

IPhO 1991

Теоретические задачи и решения · Гавана, Куба · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1991/

Задача 1: Отскок вращающегося шара от пола

На рисунке 1.1 показан сплошной однородный шар радиуса R . Перед падением на пол его центр масс покоится, однако шар вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Нижняя точка шара находится на высоте h над полом.

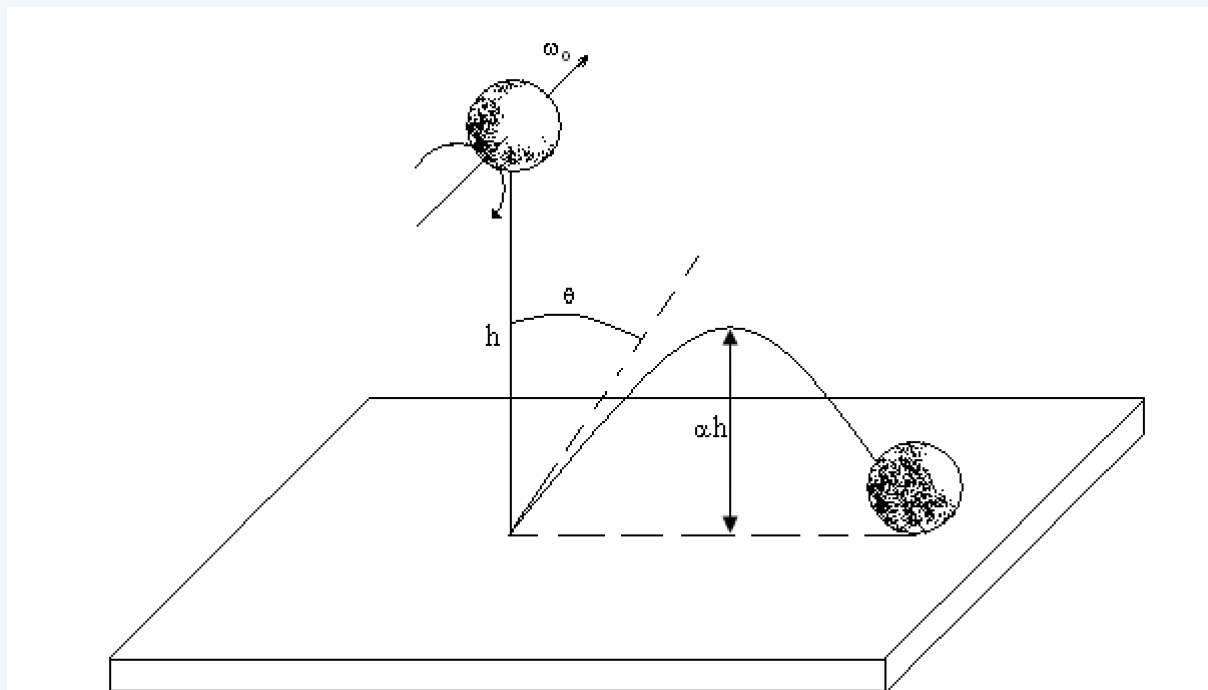


Figure 1.1

Рисунок 1.1

После освобождения шар падает под действием силы тяжести и отскакивает на новую высоту, так что его нижняя точка теперь находится на высоте ah над полом. Деформациями шара и пола при ударе можно пренебречь. Сопротивлением воздуха пренебречь. Однако длительность удара конечна.

Масса шара равна m , ускорение свободного падения — g , коэффициент трения скольжения между шаром и полом — μ_k , а момент инерции шара относительно указанной оси равен:

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

Необходимо рассмотреть два случая: в первом шар скользит в течение всего времени удара, а во втором скольжение прекращается до окончания удара.

Случай I: скольжение в течение всего времени удара.

