

IPhO 1991

Teorik sorular ve çözümler · Havana, Küba · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1991/

Soru 1: Dönerek yerden seken top

Şekil 1.1'de yarıçapı R olan, içi dolu, homojen bir top gösterilmektedir. Yere düşmeden önce kütle merkezi durmaktadır; ancak top, merkezinden geçen yatay bir eksen etrafında ω_0 açısal hızıyla dönmektedir. Topun en alt noktası yerden h yüksekliğindedir.

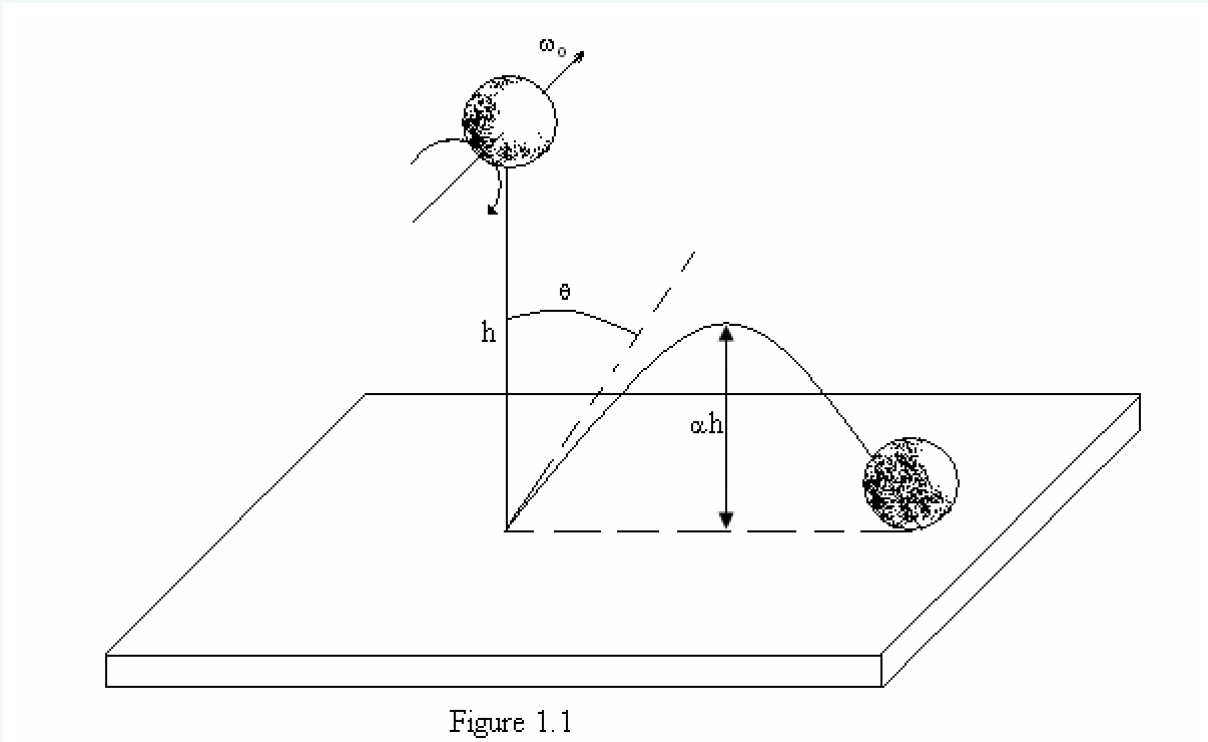


Figure 1.1

Şekil 1.1

Serbest bırakıldığında top yerçekimi etkisiyle düşer ve en alt noktası yerden ah yüksekte olacak şekilde yeni bir yüksekliğe seker. Çarpışma sırasında topun ve zeminin şekil değiştirmesi ihmal edilebilir. Havanın etkisini ihmal ediniz. Bununla birlikte çarpışma süresi sonludur.

Topun kütlesi m , yerçekimi ivmesi g , top ile zemin arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k olup topun verilen eksene göre eylemsizlik momenti şöyledir:

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

İki durumu ele almanız istenmektedir: birincisinde top çarpışma süresinin tamamı boyunca kayar; ikincisinde ise kayma, çarpışma süresi sona ermeden durur.

Durum I: çarpışma boyunca kayma.

Bulunuz:

a) θ , şekilde gösterilen sekme açısı olmak üzere $\tan \theta$;

- b) birinci ve ikinci çarpışmalar arasında uçuş sırasında alınan yatay yol;
c) bu durum için ω_0 'ın en küçük değeri.

Durum II: çarpışmanın bir bölümünde kayma.

Yine bulunuz:

- a) $\tan \theta$;
b) birinci ve ikinci çarpışmalar arasında uçuş sırasında alınan yatay yol.
Yukarıdaki iki durumu da dikkate alarak $\tan \theta$ 'nın ω_0 ile değişimini gösteren grafiği kabaca çiziniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Sekmeden sonraki uçuş sırasında alınan yatay yol D olsun. Temas sırasında yerçekiminin itmesinin ihmal edildiği alışılmış kısa çarpışma yaklaşımında:

- **Durum I(a):**

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

- **Durum I(b):**

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a} (1 + \sqrt{a})$$

- **Durum I(c):**

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh} (1 + \sqrt{a})$$

Eşitlik durumunda kayma tam yerden ayrılma anında durur. Yerden ayrılma anında kaymanın sıfırdan farklı olması için $\omega_0 > \omega_c$ gerekir.

