

IPhO 1991

理论题与解答 · 古巴哈瓦那 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1991/

题目 1：在地面上反弹的旋转球

图 1.1 所示为一个半径为 R 的均匀实心球。在落向地面之前，球的质心静止，但球正以角速度 ω_0 绕通过球心的水平轴旋转。球的最低点距地面的高度为 h 。

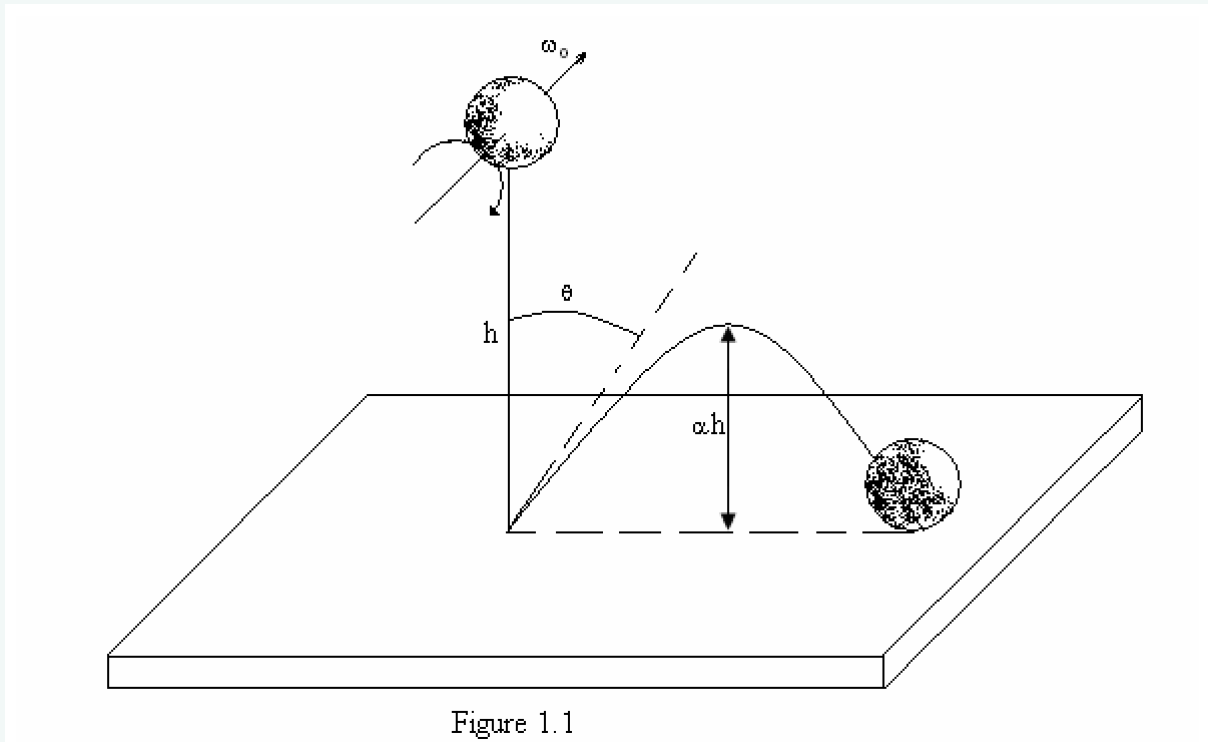


Figure 1.1

图 1.1

释放后，球在重力作用下下落，并反弹到一个新的高度，此时球的最低点距地面的高度为 αh 。碰撞时球和地面的形变可视为可以忽略。忽略空气的影响。不过，碰撞持续时间是有限的。

球的质量为 m ，重力加速度为 g ，球与地面之间的动摩擦因数为 μ_k ，球绕上述轴的转动惯量为：

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

请考虑两种情况：第一种情况中，球在整个碰撞过程中都发生滑动；第二种情况中，滑动在碰撞结束之前停止。

情况 1：整个碰撞过程中均发生滑动。

求：

- $\tan \theta$ ，其中 θ 为图中标出的反弹角；
- 第一次与第二次碰撞之间，球在空中运动所经过的水平距离；
- 发生这种情况所需的 ω_0 的最小值。