Найдите:

- a) $\tan \theta$, где θ — угол отскока, указанный на рисунке;
- b) горизонтальное расстояние, пройденное в полёте между первым и вторым ударами;
- c) минимальное значение ω_0 для этого случая.

Случай II: скольжение в течение части времени удара.

Снова найдите:

- a) $\tan \theta$;
 - b) горизонтальное расстояние, пройденное в полёте между первым и вторым ударами.
- Учитывая оба рассмотренных случая, изобразите схематически зависимость $\tan \theta$ от ω_0 .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть D — горизонтальное расстояние, пройденное за время полёта после отскока. В обычном приближении кратковременного удара, при пренебрежении импульсом силы тяжести за время контакта:

- Случай I(a):

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

- Случай I(b):

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a})$$

- Случай I(c):

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh} (1 + \sqrt{a})$$

При равенстве скольжение прекращается точно в момент отрыва. Для ненулевой скорости скольжения в момент отрыва необходимо $\omega_0 > \omega_c$.

- Случай II(a):

$$\tan \theta = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}$$

- Случай II(b):

$$D = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}$$

• Требуемый график:

$$\tan \theta = \begin{cases} \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}, & 0 \leq \omega_0 < \omega_c, \\ \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, & \omega_0 \geq \omega_c. \end{cases}$$

График линейно возрастает от начала координат до точки излома

$$\left(\omega_c, \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right),$$

а затем идёт горизонтально. В точке излома график непрерывен.

Решение

Скорости в полёте и уравнения удара

Пусть u — скорость движения вниз непосредственно перед ударом, а w — скорость движения вверх непосредственно после удара. Во время каждого свободного полёта механическая энергия сохраняется, поэтому

$$u = \sqrt{2gh}, \quad w = \sqrt{2ga}h = \sqrt{a}u.$$

Центр масс опускается на h и поднимается на ah , поскольку его высота всегда превышает высоту нижней точки на R .

Выберем положительное горизонтальное направление совпадающим с направлением силы трения, действующей на первоначально вращающийся шар. Обозначим горизонтальную скорость центра масс через v , а положительное направление ω выберем совпадающим с направлением начального вращения. Тогда горизонтальная скорость нижней точки равна

$$v - R\omega.$$

Вначале она равна $-R\omega_0$, поэтому трение ускоряет центр масс и замедляет вращение.

Обозначим импульс нормальной реакции через

$$P = \int_{\text{удар}} N dt.$$

Если длительность контакта равна τ , то теорема об изменении импульса в проекции на вертикальную ось даёт

$$P - mg\tau = m(u + w).$$

В стандартном приближении кратковременного удара

$$g\tau \ll u + w,$$

и, следовательно,

$$P \simeq m(u + w).$$

Удар может иметь конечную длительность и при этом удовлетворять данному приближению.

Пусть J — накопленный импульс горизонтальной силы трения. Теоремы об изменении импульса и момента импульса дают

$$mv = J, \quad I(\omega - \omega_0) = -RJ.$$

Используя $I = 2mR^2/5$, получаем

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5J}{2mR}.$$

Следовательно,

$$R\omega - v = R\omega_0 - \frac{7J}{2m}.$$

Эта величина монотонно убывает, пока шар скользит. Скольжение прекращается, когда она обращается в нуль.

Случай I(a): угол отскока

Если скольжение продолжается в течение всего удара, то модуль силы трения всё это время равен $\mu_k N$. Поэтому

$$J = \mu_k P = \mu_k m(u + w),$$

а горизонтальная скорость после удара равна

$$v = \mu_k(u + w).$$

Угол θ на рисунке отсчитывается от вертикали, поэтому

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \mu_k \frac{u + w}{w}.$$

Поскольку $w = \sqrt{a}u$,

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Случай I(b): горизонтальное расстояние