- **Durum II(a):**

$$\tan \theta = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}$$

- **Durum II(b):**

$$D = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}$$

- İstenen grafik:

$$\tan \theta = \begin{cases} \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}, & 0 \leq \omega_0 < \omega_c, \\ \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, & \omega_0 \geq \omega_c. \end{cases}$$

Grafik, başlangıç noktasından

$$\left(\omega_c, \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right),$$

noktasındaki köşeye kadar doğrusal olarak yükselir, ardından yatay olarak devam eder. Köşede süreklidir.

Çözüm

Uçuş süratleri ve çarpışma denklemleri

Çarpışmadan hemen önceki aşağı yönlü sürat u , çarpışmadan hemen sonraki yukarı yönlü sürat ise w olsun. Her serbest uçuş sırasında mekanik enerji korunur; dolayısıyla

$$u = \sqrt{2gh}, \quad w = \sqrt{2ga}h = \sqrt{a}u.$$

Kütle merkezinin yüksekliği her zaman en alt noktanın yüksekliğinden R kadar fazla olduğundan, kütle merkezi h kadar düşer ve ah kadar yükselir.

Pozitif yatay yönü, başlangıçta dönmekte olan topa etkiyen sürtünme kuvvetinin yönü olarak seçelim. Kütle merkezinin yatay hızını v ile gösterelim ve ω 'nın pozitif yönünü başlangıçtaki dönme yönü olarak alalım. Bu durumda en alt noktanın yatay hızı

$$v - R\omega$$

olur. Başlangıçta bu hız $-R\omega_0$ olduğundan sürtünme, kütle merkezini hızlandırır ve dönme hızını azaltır.

Normal kuvvetin itmesi

$$P = \int_{\text{çarpışma}} N dt$$

olsun. Temas süresi τ için düşey doğrultudaki itme-momentum bağıntısı

$$P - mg\tau = m(u + w)$$

verir. Standart kısa çarpışma yaklaşımında

$$g\tau \ll u + w,$$

olduğundan

$$P \simeq m(u + w)$$

elde edilir. Çarpışma, bu yaklaşımı sağlarken sonlu bir süreye sahip olabilir.

Birikmiş yatay sürtünme itmesi J olsun. Doğrusal ve açısal itme-momentum bağıntıları

$$mv = J, \quad I(\omega - \omega_0) = -RJ$$

verir. $I = 2mR^2/5$ kullanıldığında

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5J}{2mR}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$R\omega - v = R\omega_0 - \frac{7J}{2m}.$$

Bu nicelik top kayarken monoton olarak azalır. Sıfıra ulaştığında kayma durur.

Durum I(a): sekme açısı

Kayma çarpışma boyunca sürerse sürtünme kuvvetinin büyüklüğü bu sürenin tamamında $\mu_k N$ olur. Bu nedenle

$$J = \mu_k P = \mu_k m(u + w),$$

ve yerden ayrılma anındaki yatay sürat

$$v = \mu_k(u + w)$$

olur.

Şekildeki θ açısı düşeyden ölçüldüğü için

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \mu_k \frac{u + w}{w}.$$

$w = \sqrt{a} u$ olduğundan

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Durum I(b): yatay yol

Top yerden ayrıldığında ve yere döndüğünde kütle merkezinin yüksekliği aynıdır ve R 'ye eşittir. Bu nedenle uçuş süresi T ,

$$0 = wT - \frac{1}{2}gT^2,$$

bağıntısını sağlar; buradan

$$T = \frac{2w}{g}$$

elde edilir. Yatay hız uçuş sırasında sabit kaldığından

$$D = vT = \frac{2\mu_k(u + w)w}{g}.$$

$u^2 = 2gh$ ve $w = \sqrt{a} u$ yerine konulduğunda

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}).$$

Durum I(c): en küçük başlangıç açısal hızı

$R\omega - v$ kayma sırasında monoton olarak azaldığı için çarpışmanın sonundaki değerini kontrol etmek yeterlidir. İki durum arasındaki sınırdaki bu nicelik tam yerden ayrılma anında sıfır olur:

$$R\omega_0 - \frac{7J}{2m} = 0.$$

$J = \mu_k m(u + w)$ kullanıldığında buradan

$$\omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}(u + w)$$

elde edilir. Böylece

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh}(1 + \sqrt{a}).$$

$\omega_0 > \omega_c$ için kayma yerden ayrılma anında bile sürer. $\omega_0 = \omega_c$ için ise temasın son anına kadar sürer.