情况 II: 仅在碰撞过程中的一部分时间内发生滑动。

再次求:

a) $\tan \theta$;

b) 第一次与第二次碰撞之间, 球在空中运动所经过的水平距离。

综合考虑上述两种情况, 画出 $\tan \theta$ 随 ω_0 变化的示意图。

题目译自官方英文原文。

答案

设 D 为球反弹后在空中运动所经过的水平距离。在通常的短时碰撞近似下, 忽略接触期间重力的冲量:

- 情况 I(a):

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

- 情况 I(b):

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a} (1 + \sqrt{a})$$

- 情况 I(c):

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh} (1 + \sqrt{a})$$

取等号时, 滑动恰在球与地面分离时停止。若分离时仍有滑动, 则要求 $\omega_0 > \omega_c$ 。

- 情况 II(a):

$$\tan \theta = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}$$

- 情况 II(b):

$$D = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}$$

- 所要求的示意图：

$$\tan \theta = \begin{cases} \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}, & 0 \leq \omega_0 < \omega_c, \\ \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, & \omega_0 \geq \omega_c. \end{cases}$$

图线从原点开始线性上升，直到折点

$$\left(\omega_c, \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right),$$

随后保持水平。图线在折点处连续。

解答

空中运动的速率与碰撞方程

设 u 为碰撞前瞬间向下的速率， w 为碰撞后瞬间向上的速率。每一段自由飞行过程中机械能守恒，因此

$$u = \sqrt{2gh}, \quad w = \sqrt{2gah} = \sqrt{a}u.$$

质心下降的距离为 h ，上升的距离为 ah ，因为质心的高度始终比球的最低点高 R 。

取初始旋转的球所受摩擦力的方向为水平正方向。以 v 表示质心的水平速度，并取初始旋转方向为 ω 的正方向。于是，球的最低点的水平速度为

$$v - R\omega.$$

初始时，该速度为 $-R\omega_0$ ，所以摩擦力使质心加速，并使球的旋转减慢。

设法向冲量为

$$P = \int_{\text{碰撞}} N dt.$$

若接触持续时间为 τ ，由竖直方向的动量定理可得

$$P - mg\tau = m(u + w).$$

在通常的短时碰撞近似下，

$$g\tau \ll u + w,$$

因此

$$P \simeq m(u + w).$$

碰撞可以具有有限的持续时间，同时满足这一近似条件。

设 J 为累积的水平摩擦力冲量。由动量定理和角动量定理可得

$$mv = J, \quad I(\omega - \omega_0) = -RJ.$$

利用 $I = 2mR^2/5$ ，可得

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5J}{2mR}.$$

于是，

$$R\omega - v = R\omega_0 - \frac{7J}{2m}.$$

在球滑动期间，该量单调减小。当它变为零时，滑动停止。

情况 I(a): 反弹角

若整个碰撞过程中滑动持续发生，则摩擦力的大小始终为 $\mu_k N$ 。因此

$$J = \mu_k P = \mu_k m(u + w),$$

球离开地面时的水平速率为

$$v = \mu_k(u + w).$$

图中的角 θ 是相对于竖直方向测量的，因此

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \mu_k \frac{u + w}{w}.$$

由于 $w = \sqrt{a}u$,

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

情况 I(b): 水平距离

球离开地面和返回地面时，质心的高度相同，均为 R 。因此，其在空中运动的时间 T 满足