В момент отрыва шара и при его возвращении высота центра масс одинакова и равна R . Поэтому время полёта T удовлетворяет уравнению

$$0 = wT - \frac{1}{2}gT^2,$$

откуда

$$T = \frac{2w}{g}.$$

Горизонтальная скорость в полёте остаётся постоянной, поэтому

$$D = vT = \frac{2\mu_k(u + w)w}{g}.$$

Подставляя $u^2 = 2gh$ и $w = \sqrt{a}u$, получаем

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}).$$

Случай I(c): минимальная начальная угловая скорость

Поскольку $R\omega - v$ монотонно убывает во время скольжения, достаточно проверить её значение в конце удара. На границе между двумя случаями эта величина обращается в нуль точно в момент отрыва:

$$R\omega_0 - \frac{7J}{2m} = 0.$$

При $J = \mu_k m(u + w)$ отсюда следует

$$\omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}(u + w).$$

Таким образом,

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}\sqrt{2gh}(1 + \sqrt{a}).$$

При $\omega_0 > \omega_c$ скольжение сохраняется даже в момент отрыва. При $\omega_0 = \omega_c$ оно продолжается до последнего мгновения контакта.

Случай II(а): угол отскока

При $0 < \omega_0 < \omega_c$ скольжение прекращается до того, как импульс нормальной реакции достигнет своего полного значения. Пусть J_* — импульс силы трения, накопленный к этому моменту.

Условие $v = R\omega$ даёт

$$R\omega_0 - \frac{7J_*}{2m} = 0,$$

откуда

$$J_* = \frac{2mR\omega_0}{7}.$$

Следовательно, в момент прекращения скольжения

$$v_* = \frac{2R\omega_0}{7}, \quad \omega_* = \frac{2\omega_0}{7}.$$

Эти скорости, определяющие касательное движение, остаются неизменными в течение оставшегося времени контакта. Чтобы убедиться в этом, предположим, что при $v = R\omega$ действует сила трения покоя f . Тогда

$$m\dot{v} = f, \quad I\dot{\omega} = -Rf, \quad \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

В совокупности эти уравнения дают

$$f \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) = 0,$$

и, следовательно, $f = 0$. Дополнительный касательный импульс не требуется.

Таким образом, горизонтальная скорость после удара равна

$$v = \frac{2R\omega_0}{7},$$

и

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}.$$

Этот результат охватывает также предельный случай $\omega_0 = 0$, когда скольжения нет и шар отскакивает вертикально.

Случай II(b): горизонтальное расстояние

Используя то же время полёта $T = 2w/g$, получаем

$$D = \frac{2R\omega_0}{7} \frac{2w}{g}.$$

Таким образом,

$$D = \frac{4R\omega_0}{7g} \sqrt{2agh} = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}.$$

Требуемый график

При фиксированных h, R, a, μ_k график состоит из двух участков:

- От $\omega_0 = 0$ до ω_c он представляет собой прямую, проходящую через начало координат, с угловым коэффициентом

$$\frac{2R}{7\sqrt{2agh}}.$$

- При ω_c он переходит в горизонтальную прямую на уровне

$$\mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Значения в точке соединения совпадают, поскольку

$$\frac{2R\omega_c}{7\sqrt{2agh}} = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

При больших начальных угловых скоростях трение уже действует в течение всего контакта, поэтому увеличение скорости вращения не может увеличить доступный касательный импульс.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Заряженные шарики, движущиеся по квадратному контуру в электрическом поле (теория относительности)

По квадратному контуру со стороной L движется большое число шариков пренебрежимо малого радиуса, каждый из которых имеет заряд q . В системе отсчёта, неподвижной относительно контура, скорость шариков равна u , а постоянное расстояние между ними равно a . Шарики расположены на контуре подобно бусинам на ожерелье, причём L гораздо больше a , как показано на рисунке 2.1. Непроводящая проволока, образующая контур, имеет однородную линейную плотность заряда в системе отсчёта контура. Её полный заряд равен по модулю и противоположен по знаку полному заряду шариков в этой системе отсчёта.