Durum II(a): sekme açısı

$0 < \omega_0 < \omega_c$ olduğunda kayma, normal kuvvetin toplam itmesi tamamlanmadan önce durur. O ana kadar birikmiş sürtünme itmesi J_* olsun. $v = R\omega$ koşulu

$$R\omega_0 - \frac{7J_*}{2m} = 0,$$

verir; dolayısıyla

$$J_* = \frac{2mR\omega_0}{7}.$$

Bu nedenle kaymanın durduğu anda

$$v_* = \frac{2R\omega_0}{7}, \quad \omega_* = \frac{2\omega_0}{7}.$$

Bu teğetsel hızlar temasın geri kalanında değişmez. Bunu görmek için $v = R\omega$ iken bir f statik sürtünme kuvvetinin etkidiğini varsayalım. Bu durumda

$$m\dot{v} = f, \quad I\dot{\omega} = -Rf, \quad \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

Bu bağıntılar birlikte

$$f \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) = 0,$$

sonucunu verir; dolayısıyla $f = 0$ olur. Daha fazla teğetsel itme gerekmez.

Bu nedenle yerden ayrılma anındaki yatay sürat

$$v = \frac{2R\omega_0}{7},$$

olur ve

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}.$$

Bu sonuç, kaymanın olmadığı ve sekmenin düşey olduğu $\omega_0 = 0$ sınır durumunu da kapsar.

Durum II(b): yatay yol

Aynı $T = 2w/g$ uçuş süresi kullanılarak

$$D = \frac{2R\omega_0}{7} \frac{2w}{g}$$

elde edilir. Böylece

$$D = \frac{4R\omega_0}{7g} \sqrt{2agh} = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}.$$

İstenen grafik

Sabit h, R, a, μ_k değerleri için grafik iki bölümden oluşur:

- $\omega_0 = 0$ 'dan ω_c 'ye kadar başlangıç noktasından geçen ve eğimi

$$\frac{2R}{7\sqrt{2agh}}$$

olan bir doğrudur.

- ω_c 'de, yüksekliği

$$\mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

olan yatay bir doğruyla birleşir.

Birleşme noktasındaki değerler aynıdır, çünkü

$$\frac{2R\omega_c}{7\sqrt{2agh}} = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Daha büyük başlangıç dönme hızlarında sürtünme zaten temasın tamamı boyunca etkid olduğundan, dönme hızını artırmak sağlanabilecek teğetsel itmeyi artıramaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Bir elektrik alanında kare biçimli bir halka boyunca hareket eden yüklü küreler (görelilik)

Kenar uzunluğu L olan kare biçimli bir halkada, yarıçapları ihmal edilebilir ve her birinin yükü q olan çok sayıda küre, halkaya göre sabit bir referans sisteminden bakıldığında, aralarında sabit bir a uzaklığı bulunacak şekilde u süratiyle hareket etmektedir. Küreler, Şekil 2.1'de gösterildiği gibi, halkaya bir kolyenin boncukları gibi dizilmiştir; L, a 'dan çok büyüktür. Halkayı oluşturan yalıtkan tel, halkanın referans sisteminde birim uzunluk başına düzgün bir yük yoğunluğuna sahiptir. Telin toplam yükü, bu sistemde kürelerin toplam yüküne eşit büyüklükte ve zıt işaretlidir.

Halkanın, AB kenarına paralel v hızıyla (Şekil 2.1), şiddeti E olan düzgün bir elektrik alanı içinde hareket ettiği durumu ele alın. Elektrik alanı, halkanın hızına diktir ve halkanın düzlemiyle θ açısı yapmaktadır.

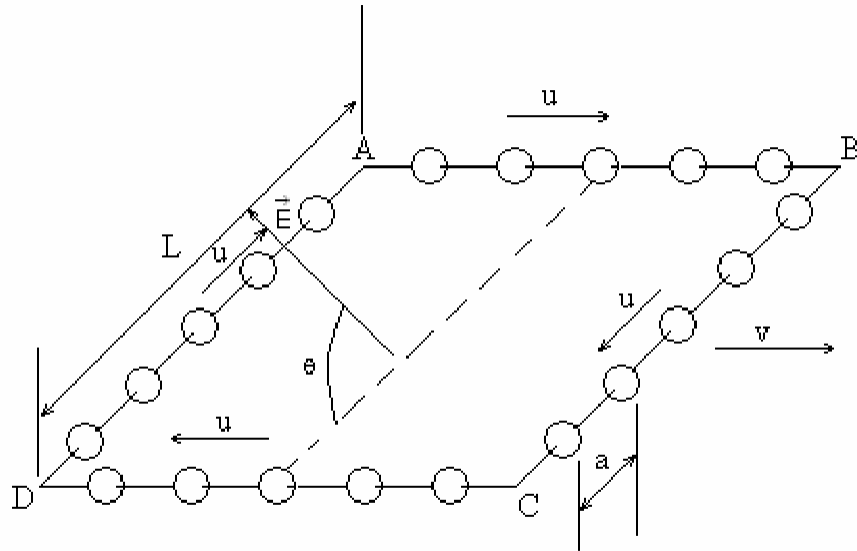


Figure 2.1

Şekil 2.1

Görelî etkileri dikkate alarak, halkanın v hızıyla hareket ettiğini gören bir gözlemcinin referans sisteminde aşağıdaki büyüklükleri hesaplayın:

- Halkanın her bir kenarında küreler arasındaki uzaklıklar: a_{AB} , a_{BC} , a_{CD} ve a_{DA} .
- Halkanın her bir kenarında, tel ve kürelerin toplam net yükü: Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CD} ve Q_{DA} .
- Halka ve kürelerden oluşan sistemi döndürmeye çalışan, elektriksel kuvvetlerin oluşturduğu torkun M büyüklüğü.
- Halka ve kürelerden oluşan sistemin elektrik alanıyla etkileşiminden kaynaklanan W enerjisi.

