً. وتُقبل تماماً نتائج بدقة 5%.

أهمّل تأثير جاذبية القمر والشمس.

معطيات مفيدة:

الكمية	القيمة
كتلة الأرض	$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
ثابت الجذب العام	$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
نصف قطر الأرض عند خط الاستواء	$R_E = 6378 \text{ km}$
ارمز إلى حاصل الضرب $M_E G$ بالرمز K .	$K = 3.983 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

رمز البلد:

جدول الإجابة

املاً هذا الجدول بوصفه جزءاً من إجابتك، اكتب مساويات أو متباينات و/أو تفسيرات قصيرة حيث يلزم.

الكمية المبينة أدناه ...	تزداد إذا ...	تنقص إذا ...	تبقى ثابتة إذا ...	تبقى ثابتة في جميع الحالات.
السرعة المدارية للقمر الصناعي				نعم ☐ لا ☐
نصف قطر R مدار القمر الصناعي				نعم ☐ لا ☐
السرعة الزاوية ω للقمر الصناعي				نعم ☐ لا ☐

الكمية المبينة أدناه ...	تزداد إذا ...	تنقص إذا ...	تبقى ثابتة إذا ...	تبقى ثابتة في جميع الحالات.
طاقة وضع الجاذبية للقمر الصناعي				نعم ☐ لا ☐

هل يمكن أن يصل القمر الصناعي إلى مدار أعلى نتيجة الشغل الذي تبذله الآلات؟

نعم ☐

لا ☐

هل يمكن أن يصل القمر الصناعي إلى مدار ذي ارتفاع كبير كيفما نشاء، بحيث يغادر عملياً نطاق تأثير جاذبية الأرض؟ ولماذا؟

الإجابة:

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اعتبر اتجاه الحركة المدارية موجباً، وعرف

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{R^3}} > 0, \quad \epsilon = \frac{\Delta r}{r} = 0.01.$$

السرعة الزاوية للدوران الذاتي ω كمية ذات إشارة: تكون موجبة للدوران في اتجاه الحركة المدارية، وسالبة للدوران المعاكس لها.

1. إلى الرتبة الرائدة في r/R ، تكون مقادير قوى الأسلاك، المتجهة نحو P ، هي

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2)$$

و

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

لكل من اتجاهي الدوران الذاتي المحددين،

$$F_{\max} \simeq 30.7 \text{ kN}, \quad F_{\min} \simeq 30.3 \text{ kN}, \quad F_{\max} - F_{\min} \simeq 367 \text{ N}.$$

تتطلب دورة كاملة بأسلاك مرنة مشدودة أن يكون $|\omega| \geq \Omega$ ، ضمن هذه الدقة.

2. متوسط صافي القدرة التي تقدمها آلة واحدة هو

$$\overline{P}_1 = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

عدياً،

$$\overline{P}_1 = 1.91 \text{ kW} \quad (\text{دوران موافق للحركة المدارية}), \quad \overline{P}_1 = 2.17 \text{ kW} \quad (\text{دوران معاكس للحركة المدارية}).$$

عند الدوران المتزامن، $\omega = \Omega$ ، لا توجد دورة ضخ متكررة، ويكون متوسط القدرة صفراً.

3. الجدول المكتمل لنموذج الجسم الصلب على المدى الطويل هو:

الكمية	تزداد إذا	تنقص إذا	تبقى ثابتة إذا	ثابتة في جميع الحالات؟
مقدار السرعة المدارية v	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	لا
نصف قطر المدار R	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	لا
السرعة الزاوية للدوران الذاتي ذات الإشارة ω	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	لا
طاقة وضع الجاذبية U	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	لا

وبذلك يزداد مقدار سرعة الدوران المعاكس للحركة المدارية. ومن الناحية الشكلية، يتباطأ الدوران الموافق للحركة المدارية الذي يحقق $0 < \omega < \Omega$ ، ثم ينعكس اتجاهه؛ وترد أدناه القيود على إمكان تحقق ذلك باستخدام الأسلاك المرنة في هذا المجال.

مدار أعلى: نعم، على الفرع الصاعد، ولا سيما عند دوران معاكس للحركة المدارية بسرعة كافية.

مدار ذو ارتفاع كبير كيفما نشاء: نعم، ضمن النموذج النيوتوني المثالي. فالزخم الزاوي للدوران الذاتي الذي يصبح أكثر سلبية يعوّض ازدياد الزخم الزاوي المداري. ولا يوجد حد أعلى منتهٍ لنصف القطر، مع أن بلوغ اللانهاية يتطلب زمناً لا نهائياً وطاقة دوران ذاتي غير محدودة.

الحل

نستخدم المعاملين الصغيرين

$$\frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \simeq 0.0145, \quad \epsilon = 0.01.$$

نحتفظ بالحدود الرائدة لقوى تدرج الجاذبية وللشغل في شوط السلك الصغير. ونعامل المدار على أنه دائري خلال كل دورة ضخ، مع تغير نصف قطره ومتوسط سرعة الدوران الذاتي ببطء. متوسط عزم القصور الذاتي هو

$$I \simeq 4mr^2.$$

(1) القوى في الأسلاك الشعاعية الأربعة

ليكن $\mathbf{e}_R$ متجهاً من الأرض نحو P ، ولتكن $\boldsymbol{\rho} = r\mathbf{e}$ محددة موضع جسم طرفي بالنسبة إلى P . يعطي نشر تسارع الجاذبية الأرضية حول P

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \frac{K}{R^3} [3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\rho}].$$

وهذا هو التسارع المدّي.

في الأوضاع الأربعة المحددة، يكون هذا التسارع شعاعياً بالنسبة إلى P ، ضمن الرتبة التي نحتفظ بها. إذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{e}$ و $\mathbf{e}_R$ ، فإن مركبته الشعاعية هي

$$\delta g_r = \Omega^2 r (3 \cos^2 \theta - 1).$$

يحتاج الجسم الطرفي إلى تسارع شعاعي $-\omega^2 r$ بالنسبة إلى P . وباعتبار الاتجاه إلى الخارج من P موجباً، يعطي قانون نيوتن الثاني

$$-m\omega^2 r = m\delta g_r - F,$$

حيث F هي قوة السلك المتجهة إلى الداخل. ومن ثم

$$F = mr [\omega^2 + \Omega^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

بالنسبة إلى الجسمين الواقعين في الاتجاه الخارجي والاتجاه الداخلي، $\cos^2 \theta = 1$:

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2).$$

يميل فرق التجاذب الأرضي إلى إبعاد هذين الجسمين عن P ، مما يزيد الشد المطلوب.