Рассмотрим ситуацию, в которой контур движется со скоростью v параллельно своей стороне AB (рис. 2.1) в однородном электрическом поле напряжённостью E , перпендикулярном скорости контура и составляющем угол θ с плоскостью контура.

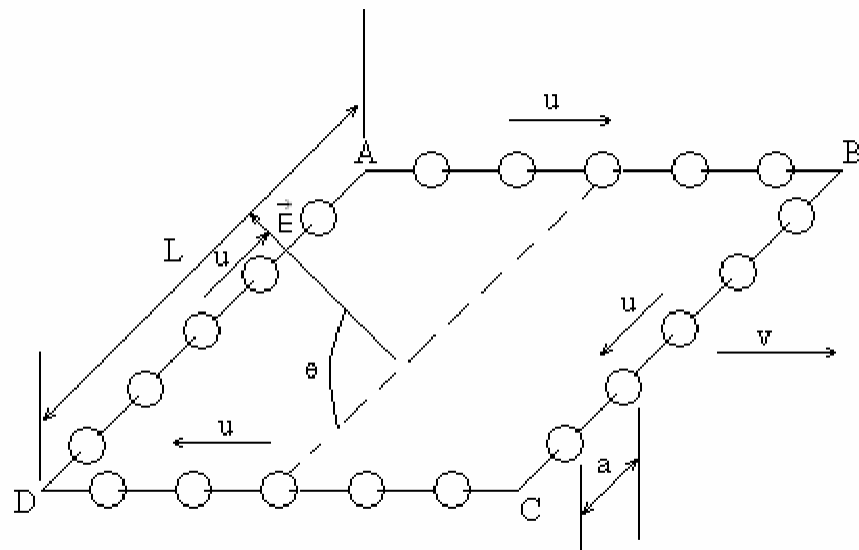


Figure 2.1

Рисунок 2.1

С учётом релятивистских эффектов вычислите следующие величины в системе отсчёта наблюдателя, относительно которого контур движется со скоростью v :

- Расстояния между шариками на каждой стороне контура: a_{AB} , a_{BC} , a_{CD} и a_{DA} .
- Суммарный заряд проволоки и шариков на каждой стороне контура: Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CD} и Q_{DA} .
- Модуль M момента электрических сил, стремящихся повернуть систему, состоящую из контура и шариков.
- Энергию W взаимодействия системы, состоящей из контура и шариков, с электрическим полем.

Все ответы следует выразить через величины, заданные в условии задачи.

Примечание. Электрический заряд изолированного тела не зависит от системы отсчёта, в которой проводятся измерения. Любыми эффектами электромагнитного излучения следует пренебречь.

Некоторые формулы специальной теории относительности

Рассмотрим систему отсчёта S' , движущуюся со скоростью V относительно другой системы отсчёта S . Оси систем отсчёта параллельны, а их начала совпадают при $t = 0$. Скорость V направлена вдоль положительного направления оси x .

Релятивистское сложение скоростей

Если частица движется со скоростью u' в направлении x' , измеренной в системе S' , то скорость частицы, измеренная в системе S , определяется выражением:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

Релятивистское сокращение длины

Если тело, покоящееся в системе S , имеет длину L_0 в направлении x , то наблюдатель в системе S' (движущейся со скоростью V в направлении x) измерит следующую длину этого тела:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Результаты получены в приближении непрерывного распределения заряда, обоснованном условием $L \gg a$, для направлений, показанных на рис. 2.1. Здесь c — скорость света.

• a)

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{BC} = a, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}, \quad a_{DA} = a.$$

• b)

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

• c)

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

• d) Для показанного направления поля, составляющая которого в плоскости контура направлена от AB к CD ,

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Решение

Пусть S' — система отсчёта покоя контура, а S — система отсчёта наблюдателя. Направим ось x вдоль $A \rightarrow B$, так что контур движется со скоростью $v\hat{x}$. Направим $\hat{y}$ вдоль $A \rightarrow D$, перпендикулярно AB в плоскости контура.