$$0 = wT - \frac{1}{2}gT^2,$$

由此得到

$$T = \frac{2w}{g}.$$

球在空中运动时水平速度保持不变，因此

$$D = vT = \frac{2\mu_k(u + w)w}{g}.$$

代入 $u^2 = 2gh$ 和 $w = \sqrt{a}u$ ，可得

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}).$$

情况 I(c): 最小初始角速度

由于 $R\omega - v$ 在滑动期间单调减小，只需检查它在碰撞结束时的值即可。在两种情况的分界处，它恰好在球与地面分离时变为零：

$$R\omega_0 - \frac{7J}{2m} = 0.$$

利用 $J = \mu_k m(u + w)$ ，可得

$$\omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}(u + w).$$

因此

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh}(1 + \sqrt{a}).$$

当 $\omega_0 > \omega_c$ 时，即使在分离时仍有滑动。当 $\omega_0 = \omega_c$ 时，滑动持续至接触的最后时刻。

情况 II(a): 反弹角

当 $0 < \omega_0 < \omega_c$ 时，滑动在法向冲量尚未全部作用完毕之前停止。设 J_* 为截至该时刻累积的摩擦力冲量。由条件 $v = R\omega$ 可得

$$R\omega_0 - \frac{7J_*}{2m} = 0,$$

所以

$$J_* = \frac{2mR\omega_0}{7}.$$

因此，在滑动停止的瞬间，

$$v_* = \frac{2R\omega_0}{7}, \quad \omega_* = \frac{2\omega_0}{7}.$$

在余下的接触过程中，这些与切向运动有关的速度保持不变。为说明这一点，假设在 $v = R\omega$ 时有静摩擦力 f 作用。则

$$m\dot{v} = f, \quad I\dot{\omega} = -Rf, \quad \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

联立这些方程可得

$$f \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) = 0,$$

因此 $f = 0$ 。不再需要额外的切向冲量。

因此，球离开地面时的水平速率为

$$v = \frac{2R\omega_0}{7},$$

并且

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}.$$

这一结果也包括 $\omega_0 = 0$ 的极限情况，此时没有滑动，球沿竖直方向反弹。

情况 II(b): 水平距离

利用同样的空中运动时间 $T = 2w/g$ ，可得

$$D = \frac{2R\omega_0}{7} \frac{2w}{g}.$$

因此

$$D = \frac{4R\omega_0}{7g} \sqrt{2agh} = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}.$$

所要求的示意图

对于给定的 h, R, a, μ_k ，图线由两部分组成：

- 从 $\omega_0 = 0$ 到 ω_c ，图线是一条经过原点的直线，其斜率为

$$\frac{2R}{7\sqrt{2agh}}.$$

- 在 ω_c 处，它与一条水平直线相接，该水平直线的纵坐标为

$$\mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

两部分在连接处的值相同，因为

$$\frac{2R\omega_c}{7\sqrt{2agh}} = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

初始转速更大时，摩擦力已经在整个接触过程中持续作用，因此增大转速无法增大可提供的切向冲量。

解答已与官方解答核对。

题目 2：电场中沿正方形环运动的带电小球（相对论）

在一个边长为 L 的正方形环上，有大量半径可忽略、各带电荷 q 的小球。从相对于环静止的参考系来看，小球以速率 u 运动，相邻小球之间的间距恒为 a 。这些小球像项链上的珠子一样排列在环上，且 L 远大于 a ，如图 2.1 所示。构成环的不导电细线在环的参考系中具有均匀的电荷线密度。在该参考系中，细线的总电荷与小球的总电荷大小相等、符号相反。