بالنسبة إلى الجسمين الواقعين في الاتجاه العرضي، $\cos^2 \theta = 0$:

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

هنا تتجه القوة المدّيّة نحو P وتوفر جزءاً من القوة الجاذبة المركزية.

وعليه،

$$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 3mr\Omega^2 = \frac{3Kmr}{R^3}.$$

يقع الفرق الصغير بين الجسم الأقرب والجسم الأبعد خارج نطاق هذا التقريب من الرتبة الأولى.

باستخدام المعطيات المقدمة،

$$R = 6.878 \times 10^6 \text{ m}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3.983 \times 10^{14}}{(6.878 \times 10^6)^3}} = 1.1064 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1},$$

و

$$|\omega| = \frac{10(2\pi)}{3600} = 1.74533 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}.$$

مقياسا القوة هما

$$mr\omega^2 = 3.04617 \times 10^4 \text{ N}, \quad mr\Omega^2 = 122.412 \text{ N}.$$

إذن،

$$F_{\max} \simeq 3.07066 \times 10^4 \text{ N}, \quad F_{\min} \simeq 3.03393 \times 10^4 \text{ N},$$

ف نحصل على الإجابتين المقربتين 30.7 kN و 30.3 kN.

لا يؤثر اتجاه الدوران في هذه القوى، لأنها تعتمد على ω^2 .

ينتج قيد فيزيائي من $F_{\min} \geq 0$:

$$|\omega| \geq \Omega.$$

إذا كان $\Omega < |\omega|$ ، فإن الوضع العرضي يتطلب قوة ضغط شعاعية. ولا يستطيع السلك المرن توفيرها، لذا لا يمكن أن يستمر الدوران المفترض كجسم صلب على امتداد دورة كاملة.

(2) صافي قدرة آلة واحدة

طول الشوط هو

$$\Delta r = \epsilon r = 1000 \text{ m}.$$

إلى الرتبة الأولى في طول هذا الشوط، يكون الشغل المبذول خلال شوط واحد إلى الداخل والشغل المسترد خلال الشوط التالي إلى الخارج هما

$$W_{\text{in}} \simeq F_{\max} \Delta r, \quad W_{\text{out}} \simeq F_{\min} \Delta r.$$

ومن ثم تقدم دورة واحدة إلى الداخل ثم إلى الخارج شغلاً مقداره

$$\Delta W = (F_{\max} - F_{\min}) \Delta r = 3\epsilon mr^2 \Omega^2.$$

تتلاشى مساهمات الطرد المركزي عند الطرح إلى هذه الرتبة. وعددياً،

$$\Delta W \simeq 3.67236 \times 10^5 \text{ J}.$$

يدور الخط الواصل بين الأرض والقمر الصناعي بسرعة زاوية Ω بالنسبة إلى النجوم. لذلك يتغير اتجاه السلك بالنسبة إلى ذلك الخط بمعدل

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega.$$

يمر كل سلك بـ قيمتين عظميين وقيمتين صغيرين في كل دورة نسبية. زمن الدورة النسبية هو

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|},$$

ولذلك يكون صافي شغل آلة واحدة خلال هذه المدة $2\Delta W$. ومن ثم

$$\boxed{\bar{P}_1 = \frac{2\Delta W}{T_{\text{rel}}} = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|}.$$

للدوران الموافق للحركة المدارية، $\omega = |\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = 384.37 \text{ s}, \quad \bar{P}_1 = \frac{2(3.67236 \times 10^5)}{384.37} \simeq \boxed{1.91 \text{ kW}}.$$

للدوران المعاكس للحركة المدارية، $\omega = -|\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega| + \Omega} = 338.54 \text{ s},$$

$$\bar{P}_1 \simeq \boxed{2.17 \text{ kW}}.$$

عند $\omega = \Omega$ ، يكون الاتجاه بالنسبة إلى الأرض ثابتاً. ولا يحدث مرور متكرر بالقيم العظمى والصغرى للشد، ولذلك يكون متوسط القدرة المستمرة صفراً.

(3) التغيرات في حركة القمر الصناعي

لنكتب كتلة القمر الصناعي الكلية على الصورة $M = 4m$. ضمن الدقة المعتمدة، يكون مقدار سرعته المدارية وزخمه الزاوي وطاقته الميكانيكية وطاقة وضع الجاذبية له كما يأتي

$$v = \sqrt{\frac{K}{R}},$$

$$L = M\sqrt{KR} + I\omega,$$

$$E = -\frac{KM}{2R} + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad U = -\frac{KM}{R}.$$

تتجه كل قوة جاذبية نحو مركز الأرض، ولذلك لا تؤثر بعزم حول ذلك المركز. وتؤثر الآلات بقوى داخلية. ومن ثم، بإهمال ضغط الإشعاع،

$$\dot{L} = 0.$$

بالتفاضل،

$$\frac{M}{2}\sqrt{\frac{K}{R}}\dot{R} + I\dot{\omega} = 0,$$

أو

$$\dot{R} = -\frac{2I}{MR\Omega}\dot{\omega} = -\frac{2r^2}{R\Omega}\dot{\omega}.$$

إن تؤدي زيادة الزخم الزاوي ذي الإشارة للدوران الذاتي إلى تقليل نصف قطر المدار.