Bütün cevaplar, soruda belirtilen büyüklükler cinsinden verilmelidir.

Not. Yalıtılmış bir cismin elektrik yükü, ölçümlerin yapıldığı referans sisteminden bağımsızdır. Elektromanyetik ışınımın tüm etkileri ihmal edilmelidir.

Özel göreliliğin bazı formülleri

Başka bir S referans sistemine göre V hızıyla hareket eden bir S' referans sistemini ele alın. Sistemlerin eksenleri paraleldir ve başlangıç noktaları $t = 0$ anında çakışır. V , x ekseninin pozitif yönündedir.

Hızların görelî toplamı

Bir parçacık, S' sisteminde ölçüldüğü üzere x' yönünde u' hızıyla hareket ediyorsa, parçacığın S sisteminde ölçülen hızı şu şekilde verilir:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

Görelî uzunluk büzülmesi

S sisteminde durgun olan bir cismin x yönündeki uzunluğu L_0 ise, S' sistemindeki (x yönünde V hızıyla hareket eden) bir gözlemci cismin uzunluğunu şöyle ölçer:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Sonuçlarda, $L \gg a$ koşulunun geçerli kıldığı sürekli yük yaklaşımı ve Şekil 2.1'de gösterilen yönler kullanılmıştır. Burada c , ışık hızıdır.

• a)

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{BC} = a, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}, \quad a_{DA} = a.$$

• b)

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

• c)

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

• d) Alanın, düzlem içindeki bileşeni AB 'den CD 'ye doğru olacak biçimde gösterilen yönü için,

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Çözüm

Halkanın durgun olduğu referans sistemi S' , gözlemcinin referans sistemi ise S olsun. x eksenini $A \rightarrow B$ yönünde alalım; böylece halka $v\hat{x}$ hızıyla hareket eder. $\hat{y}$ yönünü, halkanın düzlemi içinde AB 'ye dik olan $A \rightarrow D$ yönünde alalım.

Şu tanımları yapalım:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \kappa = \frac{uv}{c^2}.$$

$L \gg a$ olduğundan, tek tek kürelerin bir köşeye girmesi veya köşeden çıkmasıyla ilişkili dalgalanmaları ihmal ederek, ayırık kürelerin yerine her bir düz kenar boyunca sürekli bir çizgisel yük dağılımı kullanırız. S' sisteminde kürelerin ve telin yük yoğunlukları sırasıyla şöyledir:

$$\lambda'_b = \frac{q}{a}, \quad \lambda'_w = -\frac{q}{a}.$$

a) Küreler arasındaki uzaklık

Küreler arasındaki uzaklık, S' sisteminde eşzamanlı olarak kaydedilen konumlar arasında ölçülmelidir. Bu tür olaylar, genel olarak S' sisteminde eşzamanlı değildir.

Harekete paralel iki kenarın her birinde, kürelerin S' sistemindeki hızı w' olsun; burada

$$w' = +u \quad \text{kenar: } AB, \quad w' = -u \quad \text{kenar: } CD.$$

Artan x' yönünde sıralanmış iki komşu küre seçelim. Bu kürelerin yörüngeleri üzerindeki olaylar için,

$$\Delta x' = a + w' \Delta t'.$$

Lorentz dönüşümü şunu verir:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$$

$\Delta t = 0$ koşulu uygulanırsa,

$$\Delta t' = -\frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

Dolayısıyla,

$$\Delta x' = a - \frac{vw'}{c^2} \Delta x', \quad \Delta x' = \frac{a}{1 + vw'/c^2}.$$

Konum dönüşümü de şu sonucu verir:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \Delta x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Böylece

$$a_{\parallel} = \frac{a}{\gamma(1 + vw'/c^2)}.$$

İki hızın değerleri yerine konulduğunda,

$$\boxed{a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}.$$

BC veya DA üzerinde, aynı kenarda bulunan bütün kürelerin x' koordinatı aynıdır. Dolayısıyla $\Delta x' = 0$ olur ve S sistemindeki eşzamanlı gözlemler için $\Delta t' = 0$ da sağlanır. Enine uzaklıklar Lorentz dönüşümünde değişmez; bu nedenle

$$\boxed{a_{BC} = a_{DA} = a.}$$

b) Her bir kenardaki net yük

S sisteminde harekete paralel kenarlar büzülür:

$$\ell_{AB} = \ell_{CD} = \frac{L}{\gamma}, \quad \ell_{BC} = \ell_{DA} = L.$$

Telin her bir kenarı sabit bir yük taşır:

$$Q_w = -\frac{qL}{a}.$$

Yük değişmez olduğundan ve teldeki yükler kenarlar arasında hareket etmediğinden, bu yük her iki referans sisteminde de aynıdır.