Введём обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \kappa = \frac{uv}{c^2}.$$

Поскольку $L \gg a$, заменим дискретные шарики непрерывным линейным распределением заряда на каждой прямолинейной стороне, пренебрегая флуктуациями, связанными с тем, что отдельные шарики входят в угол контура или выходят из него. В системе S' линейные плотности заряда шариков и проволоки соответственно равны

$$\lambda'_b = \frac{q}{a}, \quad \lambda'_w = -\frac{q}{a}.$$

а) Расстояния между шариками

Расстояние должно измеряться между положениями, зафиксированными **одновременно** в S . Такие события в общем случае не являются одновременными в S' .

На каждой из сторон, параллельных движению, обозначим скорость шариков в S' через w' , где

$$w' = +u \quad \text{на } AB, \quad w' = -u \quad \text{на } CD.$$

Выберем два соседних шарика, упорядоченных в направлении возрастания x' . Для событий на их траекториях

$$\Delta x' = a + w' \Delta t'.$$

Преобразование Лоренца даёт

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$$

Из условия $\Delta t = 0$ получаем

$$\Delta t' = -\frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta x' = a - \frac{vw'}{c^2} \Delta x', \quad \Delta x' = \frac{a}{1 + vw'/c^2}.$$

Преобразование пространственной координаты тогда даёт

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \Delta x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Таким образом,

$$a_{\parallel} = \frac{a}{\gamma(1 + vw'/c^2)}.$$

Подставляя обе скорости, получаем

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}.$$

На BC или DA все шарика, находящиеся на одной стороне, имеют одинаковую координату x' .

Поэтому $\Delta x' = 0$, и для одновременных наблюдений в S также выполняется $\Delta t' = 0$.

Поперечные расстояния не изменяются при преобразовании Лоренца, поэтому

$$a_{BC} = a_{DA} = a.$$

б) Суммарный заряд на каждой стороне

В системе S стороны, параллельные движению, сокращаются:

$$\ell_{AB} = \ell_{CD} = \frac{L}{\gamma}, \quad \ell_{BC} = \ell_{DA} = L.$$

Каждая сторона проволочного контура содержит фиксированный заряд

$$Q_w = -\frac{qL}{a}.$$

Он одинаков в обеих системах отсчёта, поскольку заряд инвариантен, а заряды проволоки не переходят с одной стороны на другую.

Число шариков на каждой стороне равно её наблюдаемой длине, делённой на соответствующее наблюдаемое расстояние между шариками:

$$N_{AB} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1+\kappa)]} = \frac{L}{a}(1+\kappa),$$

$$N_{CD} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1-\kappa)]} = \frac{L}{a}(1-\kappa),$$

а

$$N_{BC} = N_{DA} = \frac{L}{a}.$$

Складывая заряд проволоки с зарядом шариков, получаем

$$Q_{AB} = q\frac{L}{a}(1+\kappa) - \frac{qL}{a} = \frac{qL}{a}\kappa,$$

$$Q_{CD} = q\frac{L}{a}(1-\kappa) - \frac{qL}{a} = -\frac{qL}{a}\kappa.$$

Две поперечные стороны остаются нейтральными. Следовательно,

$$Q_{AB} = \frac{qLv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

Их сумма равна нулю, как и должно быть в силу инвариантности полного заряда. Заряд отдельной стороны не обязан оставаться нулевым, поскольку наборы шариков, находящихся на этой стороне в один и тот же момент времени, различаются в разных системах отсчёта.

с) Момент электрических сил

Обозначим

$$Q = \frac{qLv}{ac^2},$$

так что суммарные заряды на AB и CD равны Q и $-Q$.