تقدم الآلات الأربع قدرة ميكانيكية كلية $P_{\text{tot}} = 4\bar{P}_1$. وبتفاضل الطاقة والتعويض باستخدام انحفاظ الزخم الزاوي نحصل على

$$P_{\text{tot}} = \frac{KM}{2R^2}\dot{R} + I\omega\dot{\omega} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

إن

$$\boxed{P_{\text{tot}} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}}.$$

بما أن الآلات العاملة تقدم قدرة صافية موجبة، فإن

$$\text{sgn}(\dot{\omega}) = \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

وبصورة أكثر صراحة، فإن المعدلات المتوسطة على دورة هي

$$\dot{\omega} = \frac{3\epsilon\Omega^2}{\pi}\text{sgn}(\omega - \Omega)$$

و

$$\dot{R} = -\frac{6\epsilon r^2\Omega}{\pi R}\text{sgn}(\omega - \Omega).$$

تثبت هذه العلاقات جميع الخانات في جدول الإجابة:

- دوران موافق للحركة المدارية وأسرع منها، $\omega > \Omega$: تزداد سرعة الدوران الذاتي، ويتقلص المدار، وتزداد السرعة المدارية، وتنقص طاقة وضع الجاذبية.
- دوران معاكس للحركة المدارية، $\omega < 0$: تنقص السرعة الزاوية ذات الإشارة للدوران الذاتي، فيزداد مقدارها في الاتجاه المعاكس. ويتسع المدار، وتنقص السرعة المدارية، وتزداد طاقة وضع الجاذبية.
- من الناحية الشكلية، $0 < \omega < \Omega$: يتباطأ الدوران الذاتي الموافق للحركة المدارية بينما يتسع المدار. ويؤدي استمرار التشغيل إلى عكس اتجاه الدوران الذاتي. ويخضع هذا المجال لقيد الأسلاك المرنة الذي وُجد في الجزء (1).
- دوران متزامن، $\omega = \Omega$: لا يحدث تشغيل متكرر، ومن ثم لا يحدث تغير طويل الأمد تسببه الآلات.

على وجه الخصوص، تتبع إشارتنا تغير السرعة المدارية وطاقة الوضع مباشرة من

$$\dot{v} = -\frac{v}{2R}\dot{R}, \quad \dot{U} = \frac{KM}{R^2}\dot{R}.$$

لتفسير صف السرعة الزاوية في الجدول باعتباره معدل دوران بلا إشارة: يزداد $|\omega|$ في كل من حالة الدوران الموافق للحركة المدارية والأسرع منها وحالة الدوران المعاكس لها؛ وينقص في الحالة الشكلية للدوران الموافق والأبطأ حتى ينعكس اتجاه الدوران الذاتي.

إمكان الوصول إلى مدارات أعلى ومدارات ذات ارتفاع كبير كيفما نشاء

إذا كان القمر الصناعي يدور عكس اتجاه الحركة المدارية بسرعة كافية، فإنه يحقق $\omega < -\Omega$ ، فتظل أسلاكه مشدودة ويكون $\dot{R} > 0$. ولذلك يمكنه الوصول إلى مدار أعلى.

لا يفرض انحفاظ الزخم الزاوي حداً أعلى منتهياً لنصف القطر. وبين الحالة الابتدائية ومدار دائري لاحق،

$$M\sqrt{KR} + I\omega = M\sqrt{KR_0} + I\omega_0.$$

بما أن $I/M = r^2$ ، فإن

$$\omega(R) = \omega_0 - \frac{\sqrt{K}}{r^2}(\sqrt{R} - \sqrt{R_0}).$$

مع ازدياد R ، يعوّض الزخم الزاوي للدوران الذاتي الذي يصبح أكثر سلبية الزخم الزاوي المداري الذي يصبح أكثر إيجابية. وتقدم الآلات العاملة بالطاقة الشمسية الطاقة اللازمة.

يتناقص معدل الصعود تدريجياً. على الفرع الصاعد،

$$\dot{R} = \frac{6\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} R^{-5/2},$$

وبتكامل هذه العلاقة نحصل على

$$R(t)^{7/2} = R_0^{7/2} + \frac{21\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} t.$$

يُبلغ كل نصف قطر مستهدف منتهٍ بعد زمن منتهٍ في هذا النموذج المثالي، لكن $R \rightarrow \infty$ يتطلب $t \rightarrow \infty$. وعلاوة على ذلك، تزداد طاقة الدوران الذاتي اللازمة بلا حد:

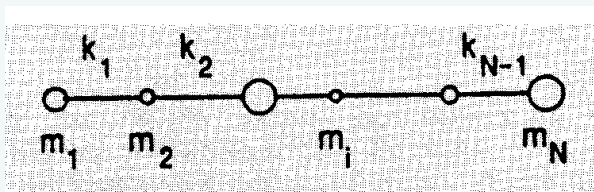
$$\frac{1}{2}I\omega^2 \sim \frac{2mK}{r^2}R \quad (R \rightarrow \infty).$$

وهكذا، يمكن بلوغ مدارات ذات ارتفاع منتهٍ كبير كيفما نشاء ضمن الافتراضات المثالية المذكورة، في حين أن الإفلات إلى مسافة لا نهائية ليس إلا حداً تقاربياً لعملية الضخ هذه في مدار دائري.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الحركة الطولية لجزيء خطي

ستحلل في هذه المسألة الحركة الطولية لجزيء خطي، أي الحركة على امتداد محور الجزيء. ولا تؤخذ الحركة الدورانية ولا انحناء الجزيء في الحسبان. يُفترض أن الجزيء يتكون من N ذرة كتلتها $m_1, m_2, \dots, m_N$ ، على الترتيب. ويُفترض أن كل ذرة متصلة بالذرات المجاورة لها برابطة كيميائية. وتُقرب كل رابطة بنابض عديم الكتلة يخضع لقانون هوك، وتكون ثوابت النوابض $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. يوضح الشكل 1 الجزيء.



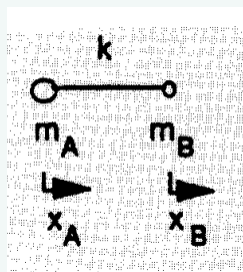
الشكل 1. جزيء خطي يتكون من N ذرة.

استخدم الحقائق الآتية عند حل هذه المسألة: تتكون الحركة الاهتزازية الطولية لجزيء خطي من تراكب حركات اهتزازية منفصلة تُسمى الاهتزازات الطبيعية، أو الأنماط الطبيعية. في النمط الطبيعي، تهتز جميع الذرات حركة توافقية بسيطة بالتردد نفسه، وتتم بمواضع اتزانها في الوقت نفسه.