Her bir kenardaki küre sayısı, o kenarın gözlenen uzunluğunun, küreler arasında gözlenen ilgili uzaklığa bölünmesiyle bulunur:

$$N_{AB} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1+\kappa)]} = \frac{L}{a}(1+\kappa),$$

$$N_{CD} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1-\kappa)]} = \frac{L}{a}(1-\kappa),$$

ve

$$N_{BC} = N_{DA} = \frac{L}{a}.$$

Telin yükü kürelerin yüküne eklendiğinde,

$$Q_{AB} = q\frac{L}{a}(1+\kappa) - \frac{qL}{a} = \frac{qL}{a}\kappa,$$

$$Q_{CD} = q\frac{L}{a}(1-\kappa) - \frac{qL}{a} = -\frac{qL}{a}\kappa.$$

Enine iki kenar nötr kalır. Dolayısıyla

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

Toplam yükün değişmezliğinin gerektirdiği gibi, bu yüklerin toplamı sıfırdır. Tek bir kenarın yükünün sıfır kalması gerekmez; çünkü eşzamanlı olarak alınan bir anda o kenarda bulunan küreler, referans sistemine göre farklılık gösterir.

c) Elektriksel kuvvetlerin oluşturduğu tork

Şöyle yazalım:

$$Q = \frac{qLuv}{ac^2},$$

böylece AB ve CD üzerindeki net yükler Q ve $-Q$ olur.

Sürekli yük yaklaşımında bu yükler, bulundukları kenarlar boyunca düzgün dağılmıştır. Bu yüklere etkiyen kuvvetlerin bileşkeleri, kenarların orta noktalarından etkir. Bu orta noktalar arasındaki yer değiştirme $L\hat{\mathbf{y}}$ 'dir; çünkü bu uzaklık halkanın hareketine diktir ve büzülmez.

Dolayısıyla elektrik dipol momentini

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_{AB} - Q\mathbf{r}_{CD} = -QL\hat{\mathbf{y}}.$$

Düzgün bir elektrik alanında toplam kuvvet sıfırken, tork şöyledir:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Alanın halkanın düzlemi içindeki bileşeni $\hat{\mathbf{y}}$ 'ye paraleldir ve tork oluşturmaz. Düzleme dik bileşen $E \sin \theta$ 'dır ve AB 'ye paralel bir eksen etrafında şu büyüklükte bir tork oluşturur:

$$M = |Q|LE \sin \theta.$$

Böylece

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

Bu büyüklüğün birimi N m 'dir. q pozitif bir yük büyüklüğü olarak alınıyorsa, $|q|$ yerine doğrudan q yazılabilir.

d) Etkileşim enerjisi

Düzgün bir dış elektrik alanı için,

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

Etkileşim enerjisi şöyledir:

$$W = \int \phi_{\text{ext}} dq.$$

Sistemin toplam yükü sıfır olduğundan, sabit ϕ_0 'ın katkısı sıfır olur:

$$W = -\mathbf{E} \cdot \int \mathbf{r} dq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Şekil 2.1'deki açı işareti, $\mathbf{E}$ 'nin düzlem içindeki bileşeninin $A \rightarrow D$ yönünde olduğunu gösterir; dolayısıyla

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} = E \cos \theta.$$

$\mathbf{p} = -QL\hat{\mathbf{y}}$ kullanıldığında,

$$W = QLE \cos \theta.$$

Bu nedenle

$$W = \frac{qL^2 uv E}{ac^2} \cos \theta.$$

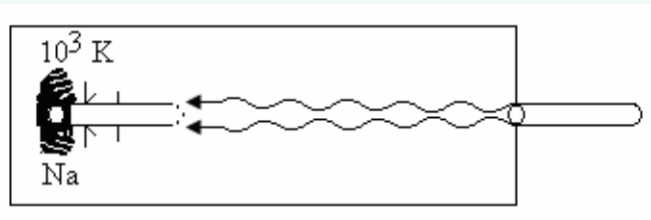
Bu büyüklüğün birimi joule'dür ve alan halkaya dik olduğunda sıfır olur. Pozitif q için işaretin pozitif olması, elektrik dipol momentinin alanın düzlem içindeki bileşenine zıt yönde olmasından kaynaklanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

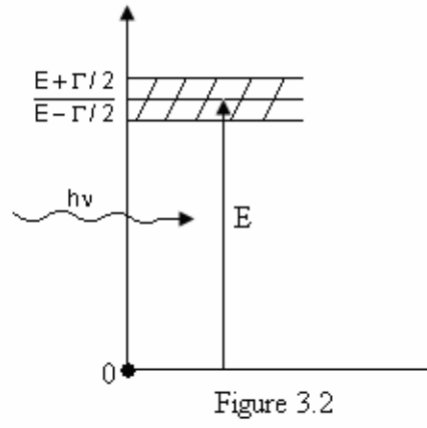
Soru 3: Atomların lazerle soğutulması

Yalıtılmış atomların özelliklerini yüksek bir hassasiyetle incelemek için atomların bir süre boyunca hemen hemen hareketsiz tutulması gerekir. Bunu sağlamak için yakın zamanda bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem "lazerle soğutma" olarak adlandırılır ve aşağıdaki soruda açıklanmaktadır.