考虑环以平行于其边 AB 的速度 v （图 2.1）穿过场强为 E 的匀强电场的情形。电场方向垂直于环的速度方向，并与环所在平面成 θ 角。

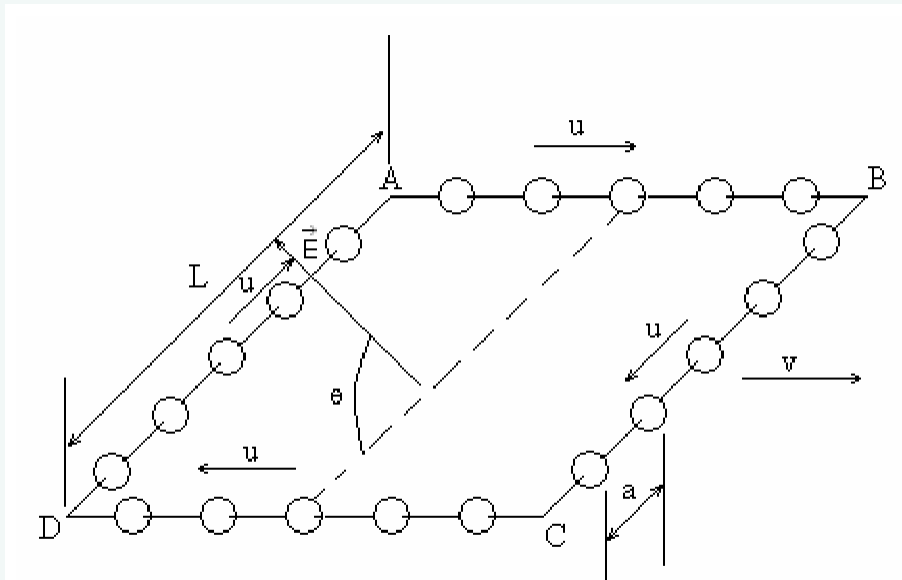


Figure 2.1

图 2.1

考虑相对论效应，在观察到环以速度 v 运动的观察者的参考系中，计算下列物理量：

- 环的各边上相邻小球之间的间距 a_{AB} 、 a_{BC} 、 a_{CD} 和 a_{DA} 。
- 环的各边上细线与小球的净电荷： Q_{AB} 、 Q_{BC} 、 Q_{CD} 和 Q_{DA} 。

c) 电场产生的、使环与小球组成的系统趋于转动的力矩的大小 M 。

d) 由环与小球组成的系统与电场相互作用所对应的能量 W 。

所有答案均应以题目中给定的物理量表示。

注。孤立物体的电荷与进行测量所用的参考系无关。忽略一切电磁辐射效应。

狭义相对论的一些公式

考虑相对于另一参考系 S 以速度 V 运动的参考系 S' 。两参考系的坐标轴相互平行，且原点在 $t = 0$ 时重合。 V 沿 x 轴正方向。

相对论速度叠加

若在 S' 中测得某粒子沿 x' 方向以速度 u' 运动，则在 S 中测得的粒子速度为：

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

相对论长度收缩

若静止于参考系 S 中的物体沿 x 方向的长度为 L_0 ，则参考系 S' （沿 x 方向以速度 V 运动）中的观察者测得其长度为：

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

题目译自官方英文原文。

答案

以下结果采用由 $L \gg a$ 保证合理的连续电荷近似，方向如图 2.1 所示。这里 c 为光速。

• a)

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{BC} = a, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}, \quad a_{DA} = a.$$

• b)

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

• c)

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

• d) 对于图示的电场方向，其在环平面内的分量由 AB 指向 CD ，有

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

解答

设 S' 为环的静止参考系, S 为观察者的参考系。取 x 轴沿 $A \rightarrow B$ 方向, 则环的速度为 $v\hat{x}$ 。取 $\hat{y}$ 沿 $A \rightarrow D$ 方向, 即在环平面内垂直于 AB 。

定义

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \kappa = \frac{uv}{c^2}.$$

由于 $L \gg a$, 我们将各直边上的离散小球替换为连续线电荷, 忽略单个小球进入或离开拐角所引起的涨落。在 S' 中, 小球和细线的电荷线密度分别为

$$\lambda'_b = \frac{q}{a}, \quad \lambda'_w = -\frac{q}{a}.$$

a) 小球之间的间距

必须根据在 S 中同时记录的位置来测量间距。这些事件在 S' 中一般并不同时发生。

对于平行于运动方向的任意一条边, 设小球在 S' 中的速度为 w' , 其中

$$w' = +u \quad \text{在边 } AB, \quad w' = -u \quad \text{在边 } CD.$$

选取两个相邻小球, 并按 x' 增大的方向排序。对于它们各自轨迹上的事件, 有

$$\Delta x' = a + w' \Delta t'.$$

由洛伦兹变换可得

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$$

要求 $\Delta t = 0$, 得到

$$\Delta t' = -\frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

因此,

$$\Delta x' = a - \frac{vw'}{c^2} \Delta x', \quad \Delta x' = \frac{a}{1 + vw'/c^2}.$$