الأسئلة

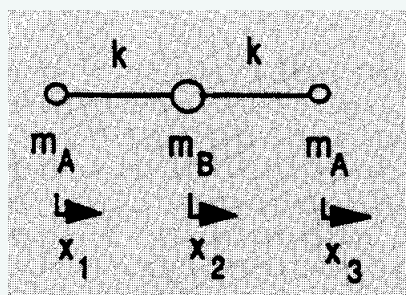
(1) لتكن x_i إزاحة الذرة i عن موضع اتزانها. عبّر عن القوة F_i المؤثرة في كل ذرة بدلالة الإزاحات $x_1, x_2, \dots, x_N$ وثوابت النوابض $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$. ما العلاقة بين القوى $F_1, F_2, \dots, F_N$ ؟ باستخدام هذه العلاقة، اشتق علاقة بين الإزاحات $x_1, x_2, \dots, x_N$ ، وقدم تفسيراً فيزيائياً لها.

(2) حلّ حركة جزيء ثنائي الذرة AB (الشكل 2). قيمة ثابت النابض هي k . اشتق تعبيراً للقوى المؤثرة في الذرتين A وB. حدّد أنواع الحركة الممكنة للجزيء. وحدّد ترددات الاهتزاز المقابلة لها، وفسّر النتيجة. وعلى وجه الخصوص، كيف يمكن للذرتين أن تهتزتا بالتردد نفسه رغم اختلاف كتلتيهما؟



الشكل 2. الجزيء ثنائي الذرة AB

(3) حلّ حركة الجزيء ثلاثي الذرات BA₂ (الشكل 3)



الشكل 3. الجزيء ثلاثي الذرات BA₂.

عبّر عن محصلة القوى المؤثرة في كل ذرة بدلالة إزاحتها وحدها. واستنتج الحركات الممكنة للجزيء وترددات الاهتزاز المقابلة لها.

(4) ترددا نمطي الاهتزاز الطولين لجزيء CO_2 هما $3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}$ و $7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}$ ، على الترتيب. حدّد قيمة عددية لثابت النابض للرابطة CO .

إلى أي مدى تعتقد أن هذا التقريب لبنية روابط الجزيء يصف الحركة الاهتزازية للجزيء الحقيقي؟

الكتلة الذرية لذرة الكربون = 12 amu، والكتلة الذرية لذرة الأكسجين = 16 amu. وحدة الكتلة الذرية = $1.660 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. القوى هي

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}). \end{aligned}$$

وهي تحقق $\sum_i F_i = 0$ ، ومن ثم

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

يتحرك مركز الكتلة حركة منتظمة. وللاهارزازات الداخلية المقاسة في الإطار المرجعي الذي يسكن فيه مركز الكتلة،

$$\sum_i m_i x_i = 0.$$

2. بالنسبة إلى AB،

$$F_A = k(x_B - x_A), \quad F_B = k(x_A - x_B).$$

توجد حركة انتقالية صلبة بتردد صفري، ونمط اهتزاز داخلي واحد:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

في هذا الاهتزاز، $m_A x_A = -m_B x_B$: تتحرك الذرتان في اتجاهين متعاكسين، بسعتين تتناسبان عكسيًا مع كتلتيهما.

3. بالنسبة إلى BA_2 ، الأنماط الطبيعية هي:

التردد	نسب الإزاحات $x_1 : x_2 : x_3$	الحركة
0	1 : 1 : 1	حركة انتقالية صلبة
$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}$	1 : 0 : -1	تمدد متماثل
$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$	$1 : -\frac{2m_A}{m_B} : 1$	تمدد غير متماثل

في التمدد المتماثل،

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

في التمدد غير المتماثل،

$$\begin{aligned} F_1 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_1, \\ F_2 &= -k \left(2 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_2, \\ F_3 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_3. \end{aligned}$$

الحركة العامة هي تراكب الاهتزازين والحركة الانتقالية المنتظمة.

4. يعطي كل من الترددين المقاسين، على حدة،

$$k_s = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}, \quad k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

ومن ثم فإن قيمة تقريبية ممثلة لصلابة الرابطة هي $k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$. لا توجد قيمة واحدة لـ k تطابق الترددين كليهما تماماً: فنسبة الترددين المتوقعة هي 1.915، في حين أن النسبة المرصودة هي 1.761. يعطي النموذج تقريباً معقولاً، مع اختلاف يبلغ نحو 9% في هذه النسبة.

الحل

(1) القوى ومركز الكتلة

اختر الاتجاه الموجب نفسه على امتداد محور الجزيء لجميع الإزاحات. يكون التغير في طول النابض الذي يصل بين الذرتين i و $i + 1$ هو

$$\Delta \ell_i = x_{i+1} - x_i.$$

ومن ثم فإن طاقة الوضع للنوابض المثالية الخاضعة لقانون هوك هي

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2.$$

باستخدام $F_i = -\partial U / \partial x_i$ نحصل على

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

و

$$F_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}).$$

يؤثر كل نابض عند طرفيه بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه. ولذلك،

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0.$$

وعندئذ يعطي قانون نيوتن الثاني

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i x_i \right) = 0,$$

ومن ثم

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

بكتابة $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ ، تكون إزاحة مركز الكتلة

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{\text{tot}}}.$$

إذن يتحرك مركز الكتلة بسرعة ثابتة، كما هو متوقع لنظام معزول لا تؤثر فيه قوة خارجية.

لنمط طبيعي ذي تردد غير صفري،

$$x_i = a_i \cos(\omega t + \phi).$$

وبما أن $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$ ، فإن

$$0 = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\omega^2 \sum_i m_i x_i.$$

ومن ثم

$$\boxed{\sum_i m_i x_i = 0 \quad (\omega \neq 0).}$$

يُبقى الاهتزاز الداخلي مركز الكتلة ثابتاً. ويمكن تراكب حركة انتقالية منتظمة معه بصورة مستقلة.