Bir vakum odasında, iyi kolime edilmiş bir Na^{23} atom demeti (10^3 K sıcaklığındaki bir numunenin buharlaştırılmasıyla elde edilen) karşı yönden gelen yüksek şiddetli bir lazer demetiyle aydınlatılmaktadır (şek. 3.1). Lazerin frekansı, hızı v_0 olan atomların bir fotonu rezonans yoluyla soğuracağı şekilde seçilir. Işık soğurulduğunda bu atomlar, temel durumun üzerinde ortalama E enerjisine ve Γ belirsizliğine sahip olan birinci uyarılmış enerji düzeyine çıkar (şek. 3.2).

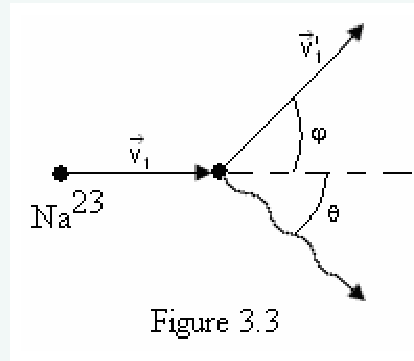


Şekil 3.1



Şekil 3.2

Bu süreçte atomun hızındaki azalma Δv_1 , $\Delta v_1 = v_1 - v_0$ ile verilir. Ardından atom temel durumuna dönerken ışık yayar. Atomun hızı $\Delta v' = v'_1 - v_1$ kadar değişir ve hareket doğrultusu φ açısı kadar sapar (şek. 3.3).



Şekil 3.3

Bu soğurma ve yayım dizisi, atomların hızı belirli bir Δv miktarı kadar azalıp ν frekansındaki ışığın rezonans yoluyla soğurulması artık gerçekleşmeyene kadar birçok kez tekrarlanır. Bu durumda, rezonans yoluyla soğurmaya sürdürmek için lazerin frekansını değiştirmek gerekir. Yeni hızla hareket eden atomlar, bazıları sıfıra yakın bir hıza ulaşıncaya kadar daha da yavaşlatılır.

İlk yaklaşım olarak, yukarıda açıklanan kendiliğinden ışık soğurma ve yayımı dışındaki tüm atomik etkileşim süreçlerini göz ardı edebiliriz.

Ayrıca lazerin, atomların temel durumda neredeyse hiç zaman geçirmemesini sağlayacak kadar şiddetli olduğunu varsayabiliriz.

Sorular

- Kinetik enerjileri kolimatörün arkasındaki bölgede bulunan atomların kinetik enerjisi olan atomların ışığı rezonans yoluyla soğurmasını sağlamak için gereken lazer frekansını bulun. Ayrıca soğurma sürecinden sonra bu atomların hızındaki azalmayı, Δv_1 , bulun.
- a) sorusunda hesaplanan frekanstaki ışık, hızları bir Δv_0 aralığında bulunan atomlar tarafından soğurulur. Bu hız aralığını hesaplayın.
- Bir atom ışık yaydığı anda, hareket doğrultusu başlangıç doğrultusundan φ kadar sapar. φ açısını hesaplayın.

d) Belirli bir frekans için mümkün olan en büyük hız azalmasını, Δv , bulun.

e) Bir atomun hızını başlangıç değeri olan v_0 'dan

—yukarıdaki a) sorusunda bulunan değerden— hemen hemen sıfıra düşürmek için gerekli soğurma-yayım olaylarının yaklaşık sayısı N nedir? Atomun düz bir çizgi boyunca hareket ettiğini varsayın.

f) e sorusundaki sürecin aldığı t süresini bulun. Bir atomun bu sürede aldığı ΔS yolunu hesaplayın.

Veriler

$$E = 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Gamma = 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

Burada c ışık hızı, h Planck sabiti, k Boltzmann sabiti ve m_p protonun kütlesidir.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Sayısal sonuçlarda, (a) kısmında kastedildiği varsayılan $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT$ koşulu kullanılmıştır; bu koşul $v_0 = 1.04 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ değerini verir.

- **a)**

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)} \simeq 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Bu değer, durgun atomun rezonans frekansının yaklaşık $1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$ altındadır.

$$\Delta v_1 \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

Süратteki azalmanın pozitif büyüklüğü $2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ 'dir.

- **b)** Rezonansa karşılık gelen tam hız aralığı

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1},$$

olup yaklaşık olarak $v_0 - 3.1 \text{ m s}^{-1}$ ile $v_0 + 3.1 \text{ m s}^{-1}$ arasında uzanır.

- **c)** Şekil 3.3'te gösterilen θ yayım açısı için $v_r = E/(mc)$ olsun. O hâlde

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

Başlangıçtaki en büyük sapma yaklaşık $2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$ 'dir.