В приближении непрерывного распределения эти заряды равномерно распределены вдоль соответствующих сторон. Равнодействующие сил, действующих на них, приложены к серединам сторон. Вектор, соединяющий эти середины, равен $L\hat{\mathbf{y}}$, поскольку это расстояние перпендикулярно движению контура и не сокращается.

Поэтому электрический дипольный момент равен

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_{AB} - Q\mathbf{r}_{CD} = -QL\hat{\mathbf{y}}.$$

В однородном электрическом поле суммарная сила равна нулю, а момент сил равен

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Составляющая поля в плоскости контура параллельна $\hat{\mathbf{y}}$ и не создаёт момента сил. Составляющая, перпендикулярная плоскости, равна $E \sin \theta$; она создаёт момент сил относительно оси, параллельной AB , модуль которого равен

$$M = |Q|LE \sin \theta.$$

Таким образом,

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

Эта величина измеряется в Н·м. Если под q понимается положительный модуль заряда, вместо $|q|$ можно просто написать q .

d) Энергия взаимодействия

Для однородного внешнего электрического поля

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

Энергия взаимодействия равна

$$W = \int \phi_{\text{ext}} dq.$$

Поскольку полный заряд системы равен нулю, вклад постоянной ϕ_0 обращается в нуль:

$$W = -\mathbf{E} \cdot \int \mathbf{r} dq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Обозначение угла на рис. 2.1 показывает, что составляющая $\mathbf{E}$ в плоскости контура направлена вдоль $A \rightarrow D$, поэтому

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} = E \cos \theta.$$

Используя $\mathbf{p} = -QL\hat{\mathbf{y}}$, получаем

$$W = QLE \cos \theta.$$

Следовательно,

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Эта величина измеряется в джоулях и обращается в нуль, когда поле перпендикулярно плоскости контура. При положительном q знак энергии положителен, поскольку электрический дипольный момент направлен противоположно составляющей поля в плоскости контура.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Лазерное охлаждение атомов

Чтобы исследовать свойства изолированных атомов с высокой точностью, необходимо в течение некоторого времени удерживать их почти в покое. Недавно был разработан метод, позволяющий это сделать. Он называется «лазерным охлаждением» и рассматривается в приведённой ниже задаче.

В вакуумной камере хорошо коллимированный пучок атомов Na^{23} (получаемых при испарении образца при 10^3 К) облучается встречным лазерным пучком высокой интенсивности (рис. 3.1). Частота лазера выбрана так, чтобы атомы со скоростью v_0

резонансно поглощали фотоны. При поглощении света эти атомы переходят на первый возбуждённый энергетический уровень, среднее значение энергии которого превышает энергию основного состояния на E , а неопределённость энергии составляет Γ (рис. 3.2).

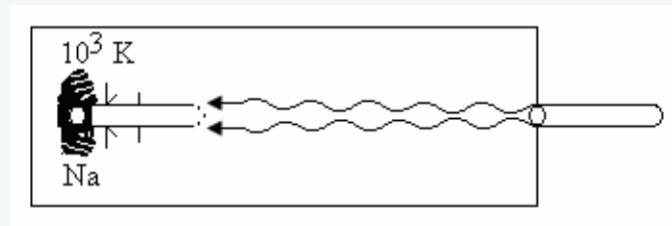


Рисунок 3.1

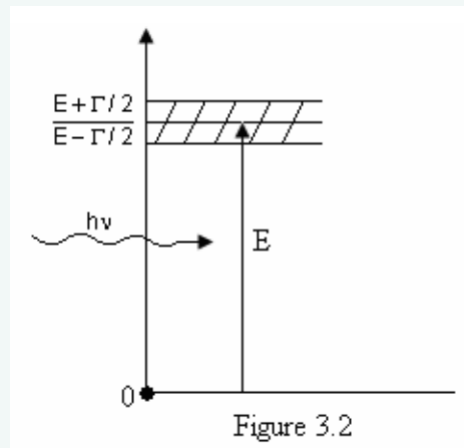


Рисунок 3.2

В этом процессе уменьшение скорости атома Δv_1 определяется выражением $\Delta v_1 = v_1 - v_0$. Затем атом испускает свет, возвращаясь в основное состояние. Скорость атома изменяется на $\Delta v' = v'_1 - v_1$, а направление его движения изменяется на угол φ (рис. 3.3).