(2) الجزيء ثنائي الذرة AB

استطالة النابض هي $x_B - x_A$ ، لذا

$$m_A \ddot{x}_A = k(x_B - x_A), \quad m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A).$$

نعرف إزاحة مركز الكتلة والإزاحة النسبية:

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad q = x_B - x_A.$$

بجمع معادلتني الحركة نحصل على

$$\ddot{X} = 0.$$

وبطرح التسارعين نحصل على

$$\ddot{q} = -k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) q.$$

ولذلك

$$X = X_0 + Vt, \quad q = Q \cos(\omega t + \phi),$$

حيث

$$\boxed{\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

الحركة الكاملة هي

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= X_0 + Vt - \frac{m_B}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi), \\ x_B &= X_0 + Vt + \frac{m_A}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}}$$

يوجد نوعان مستقلان من الحركة:

- حركة انتقالية صلبة: $q = 0$ ، ومن ثم $x_A = x_B = X_0 + Vt$. لا يتشوه النابض وتنعدم القوتان. وهذا هو النمط ذو التردد الصفري.
- اهتزاز داخلي: في الإطار المرجعي الذي يسكن فيه مركز الكتلة،

$$m_A x_A + m_B x_B = 0.$$

تهتز الذرتان بطورين متعاكسين وبتردد

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

لفهم تساوي الترددين رغم اختلاف الكتلتين، نحذف إزاحة الذرة الأخرى:

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B}x_A, \quad x_A = -\frac{m_B}{m_A}x_B.$$

وعندئذ

$$F_A = -k \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) x_A, \quad F_B = -k \left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right) x_B.$$

بقسمة معامل قوة الإرجاع لكل ذرة على كتلتها نحصل على القيمة نفسها:

$$\frac{k(1 + m_A/m_B)}{m_A} = \frac{k(1 + m_B/m_A)}{m_B} = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right).$$

إذن للذرتين التردد الزاوي نفسه. ويقابل اختلاف كتلتيهما اختلاف في سعتي اهتزازهما:

$$\frac{|x_A|_{\max}}{|x_B|_{\max}} = \frac{m_B}{m_A}.$$

للذرة الأثقل سعة إزاحة أصغر وسعة تسارع أصغر أيضًا.

(3) الجزيء ثلاثي الذرات BA_2

نكتب $M = m_B$ و $m = m_A$. يعطي قانون هوك

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ M\ddot{x}_2 &= k(x_1 + x_3 - 2x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

تجعل الحركة الانتقالية الصلبة، $x_1 = x_2 = x_3 = X_0 + Vt$ ، القوى الثلاث جميعها صفرًا.

لدراسة الاهتزاز الداخلي، نعمل في الإطار المرجعي الذي يسكن فيه مركز الكتلة:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

نعرف متوسط إزاحتي الذرتين الطرفيتين ونصف الفرق بينهما:

$$s = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad d = \frac{x_1 - x_3}{2}.$$

وعندئذ

$$x_1 = s + d, \quad x_3 = s - d, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

بجمع معادلتَي الذرتين الطرفيتين وطرحهما نحصل على

$$m\ddot{s} = k(x_2 - s) = -k \left(1 + \frac{2m}{M}\right) s,$$

$$m\ddot{d} = -kd.$$

تمثل هاتان المعادلتان مهترتين توافقيين مستقلين، ومن ثم تحددان جميع الأنماط الطبيعية الداخلية.

نمط التمدد المتماثل. نضع $s = 0$. عندئذ

$$x_2 = 0, \quad x_1 = d, \quad x_3 = -d.$$

تبقى الذرة الوسطى ساكنة، بينما تتحرك الذرتان الخارجيتان بسعتين متساويتين وفي اتجاهين متعاكسين. وتستطيل الرابطتان معًا وتقصران معًا.

القوى، معبراً عنها باستخدام إزاحة كل ذرة وحدها، هي

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

ولذلك

$$\boxed{\omega_s^2 = \frac{k}{m_A}, \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}.}$$

لا تدخل كتلة الذرة المركزية في هذا التردد، لأن قوتي النابضين المؤثرتين فيها تلغي إحداها الأخرى طوال الحركة.

نمط التمدد غير المتماثل. نضع $d = 0$ عندئذ

$$x_1 = x_3 = s, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

تتحرك الذرتان الخارجيتان معاً، وتتحرك الذرة الوسطى في الاتجاه المعاكس. وتستطيل إحدى الرابطتين بينما تقصر الأخرى.

لكل من الذرتين الخارجيتين،

$$F_1 = k(x_2 - x_1) = -k \left(1 + \frac{2m}{M}\right) x_1,$$

$$F_3 = -k \left(1 + \frac{2m}{M}\right) x_3.$$

وللذرة الوسطى، نستخدم $x_1 + x_3 = -(M/m)x_2$:

$$F_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) = -k \left(2 + \frac{M}{m}\right) x_2.$$

تعطي المعادلات الثلاث جميعها

$$\boxed{\omega_a^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right), \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}.$$

تنطبق قوانين القوة هذه، التي يعتمد كل منها على إزاحة واحدة، على الأنماط الطبيعية المحددة أعلاه. أما التراكب العام فيخضع لمعادلات القوى المقترنة الأصلية.

يمكن كتابة الحركة الكاملة على الصورة

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (X_0 + Vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/m_B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

إن يوجد نمطان للاهتزاز الطولي ونمط انتقالي واحد.

4 القيمة العددية لصلابة الرابطة وتقييم النموذج

في CO_2 ، الذرتان الخارجيتان هما ذرتا أكسجين، والذرة المركزية هي ذرة كربون:

$$m_A = m_O = 16(1.660 \times 10^{-27}) = 2.656 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_B = m_C = 12(1.660 \times 10^{-27}) = 1.992 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

بما أن $f_a > f_s$ ، نعيّن

$$f_s = 3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}, \quad f_a = 7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

من النمط المتماثل،

$$k_s = m_O(2\pi f_s)^2,$$

ومن ثم

$$k_s = (2.656 \times 10^{-26}) [2\pi(3.998 \times 10^{13})]^2 = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

من النمط غير المتماثل،

$$k_a = \frac{(2\pi f_a)^2}{1/m_O + 2/m_C},$$

ومن ثم

$$k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

تضع هذه التقديرات صلابة الرابطة بالقرب من

$$k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

ويبيّن اختلافها أن النموذج لا يستطيع إعطاء الترددين المقاسين كليهما باستخدام ثابت نابض واحد.