- **d)** Rezonans aralığının merkezindeki v_0 hızından başlanırsa,

$$\Delta v \simeq \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Rezonans aralığının üst sınırından başlayan bir atom, yaklaşık 6.3 m s^{-1} olan aralığın tamamını kat edebilir.

- **e)** Yavaşlama sırasında lazerin frekansı yeniden ayarlandığında,

$$N \simeq \frac{mc v_0}{E} \simeq 3.6 \times 10^4.$$

- **f)** Γ doğal enerji çizgisinin tam genişliği olarak alındığında,

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.54 \text{ ms}, \quad \Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

Çözüm

a) Rezonans frekansı ve soğurma geri tepmesi

Verilen metinde başlangıç kinetik enerjisini belirten cümle eksiktir. Seçilen atomların ortalama ısı kinetik enerjiye sahip olması şeklindeki, muhtemelen kastedilen koşulu kullanıyoruz:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT.$$

Sodyum atomunun kütlesini yaklaşık olarak $23m_p$ alırsak,

$$m = 23(1.67 \times 10^{-27}) = 3.841 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

ve dolayısıyla

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(10^3)}{3.841 \times 10^{-26}}} = 1.038 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

Böylece $v_0/c \simeq 3.46 \times 10^{-6}$ olur; dolayısıyla görelilik dışı mekanik ve birinci mertebeden Doppler formülü yeterlidir.

Pozitif yönü, gelen atom demetinin yönünde seçelim. Karşı yönde ilerleyen fotonun momentumu $-h\nu/c$ 'dir. Soğurma sırasında momentumun korunumu

$$mv_1 = mv_0 - \frac{h\nu}{c},$$

bağıntısını verir; buradan

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\frac{h\nu}{mc}.$$

Enerjinin korunumu

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + E.$$

bağıntısını verir. Momentum bağıntısını yerine koyarsak,

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2}.$$

Son terim geri tepme enerjisidir. Değeri yaklaşık olarak

$$E_r \simeq \frac{E^2}{2mc^2} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ J},$$

olup $\Gamma = 7.0 \times 10^{-27} \text{ J}$ ile karşılaştırıldığında bile küçüktür. Bu terimi ihmal edersek,

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)}.$$

Bu aynı zamanda Doppler rezonans koşuludur: yaklaşan atom, frekansı $\nu(1 + v_0/c)$ olarak görür ve bu frekansın E/h 'ye eşit olması gerekir.

Açıklık sağlamak için geçici olarak daha fazla basamak tutarsak,

$$\begin{aligned} \nu_{\text{rest}} &= \frac{E}{h} = 5.0755287 \times 10^{14} \text{ Hz}, \\ \nu &\simeq 5.0755111 \times 10^{14} \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla gereken lazer frekansı, durgun atomun rezonans frekansının

$$\nu_{\text{rest}} - \nu \simeq \nu_{\text{rest}} \frac{v_0}{c} = 1.76 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

kadar altındadır.

Soğurma geri tepmesi

$$\Delta v_1 = -\frac{h\nu}{mc} \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

olarak bulunur. Soruda verilen tanıma göre işareti negatiftir.

b) Rezonansa karşılık gelen hız aralığı

Şekil 3.2'de gösterilen enerji aralığına uygun olarak, Doppler kaymasına uğramış foton enerjisi $E - \Gamma/2$ ile $E + \Gamma/2$ arasında olduğunda rezonansın gerçekleştiğini kabul ediyoruz:

$$E - \frac{\Gamma}{2} \leq h\nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) \leq E + \frac{\Gamma}{2}.$$

Buna göre sınır hızları

$$v_{\pm} = c \left(\frac{E \pm \Gamma/2}{h\nu} - 1 \right).$$

olur. Lazer, v_0 hızı için çizginin merkezine ayarlandığından,

$$v_{\pm} = v_0 \pm \frac{c\Gamma}{2h\nu}.$$

Dolayısıyla tam hız aralığı

$$\Delta v_0 = v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu}.$$

olur. $h\nu \simeq E$ kullanılırsa,

$$\Delta v_0 \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)(7.0 \times 10^{-27})}{3.36 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m s}^{-1} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

Yarı genişlik yaklaşık 3.1 m s^{-1} 'dir.

c) Kendiliğinden yayımın neden olduğu sapma

Yayılan fotonun momentumu yaklaşık E/c 'dir. Buna karşılık gelen geri tepme süratini

$$v_r = \frac{E}{mc} \simeq 2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

olarak tanımlayalım. Yayılan fotonun enerjisindeki küçük Doppler ve geri tepme düzeltmeleri burada ihmal edilebilir.