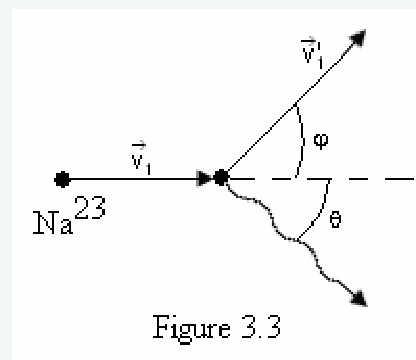


Рисунок 3.3

Эта последовательность поглощения и испускания повторяется много раз, пока скорость атомов не уменьшится на некоторую величину Δv , при которой резонансное поглощение света с частотой ν прекращается. Тогда для поддержания резонансного поглощения необходимо изменить частоту лазера. Атомы, движущиеся с новой скоростью, продолжают замедляться, пока скорость некоторых из них не станет близкой к нулю.

В первом приближении можно пренебречь всеми процессами взаимодействия атомов, кроме описанных выше спонтанных поглощения и испускания света.

Кроме того, можно считать, что интенсивность лазера настолько велика, что атомы практически не проводят времени в основном состоянии.

Вопросы

- Найдите частоту лазера, необходимую для обеспечения резонансного поглощения света теми атомами, кинетическая энергия которых атомов в области за коллиматором. Найдите также уменьшение скорости этих атомов Δv_1 после поглощения.
- Свет с частотой, рассчитанной в вопросе а), поглощается атомами, скорости которых лежат в некотором интервале Δv_0 . Вычислите ширину этого интервала скоростей.
- При испускании света атомом направление его движения отклоняется от первоначального на угол φ . Вычислите φ .
- Найдите максимально возможное уменьшение скорости Δv при заданной частоте.
- Каково приблизительное число N актов поглощения–испускания, необходимое для уменьшения скорости атома от начального значения v_0 — найденного выше в вопросе а) — почти до нуля? Считайте, что атом движется по прямой.
- Найдите время t , за которое происходит процесс, описанный в вопросе е. Вычислите расстояние ΔS , которое атом проходит за это время.

Данные

$$\begin{aligned}E &= 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ \Gamma &= 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \\ m_p &= 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ h &= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ k &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}\end{aligned}$$

где c — скорость света, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, а m_p — масса протона.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Численные результаты получены с использованием предполагаемого условия пункта (а), $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT$, которое даёт $v_0 = 1.04 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

- a)

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)} \simeq 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Это приблизительно на $1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$ ниже резонансной частоты неподвижного атома.

$$\Delta v_1 \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

Положительная величина уменьшения скорости составляет $2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

- b) Полная ширина резонансного интервала скоростей равна

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1},$$

причём интервал простирается приблизительно от $v_0 - 3.1 \text{ m s}^{-1}$ до $v_0 + 3.1 \text{ m s}^{-1}$.

- c) Для угла испускания θ , показанного на рисунке 3.3, обозначим $v_r = E/(mc)$. Тогда

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

Максимальное отклонение в начале процесса составляет приблизительно $2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$.

- d) При начальной скорости v_0 , соответствующей центру резонансного интервала,

$$\Delta v \simeq \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Атом, начальная скорость которого соответствует верхней границе резонансного интервала, может пройти весь интервал скоростей шириной приблизительно 6.3 m s^{-1} .