تمثل نسبة الترددين اختبارًا مباشرًا للاتساق، مستقلة عن k . يتنبأ النموذج بأن

$$\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} = \sqrt{1 + \frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.915.$$

أما النسبة المقاسة فهي

$$\left(\frac{f_a}{f_s}\right)_{\text{measured}} = \frac{7.042}{3.998} = 1.761.$$

فعلى سبيل المثال، تؤدي مطابقة التردد الأدنى إلى التنبؤ بـ

$$f_a = 1.91485(3.998 \times 10^{13}) = 7.656 \times 10^{13} \text{ Hz},$$

وهو أعلى من التردد الأعلى المقاس بنسبة 8.71%.

لذلك يعطي نموذج النوابض المثالية وصفًا تقريبيًا معقولًا لحركتي التمدد ولمرتبة تردداتهما. وتبقى دقته الكمية محدودة: إذ قد تتضمن قوى الإرجاع الجزيئية الحقيقية اقترانًا بين استطالتي الرابطين، وانحرافات عن قانون هوك، وهو ما يهمله هذا النموذج.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: قمر صناعي في ضوء الشمس

في هذه المسألة ستحسب درجة حرارة قمر صناعي فضائي. يُفترض أن القمر الصناعي كرة قطرها 1 m. وتبقى درجة الحرارة موحدة في جميع أجزائه. ويغطى سطحه الكروي كله بالنوع نفسه من الطلاء. يقع القمر الصناعي بالقرب من الأرض، لكنه ليس في ظلها.

درجة حرارة سطح الشمس (درجة حرارة سطحها بوصفه جسمًا أسود) هي $T_{\text{sun}} = 6000 \text{ K}$ ، ونصف قطرها $6.96 \times 10^8 \text{ m}$ والمسافة بين الشمس والأرض هي $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$. يسخن ضوء الشمس القمر الصناعي إلى درجة حرارة تصبح عندها قدرة الإشعاع المنبعث منه بوصفه جسمًا أسود مساوية للقدرة التي يمتصها من ضوء الشمس. تُعطى القدرة المنبعثة من وحدة المساحة

لجسم أسود بقانون ستيفان-بولتزمان $P = \sigma T^4$ ، حيث σ هو الثابت العام $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. في التقريب الأول، يمكنك افتراض أن الشمس والقمر الصناعي كليهما يمتصان جميع الإشعاعات الكهرومغناطيسية الساقطة عليهما.

(1) أوجد تعبيراً لدرجة حرارة القمر الصناعي T . ما القيمة العددية لهذه الدرجة؟

(2) يخضع طيف إشعاع الجسم الأسود $u(T, f)$ لجسم عند درجة حرارة T لقانون بلانك للإشعاع

$$u(T, f) df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

حيث $\eta = hf/kT$ ، و $u(T, f)df$ هي كثافة طاقة الإشعاع الكهرومغناطيسي في مجال الترددات $[f, f + df]$. في هذه المعادلة، $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ هو ثابت بلانك، و $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ هو ثابت بولتزمان، و $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ هي سرعة الضوء.

يعطي تكامل طيف الجسم الأسود على جميع الترددات f واتجاهات الانبعاث القدرة الإشعاعية الكلية لكل وحدة مساحة $P = \sigma T^4$ ، كما يعبر عنها قانون ستيفان-بولتزمان الوارد أعلاه.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

يبين الشكل الطيف المُطَبَّع

$$\frac{c^3 h^3}{8\pi k^4} \frac{u(T, f)}{T^4}$$

بدلالة η .

في كثير من التطبيقات، يلزم إبقاء القمر الصناعي عند أدنى درجة حرارة ممكنة. ولتبريده، يستخدم المهندسون طلاءً عاكساً يعكس الضوء الذي يتجاوز تردده تردد قطع معيناً، لكنه لا يمنع خروج الإشعاع الحراري ذي الترددات المنخفضة. افترض أن تردد القطع هذا (ذي الحد الحاد) يقابل $hf/k = 1200 \text{ K}$.

ما درجة حرارة الاتزان الجديدة للقمر الصناعي؟ لا تلزم إجابة دقيقة. لذلك، لا تُجر أي تكاملات شاقة؛ واستخدم التقريبات حيث يلزم. التكامل على المجال بأكمله هو

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

وتبلغ $\eta^3/(e^\eta - 1)$ قيمتها العظمى عند $\eta = 2.82$. عندما تكون η صغيرة، يمكنك توسيع الدالة الأسية على الصورة $e^\eta \simeq 1 + \eta$.

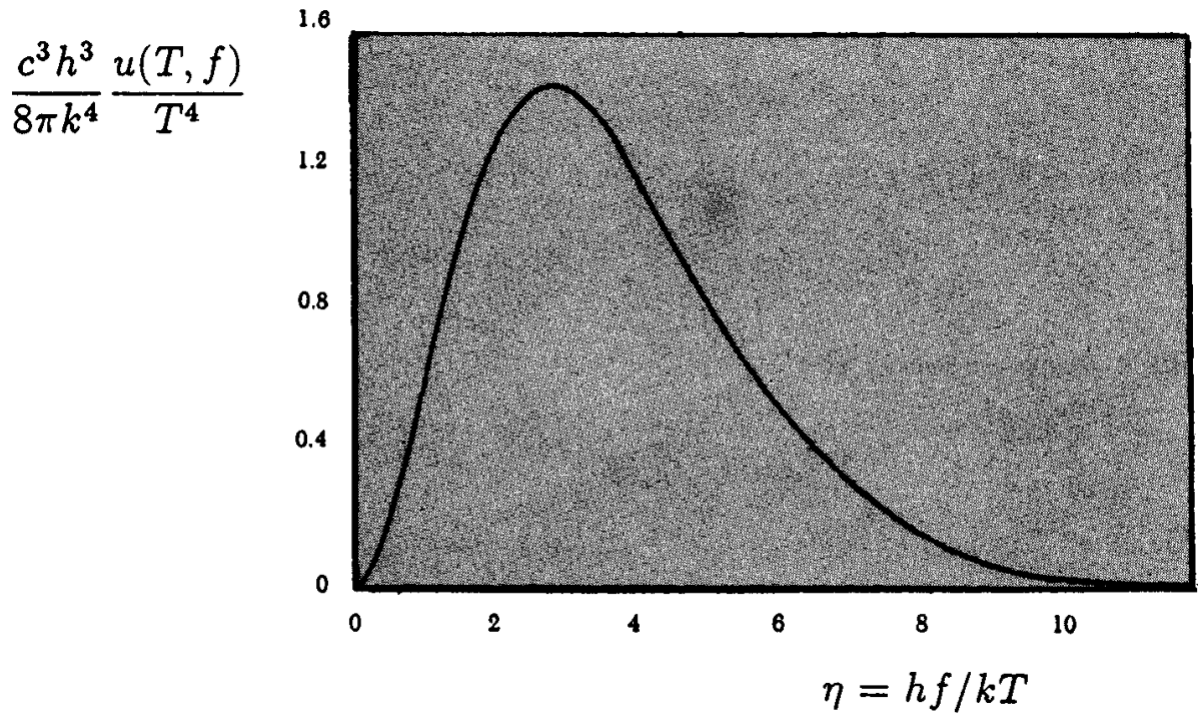
(3) إذا كان لدينا الآن قمر صناعي حقيقي مزود بالواح شمسية ممتدة تولد الكهرباء، فإن الحرارة المتبددة في الأجهزة الإلكترونية داخله تعمل مصدرًا إضافيًا للحرارة. بافتراض أن قدرة مصدر الحرارة الداخلي هي 1 kW، فما درجة حرارة اتزان القمر الصناعي في الحالة 2 أعلاه؟