再由空间坐标变换得到

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \Delta x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

于是

$$a_{\parallel} = \frac{a}{\gamma(1 + vw'/c^2)}.$$

代入这两个速度, 得到

$$\boxed{a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}.}$$

在 BC 或 DA 上, 同一条边上的所有小球具有相同的 x' 。因此 $\Delta x' = 0$, 而在 S 中同时进行的观测也满足 $\Delta t' = 0$ 。横向距离在洛伦兹变换下不变, 所以

$$\boxed{a_{BC} = a_{DA} = a.}$$

b) 各边上的净电荷

在 S 中，平行于运动方向的边发生长度收缩：

$$\ell_{AB} = \ell_{CD} = \frac{L}{\gamma}, \quad \ell_{BC} = \ell_{DA} = L.$$

每条边上的细线所带电荷固定，为

$$Q_w = -\frac{qL}{a}.$$

这一电荷在两个参考系中相同，因为电荷具有不变性，且细线上的电荷不会在各边之间移动。

各边上的小球数目等于观测到的该边长度除以相应的观测间距：

$$N_{AB} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1+\kappa)]} = \frac{L}{a}(1+\kappa),$$

$$N_{CD} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1-\kappa)]} = \frac{L}{a}(1-\kappa),$$

以及

$$N_{BC} = N_{DA} = \frac{L}{a}.$$

将细线的电荷与小球的电荷相加，得到

$$Q_{AB} = q\frac{L}{a}(1+\kappa) - \frac{qL}{a} = \frac{qL}{a}\kappa,$$

$$Q_{CD} = q\frac{L}{a}(1-\kappa) - \frac{qL}{a} = -\frac{qL}{a}\kappa.$$

两条横向边仍保持电中性。因此

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

它们的总和为零，符合总电荷不变性的要求。单独一条边上的电荷不必仍为零，因为在不同参考系中，按各自的的同时性确定的某一时刻处于该边上的小球并不相同。

c) 电场产生的力矩

记

$$Q = \frac{qLuv}{ac^2},$$

则 AB 和 CD 上的净电荷分别为 Q 和 $-Q$ 。

在连续近似下，这些电荷均匀分布在各自的边上。它们所受电场力的合力作用在各边的中点。两中点之间的位移为 $L\hat{\mathbf{y}}$ ，因为这一距离垂直于环的运动方向，不发生收缩。

因此，电偶极矩为

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_{AB} - Q\mathbf{r}_{CD} = -QL\hat{\mathbf{y}}.$$

在匀强电场中，总力为零，而力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

电场在环平面内的分量平行于 $\hat{\mathbf{y}}$ ，不产生力矩。垂直于该平面的分量为 $E \sin \theta$ ，它产生绕平行于 AB 的轴的力矩，大小为

$$M = |Q|LE \sin \theta.$$

于是

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

其单位为 N m。如果将 q 理解为正的电荷量大小，则 $|q|$ 可直接写成 q 。

d) 相互作用能

对于匀强外电场，

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

相互作用能为

$$W = \int \phi_{\text{ext}} dq.$$

由于系统的总电荷为零，常数 ϕ_0 的贡献抵消：

$$W = -\mathbf{E} \cdot \int \mathbf{r} dq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

图 2.1 中的角度标记表明， $\mathbf{E}$ 在环平面内的分量沿 $A \rightarrow D$ 方向，因此

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} = E \cos \theta.$$

利用 $\mathbf{p} = -QL\hat{\mathbf{y}}$ ，得到

$$W = QLE \cos \theta.$$

因此

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

其单位为焦耳，且当电场垂直于环平面时为零。对于正的 q ，结果取正号，是因为电偶极矩与电场在环平面内的分量方向相反。

解答已与官方解答核对。

题目 3：用激光冷却原子

要高精度地研究孤立原子的性质，就必须使它们在一段时间内保持几乎静止。最近，人们发展出了一种实现这一目的的方法，称为“激光冷却”。下面的问题说明了这一方法。

在真空室中，一束准直良好的 Na^{23} 原子束（由温度为 10^3 K 的样品蒸发产生）受到一束高强度激光的迎面照射（图 3.1）。选择适当的激光频率，使速度为 v_0 的原子能够共振吸收光子。吸收光后，这些原子被激发到第一激发能级，该能级相对于基态的能量平均值为 E ，不确定度为 Γ （图 3.2）。