Şekil 3.3'teki geometriye göre foton, başlangıç doğrultusunun altında θ açısıyla ilerler. Bu doğrultuya paralel ve dik yönlerde momentumun korunumu

$$\begin{aligned} mv_1 &= mv'_1 \cos \varphi + \frac{E}{c} \cos \theta, \\ mv'_1 \sin \varphi &= \frac{E}{c} \sin \theta. \end{aligned}$$

bağıntılarını verir. Bölme işlemiyle,

$$\tan \varphi = \frac{v_r \sin \theta}{v_1 - v_r \cos \theta}.$$

Başlangıçta $v_r \ll v_1$ olduğundan,

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta.$$

$v_1 \simeq 1038.16 \text{ m s}^{-1}$ için,

$$\varphi \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

En büyük sapma, yayım atomun hızına yaklaşık dik olduğunda gerçekleşir. Daha kesin olarak, sabit foton momentumu için,

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{v_r}{v_1} \right) \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

Dolayısıyla tek bir yayım, başlangıç doğrultusunu ancak çok az değiştirir. φ 'nin tek bir değerinin bulunabilmesi için rastgele yayım açısı θ 'nin belirtilmesi gerekir.

d) Sabit lazer frekansında en büyük yavaşlama

Önce, (a) kısmındaki gibi, rezonans aralığının merkezindeki v_0 hızıyla başlayan bir atomu ele alalım. Atom yavaşladıkça, kendi durgunluk referans sisteminde fotonun enerjisi azalır. Rezonans aralığının alt sınırına

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c} \right) = E - \frac{\Gamma}{2}.$$

olduğunda ulaşılır. Bu bağıntıyı

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) = E$$

bağıntısından çıkarırsak,

$$\frac{h\nu}{c} \Delta v = \frac{\Gamma}{2}.$$

elde edilir. Dolayısıyla, soruda kullanılan çizgi genişliği hassasiyetinde,

$$\Delta v = \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

"Mümkün olan en büyük" ifadesi, bu sabit lazer frekansındaki ışığı soğurabilen tüm başlangıç hızlarını kapsıyorsa, bir atom v_+ hızıyla başlayıp v_- hızına kadar yavaşlayabilir. Bu durumda en büyük hız aralığı

$$v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

olur.

Her iki değer de v_0 'dan çok küçüktür. Bu nedenle yavaşlamanın sürmesi, atomlar yavaşladıkça lazer frekansının E/h 'ye doğru artırılmasını gerektirir.

e) Soğurma–yayım olaylarının sayısı

Her soğurma, atomda yaklaşık olarak

$$\Delta p_{x,\text{abs}} = -\frac{E}{c}.$$

değerinde, belirli bir yönde momentum değişimi oluşturur. Atomun durgunluk referans sisteminde kendiliğinden yayımın ileri ya da geri yönde bir tercihi yoktur. Dolayısıyla, burada kullanılan hassasiyette,

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \Delta p_{x,\text{em}} \rangle = 0.$$

Bu nedenle tam bir çevrim başına boyuna hızdaki ortalama değişim

$$\langle \Delta v_x \rangle = -v_r = -\frac{E}{mc}.$$

olur.

Soruda istenen doğrusal hareket yaklaşımını kullanıp rezonansı korumak için lazerin frekansını yeniden ayarlayarak,

$$Nv_r \simeq v_0.$$

elde ederiz. Buradan

$$N \simeq \frac{v_0}{v_r} = \frac{mc v_0}{E}.$$

Sayısal olarak,

$$N \simeq \frac{(3.841 \times 10^{-26})(3.0 \times 10^8)(1038.19)}{3.36 \times 10^{-19}} = 3.56 \times 10^4.$$

Dolayısıyla yaklaşık

$$N \simeq 3.6 \times 10^4$$

çevrim gerekir. Bu, belirli bir yöndeki ortalama hızın azalmasını tahmin eder; tek tek atomlar, yayım nedeniyle rastgele geri tepmelere uğrar.

f) Soğutma süresi ve alınan yol

Ortalama ömrü τ olan bir uyarılmış durum için doğal enerji çizgisinin tam genişliği

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

bağıntısını sağlar. Burada Γ , $E \pm \Gamma/2$ sınırlarıyla tutarlı olarak tam genişlik şeklinde alınmıştır. Dolayısıyla

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{h}{2\pi\Gamma}.$$

Sayısal olarak,

$$\tau = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{2\pi(7.0 \times 10^{-27})} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

Atomların temel durumda neredeyse hiç zaman geçirmedığı açıkça varsayıldığından, bir çevrimin ortalama süresi τ 'dur. Dolayısıyla

$$t = N\tau = (3.56 \times 10^4)(1.51 \times 10^{-8}) \simeq 5.36 \times 10^{-4} \text{ s},$$

ya da

$$\boxed{t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s}}.$$

Çevrim başına ortalama geri tepme ve ortalama çevrim süresi yaklaşık olarak sabittir. Dolayısıyla ortalama yavaşlama ivmesinin büyüklüğü sabittir:

$$a = \frac{v_r}{\tau} \simeq 1.94 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}.$$

v_0 'dan hemen hemen sifıra kadar yavaşlama için süreç boyunca ortalama sürat $v_0/2$ 'dir; bu da

$$\Delta S \simeq \frac{v_0 t}{2} = \frac{(1038.19)(5.36 \times 10^{-4})}{2} \simeq 0.278 \text{ m}.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla

$$\boxed{\Delta S \simeq 0.28 \text{ m}}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.