(4) يعلن أحد المصنّعين عن طلاء خاص بالطريقة الآتية:

"سيعكس هذا الطلاء أكثر من 90% من جميع الإشعاعات الواردة (الضوء المرئي والأشعة تحت الحمراء معاً)، لكنه سيُشعّ عند جميع الترددات (الضوء المرئي والأشعة تحت الحمراء) كجسم أسود، وبذلك يزيل كمية كبيرة من الحرارة من القمر الصناعي. ومن ثم سيساعد الطلاء على إبقاء القمر الصناعي عند أدنى درجة حرارة ممكنة."

هل يمكن أن يوجد مثل هذا الطلاء؟ ولماذا يمكن ذلك أو لا يمكن؟

(5) ما الخصائص التي ينبغي أن يتصف بها طلاء لرفع درجة حرارة جسم كروي مماثل للقمر الصناعي المدروس هنا إلى ما فوق درجة الحرارة المحسوبة في (1)؟



نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. إذا كان نصف قطر الشمس $R_{\odot}$ ، والمسافة بين الشمس والقمر الصناعي D ، فإن

$$T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}} \simeq 289 \text{ K.}$$

2. باستخدام التقريب المحدد للقيم الصغيرة من η ،

$$T_2 \simeq T_1 \left[\frac{5}{\pi^4} \left(\frac{1200 \text{ K}}{T_{\text{sun}}} \right)^3 \right]^{1/4} \simeq 41 \text{ K.}$$

3. مع أخذ تشييط الطلاء للانبعاث الحراري عند الترددات العالية في الحسبان، $T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}$ ، $\lambda \approx 317 \text{ K}$ (تقريباً) K $\quad \text{text}$

4. لا. يقتضي قانون كيرشوف تساوي الامتصاصية والانبعاثية عند كل تردد. فلا يمكن لسطح يعكس أكثر من 90% أن يُشعّ في الوقت نفسه نفسه كجسم أسود عند تلك الترددات.

5. ينبغي أن يكون الطلاء شديد الامتصاص للإشعاع الشمسي وضعيف الانبعاث للإشعاع الحراري تحت الأحمر: أي أن تكون له امتصاصية عالية عند ترددات الإشعاع الشمسي وانعكاسية عالية عند ترددات الإشعاع الحراري المنخفضة للقمر الصناعي.

الحل

ليكن نصف قطر القمر الصناعي $a = 0.50 \text{ m}$ ، ونصف قطر الشمس $R_{\odot}$ ، والمسافة بين الشمس والقمر الصناعي D . نستخدم نموذج التوازن الإشعاعي المذكور، مع إهمال الإشعاع الوارد من الأرض وغيره من التبادلات الحرارية.

(1) قمر صناعي يشع كجسم أسود

القدرة الإشعاعية الكلية للشمس هي

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\text{sun}}^4.$$

وعليه، فإن كثافة القدرة الإشعاعية الشمسية عند القمر الصناعي هي

$$S = \frac{L_{\odot}}{4\pi D^2} = \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2.$$

يعترض القمر الصناعي ضوء الشمس بمساحة إسقاطه πa^2 ، بينما يُصدر سطحه بأكمله، ومساحته $4\pi a^2$ ، الإشعاع. لذلك يتطلب الاتزان الحراري أن يكون

$$\pi a^2 S = 4\pi a^2 \sigma T_1^4.$$

ومن ثم

$$T_1^4 = \frac{1}{4} T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2, \quad \boxed{T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}}}.$$

عدديًا،

$$T_1 = 6000 \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2(1.5 \times 10^{11})}} \text{ K} = \boxed{289 \text{ K}}.$$

يُختزل نصف قطر القمر الصناعي لأن القدرتين الممتصة والمنبعثة كليهما تتناسبان مع a^2 .

(2) قمر صناعي ذو طلاء انتقائي التردد

نكتب

$$\Theta = \frac{hf_c}{k} = 1200 \text{ K},$$

حيث f_c هو تردد القطع. يمتص القمر الصناعي ذو الطلاء المثالي ويُشع كجسم أسود عند الترددات الأقل من f_c ، بينما يثبط الانعكاس الامتصاص والانبعاث كليهما عند الترددات الأعلى من f_c . وهذا التساوي بين الامتصاصية الطيفية والانبعاثية الطيفية هو قانون كيرشوف.

نعرف الكسر من قدرة الجسم الأسود الواقع دون حد قطع لأبدي x بالعلاقة

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{\eta^3}{e^{\eta} - 1} d\eta.$$

لجسم عند درجة حرارة T ، يكون حد القطع الموافق هو $x = \Theta/T$. ومن ثم تكون معادلة الاتزان

$$\pi a^2 \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right) = 4\pi a^2 \sigma T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right).$$

باستخدام الجزء 1،

$$T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right) = T_1^4 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right).$$

بالنسبة إلى ضوء الشمس،

$$x_{\odot} = \frac{1200}{6000} = 0.20.$$

على امتداد هذا المجال الصغير، $e^{\eta} - 1 \simeq \eta$ ، لذا

$$F(0.20) \simeq \frac{15}{\pi^4} \int_0^{0.20} \eta^2 d\eta = \frac{5(0.20)^3}{\pi^4} \simeq 4.11 \times 10^{-4}.$$

إذا لا يُمتص إلا نحو 0.041% من القدرة الشمسية الساقطة.