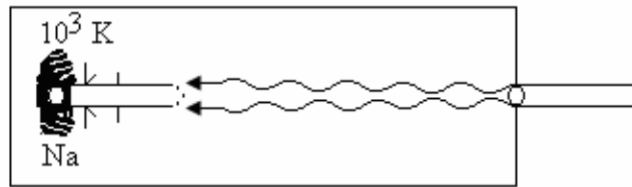


图 3.1

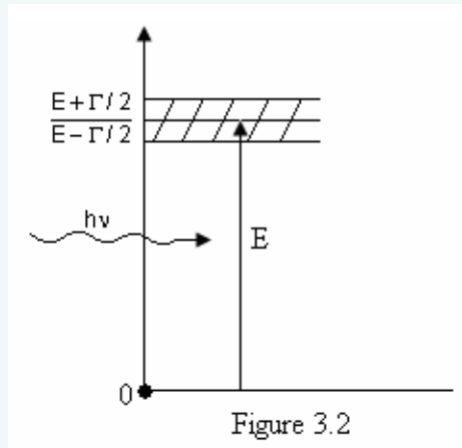


图 3.2

在这一过程中，原子速度的减小量 Δv_1 定义为 $\Delta v_1 = v_1 - v_0$ 。随后，原子回到基态并发光。原子的速度改变了 $\Delta v' = v'_1 - v_1$ ，运动方向偏转了角度 φ （图 3.3）。

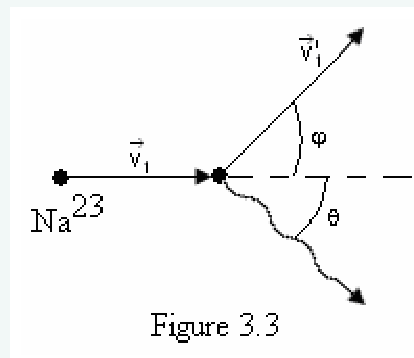


图 3.3

这一吸收和发射过程反复进行，直到原子的速度减小了某一给定量 Δv ，使其不再共振吸收频率为 ν 的光。此时，必须改变激光频率，以维持共振吸收。以新速度运动的原子进一步减速，直到其中一些原子的速度接近零。

作为一级近似，除上述光的自发吸收和发射过程外，可以忽略原子的其他相互作用过程。此外，可以假设激光强度足够高，使原子在基态停留的时间几乎为零。

问题

- 求使动能为准直器后方区域内原子动能的那些原子共振吸收光所需的激光频率。并求这些原子在吸收过程后的速度减小量 Δv_1 。
- 速度处于某一范围 Δv_0 内的原子能够吸收频率为问题 a) 中所求值的光。计算这一速度范围。
- 原子发光时，其运动方向相对于初始方向偏转了 φ 。计算 φ 。

d) 求在给定频率下可能达到的最大速度减小量 Δv 。

e) 要将原子的速度从初始值 v_0

——即上面问题 a) 中求得值——降低到接近零，大约需要多少次吸收—发射过程 N ？假设原子沿直线运动。

f) 求问题 e 中的过程所需的时间 t 。计算原子在这段时间内运动的距离 ΔS 。

数据

$$\begin{aligned}E &= 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ \Gamma &= 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \\ m_p &= 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ h &= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ k &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}\end{aligned}$$

其中， c 为光速， h 为普朗克常量， k 为玻尔兹曼常量， m_p 为质子质量。

题目译自官方英文原文。

答案

以下数值结果采用对 (a) 中原意所作的假设，即 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT$ ，由此得到 $v_0 = 1.04 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ 。

- a)

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)} \simeq 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