نفترض مبدئياً أن القمر الصناعي المبرد يُصدر معظم إشعاعه الحراري تقريباً عند ترددات أدنى من تردد القطع، بحيث $F(\Theta/T_2) \simeq 1$. وعندئذ

$$T_2 \simeq T_1[F(0.20)]^{1/4} = 289(4.11 \times 10^{-4})^{1/4} \text{ K},$$

فنحصل على

$$T_2 \simeq 41 \text{ K}.$$

هذا الافتراض متسق ذاتياً: فحد القطع للقمر الصناعي هو

$$\frac{\Theta}{T_2} \simeq \frac{1200}{41} \simeq 29,$$

وهو أبعد بكثير من موضع القيمة العظمى للطيف عند $\eta = 2.82$. ويمكن إهمال الذيل الحراري المستبعد عند الترددات العالية.

(3) إضافة مصدر حرارة داخلي قدرته 1 kW

نحتاج الآن إلى المساحة المشعة صراحةً:

$$A = 4\pi a^2 = \pi \text{ m}^2.$$

قبل وضع الطلاء، كانت القدرة الشمسية الممتصة

$$Q_{\odot,0} = A\sigma T_1^4 \simeq 1.24 \times 10^3 \text{ W}.$$

ومع الطلاء، تصبح

$$Q_{\odot} = Q_{\odot,0}F(0.20) \simeq (1.24 \times 10^3)(4.11 \times 10^{-4}) \simeq 0.51 \text{ W}.$$

يمكن إهمال هذه القدرة مقارنةً بمصدر الحرارة الداخلي $Q_{\text{int}} = 1000 \text{ W}$. وتكون معادلة التوازن

$$A\sigma T_3^4 F\left(\frac{1200 \text{ K}}{T_3}\right) = 1000 \text{ W} + Q_{\odot}.$$

هنا لا يمكننا وضع $F = 1$. فحتى الجسم الأسود الذي لا يخضع لإشعاعه لأي قيد سيحتاج إلى درجة الحرارة

$$\left(\frac{1000 \text{ W}}{A\sigma}\right)^{1/4} \simeq 274 \text{ K},$$

التي سيكون حد القطع عندها واقعاً بالفعل عند $\eta_c \simeq 4.38$. يقع جزء معتبر من الطيف الحراري فوق حد القطع هذا، ولذلك لا بد أن ترتفع درجة حرارة القمر الصناعي المطلي أكثر.

يمكننا تقدير الكسر المطلوب مباشرةً من الرسم البياني المعطى. بالقرب من $\eta_c = 3.8$ ، تكون المساحة تحت المنحنى تقريباً

$$\int_0^{3.8} \frac{\eta^3}{e^{\eta} - 1} d\eta \simeq 3.6.$$

وبما أن المساحة الكلية هي $\pi^4/15 \simeq 6.49$ ، فإن

$$F(3.8) \simeq \frac{3.6}{6.49} \simeq 0.55.$$

يعطي التعويض

$$T_3 \simeq \left[\frac{1000.5 \text{ W}}{(\pi \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4})(3.6/6.49)} \right]^{1/4} \simeq 317 \text{ K}.$$

وحد القطع الموافق هو $1200/317 \simeq 3.79$ ، مما يؤكد التقدير البياني. لذلك،

$$T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}.$$

(4) الطلاء المُعلن عنه

ينص قانون كيرشوف للإشعاع الحراري على أنه، عند تردد معيّن وفي الاتجاهات المتناظرة،

$$\epsilon_f = \alpha_f,$$

حيث ϵ_f هي الانبعاثية و α_f هي الامتصاصية.

يعطي حفظ الطاقة

$$\alpha_f + \rho_f + \tau_f = 1,$$

حيث ρ_f و τ_f هما الانعكاسية والنفاذية. وبالتالي، إذا كانت $\rho_f > 0.90$ ، فإن

$$\alpha_f < 0.10 \implies \epsilon_f < 0.10.$$

أما الانبعاث كجسم أسود فيتطلب $\epsilon_f = 1$.

إذاً يستحيل على طلاء سلبي أن يجمع، كما يزعم الإعلان، بين انعكاسية عالية وانبعاث حراري كجسم أسود عند الترددات نفسها. فهذا يخالف قانون كيرشوف والتوازن الحراري التفصيلي.

(5) طلاء يرفع درجة الحرارة

ينبغي أن تكون الانتقائية الطيفية للطلاء معاكسة لتلك التي في الجزء 2:

- امتصاص قوي عند الترددات العالية نسبياً التي تحمل معظم الإشعاع الشمسي.
- انبعاث ضعيف، وانعكاس قوي يقابله، عند الترددات المنخفضة للأشعة تحت الحمراء التي تحمل معظم الإشعاع الحراري للقمر الصناعي.

لتكن $\bar{\alpha}_\odot$ الامتصاصية المتوسطة على الطيف الشمسي، ولتكن $\bar{\epsilon}_T$ الانبعاثية المتوسطة على طيف الجسم الأسود للقمر الصناعي عند درجة حرارة T . تكون معادلة التوازن دون تسخين داخلي

$$\pi a^2 \bar{\alpha}_\odot S = 4\pi a^2 \bar{\epsilon}_T \sigma T^4.$$

ومن ثم

$$T = T_1 \left(\frac{\bar{\alpha}_\odot}{\bar{\epsilon}_T} \right)^{1/4}.$$

تتجاوز درجة حرارة الاتزان T_1 عندما

$$\bar{\alpha}_\odot > \bar{\epsilon}_T.$$

يتوافق هذا مع قانون كيرشوف لأن المتوسطين يُرجحان نطاقات تردد مختلفة. أما الطلاء الرمادي المستقل عن التردد فتكون امتصاصيته وانبعاثيته متساويتين، ويبقى درجة حرارة الاتزان دون تغيير.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.