这一频率比静止原子的共振频率低约 $1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$ 。

$$\Delta v_1 \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$$

速率减小的正值大小为 $2.92 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$ 。

- b) 共振速度范围的全宽为

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ ms}^{-1},$$

其范围约为从 $v_0 - 3.1 \text{ ms}^{-1}$ 到 $v_0 + 3.1 \text{ ms}^{-1}$ 。

- c) 对于图 3.3 所示的发射角 θ ，令 $v_r = E/(mc)$ 。则

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

初始时的最大偏转角约为 $2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$ 。

- d) 从共振中心速度 v_0 开始,

$$\Delta v \simeq \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

若原子从共振速度范围的上边界开始减速, 则可跨越整个范围, 约为 6.3 m s^{-1} 。

- e) 在减速过程中不断调节激光频率, 有

$$N \simeq \frac{mc v_0}{E} \simeq 3.6 \times 10^4.$$

- f) 将 Γ 视为自然能量线宽的全宽, 有

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.54 \text{ ms}, \quad \Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

解答

a) 共振频率与吸收反冲

所提供的题目文本中, 说明初始动能的句子不完整。我们采用其可能意在表达的条件, 即选定原子的动能等于平均热运动动能:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} k T.$$

将钠原子的质量近似取为 $23m_p$,

$$m = 23(1.67 \times 10^{-27}) = 3.841 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

因此

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(10^3)}{3.841 \times 10^{-26}}} = 1.038 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

于是 $v_0/c \simeq 3.46 \times 10^{-6}$, 因此采用非相对论力学和一阶多普勒公式就已足够。

取入射原子束的方向为正方向。反向传播的光子的动量为 $-h\nu/c$ 。吸收过程中的动量守恒给出

$$m v_1 = m v_0 - \frac{h\nu}{c},$$

因此

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\frac{h\nu}{mc}.$$

能量守恒给出

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + h\nu = \frac{1}{2} m v_1^2 + E.$$

代入动量关系, 得到

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2}.$$

最后一项为反冲能, 其值约为

$$E_r \simeq \frac{E^2}{2mc^2} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ J},$$

即使与 $\Gamma = 7.0 \times 10^{-27} \text{ J}$ 相比也很小。忽略该项，得到

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)}.$$

这也是多普勒共振条件：迎着光运动的原子所感受到的频率为 $\nu(1 + v_0/c)$ ，它必须等于 E/h 。

为清楚起见，暂时保留更多位数，

$$\begin{aligned}\nu_{\text{rest}} &= \frac{E}{h} = 5.0755287 \times 10^{14} \text{ Hz}, \\ \nu &\simeq 5.0755111 \times 10^{14} \text{ Hz}.\end{aligned}$$

因此，所需激光频率低于静止原子的共振频率，差值为

$$\nu_{\text{rest}} - \nu \simeq \nu_{\text{rest}} \frac{v_0}{c} = 1.76 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

吸收反冲引起的速度变化为

$$\Delta v_1 = -\frac{h\nu}{mc} \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

按照题目中给出的定义，其符号为负。

b) 共振速度范围

根据图 3.2 所示的能量区间，我们将共振条件视为多普勒频移后的光子能量介于 $E - \Gamma/2$ 与 $E + \Gamma/2$ 之间：

$$E - \frac{\Gamma}{2} \leq h\nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) \leq E + \frac{\Gamma}{2}.$$

因此，边界速度为

$$v_{\pm} = c \left(\frac{E \pm \Gamma/2}{h\nu} - 1 \right).$$

由于激光被调谐到速度为 v_0 的原子所对应的谱线中心，

$$v_{\pm} = v_0 \pm \frac{c\Gamma}{2h\nu}.$$

因此，速度范围的全宽为

$$\Delta v_0 = v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu}.$$

利用 $h\nu \simeq E$ ，得到

$$\Delta v_0 \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)(7.0 \times 10^{-27})}{3.36 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m s}^{-1} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

半宽约为 3.1 m s^{-1} 。

c) 自发辐射引起的偏转

发射光子的动量约为 E/c 。定义相应的反冲速率为

$$v_r = \frac{E}{mc} \simeq 2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

这里，发射光子能量的微小多普勒修正和反冲修正可以忽略。

在图 3.3 所示的几何关系中，光子沿初始方向下方与之成 θ 角的方向传播。分别沿平行和垂直于该初始方向的方向应用动量守恒，得到

$$mv_1 = mv'_1 \cos \varphi + \frac{E}{c} \cos \theta,$$

$$mv'_1 \sin \varphi = \frac{E}{c} \sin \theta.$$

相除可得

$$\tan \varphi = \frac{v_r \sin \theta}{v_1 - v_r \cos \theta}.$$

初始时 $v_r \ll v_1$ ，因此

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta.$$

取 $v_1 \simeq 1038.16 \text{ m s}^{-1}$ ，得到

$$\varphi \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

当发射方向近似垂直于原子的速度方向时，偏转角最大。更精确地说，对于给定的光子动量，

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{v_r}{v_1} \right) \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

因此，一次发射只会使初始运动方向发生极小的改变。要确定 φ 的唯一数值，必须指定随机发射角 θ 。

d) 固定激光频率下的最大减速量

首先考虑像 (a) 部分那样从共振中心速度 v_0 开始运动的原子。随着原子减速，在其静止参考系中光子的能量减小。当满足

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c} \right) = E - \frac{\Gamma}{2}.$$

时，就到达共振区间的下边界。将此式从

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) = E$$

中减去，得到

$$\frac{h\nu}{c} \Delta v = \frac{\Gamma}{2}.$$

因此，在本题采用的线宽精度下，

$$\Delta v = \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

如果“可能达到的最大值”涵盖能够吸收这一固定频率激光的所有初始速度，则原子可以从 v_+ 开始减速到 v_- 。此时最大速度跨度为

$$v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

这两个值都远小于 v_0 。因此，要继续减速，就必须随着原子减速而提高激光频率，使其趋近于 E/h 。

e) 吸收—发射过程的次数

每次吸收都使原子获得一个定向的动量变化，近似为

$$\Delta p_{x,\text{abs}} = -\frac{E}{c}.$$

在原子的静止参考系中，自发辐射不偏向前方或后方。因此，在当前精度下，

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \Delta p_{x,\text{em}} \rangle = 0.$$

所以，每个完整循环中纵向速度的平均变化为

$$\langle \Delta v_x \rangle = -v_r = -\frac{E}{mc}.$$

采用题目要求的直线运动近似，并不断调节激光频率以维持共振，得到

$$Nv_r \simeq v_0.$$

因此

$$N \simeq \frac{v_0}{v_r} = \frac{mc v_0}{E}.$$

代入数值，

$$N \simeq \frac{(3.841 \times 10^{-26})(3.0 \times 10^8)(1038.19)}{3.36 \times 10^{-19}} = 3.56 \times 10^4.$$

因此，大约需要

$$N \simeq 3.6 \times 10^4$$

个循环。这一估算描述的是平均定向速度的减小；单个原子会受到随机的发射反冲。

f) 冷却时间和距离

对于平均寿命为 τ 的激发态，自然能量线宽的全宽满足

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

这里将 Γ 取为全宽，与边界 $E \pm \Gamma/2$ 一致。因此

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{h}{2\pi\Gamma}.$$

代入数值，

$$\tau = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{2\pi(7.0 \times 10^{-27})} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

根据题目明确给出的假设，原子在基态停留的时间几乎为零，因此一个循环的平均持续时间为 τ 。于是

$$t = N\tau = (3.56 \times 10^4)(1.51 \times 10^{-8}) \simeq 5.36 \times 10^{-4} \text{ s},$$

即

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

每个循环的平均反冲和平均持续时间均近似恒定。因此，平均减速度的大小为常量，

$$a = \frac{v_r}{\tau} \simeq 1.94 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}.$$

从 v_0 减速到接近零时，整个过程的平均速率为 $v_0/2$ ，由此得到

$$\Delta S \simeq \frac{v_0 t}{2} = \frac{(1038.19)(5.36 \times 10^{-4})}{2} \simeq 0.278 \text{ m}.$$

因此

$$\boxed{\Delta S \simeq 0.28 \text{ m}}.$$

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。