- e) При перестройке частоты лазера в ходе замедления

$$N \simeq \frac{mc v_0}{E} \simeq 3.6 \times 10^4.$$

- f) Принимая Γ за полную естественную ширину линии по энергии, получаем

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.54 \text{ ms}, \quad \Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

Решение

а) Резонансная частота и отдача при поглощении

В предоставленном тексте предложение, задающее начальную кинетическую энергию, неполно. Будем использовать предположительно подразумеваемое условие: выбранные атомы имеют среднюю тепловую кинетическую энергию:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} k T.$$

Приближённо принимая массу атома натрия равной $23m_p$, получаем

$$m = 23(1.67 \times 10^{-27}) = 3.841 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

и, следовательно,

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(10^3)}{3.841 \times 10^{-26}}} = 1.038 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

Таким образом, $v_0/c \simeq 3.46 \times 10^{-6}$, поэтому достаточно нерелятивистской механики и формулы Доплера в первом приближении.

Выберем положительное направление вдоль падающего атомного пучка. Импульс встречного фотона равен $-h\nu/c$. Закон сохранения импульса при поглощении даёт

$$mv_1 = mv_0 - \frac{h\nu}{c},$$

откуда

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\frac{h\nu}{mc}.$$

Закон сохранения энергии даёт

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + E.$$

Подставляя соотношение для импульсов, получаем

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2}.$$

Последний член представляет собой энергию отдачи. Её значение приблизительно равно

$$E_r \simeq \frac{E^2}{2mc^2} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ J},$$

что мало даже по сравнению с $\Gamma = 7.0 \times 10^{-27} \text{ J}$. Пренебрегая ею, получаем

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)}.$$

Это также условие доплеровского резонанса: приближающийся атом воспринимает частоту $\nu(1 + v_0/c)$, которая должна быть равна E/h .

Для наглядности временно сохраним дополнительные цифры:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{rest}} &= \frac{E}{h} = 5.0755287 \times 10^{14} \text{ Hz}, \\ \nu &\simeq 5.0755111 \times 10^{14} \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Следовательно, необходимая частота лазера ниже резонансной частоты неподвижного атома на

$$\nu_{\text{rest}} - \nu \simeq \nu_{\text{rest}} \frac{v_0}{c} = 1.76 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

Изменение скорости вследствие отдачи при поглощении равно

$$\Delta v_1 = -\frac{h\nu}{mc} \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

Его знак отрицателен в соответствии с определением, приведённым в условии.

б) Резонансный интервал скоростей

В соответствии с интервалом энергий, показанным на рисунке 3.2, будем считать, что резонанс имеет место, когда энергия фотона с учётом доплеровского сдвига лежит между $E - \Gamma/2$ и $E + \Gamma/2$:

$$E - \frac{\Gamma}{2} \leq h\nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) \leq E + \frac{\Gamma}{2}.$$

Следовательно, граничные скорости равны

$$v_{\pm} = c \left(\frac{E \pm \Gamma/2}{h\nu} - 1 \right).$$

Поскольку лазер настроен на центр линии для скорости v_0 ,

$$v_{\pm} = v_0 \pm \frac{c\Gamma}{2h\nu}.$$

Таким образом, полная ширина интервала скоростей равна

$$\Delta v_0 = v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu}.$$

Используя $h\nu \simeq E$, получаем

$$\Delta v_0 \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)(7.0 \times 10^{-27})}{3.36 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m s}^{-1} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

Полуширина составляет приблизительно 3.1 m s^{-1} .

с) Отклонение вследствие спонтанного испускания

Импульс испущенного фотона приблизительно равен E/c . Определим соответствующую скорость отдачи:

$$v_r = \frac{E}{mc} \simeq 2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

Малыми поправками к энергии испущенного фотона, обусловленными эффектом Доплера и отдачей, здесь можно пренебречь.

В геометрии рисунка 3.3 фотон движется под углом θ ниже первоначального направления. Закон сохранения импульса в проекциях на это направление и на перпендикулярное ему направление даёт

$$\begin{aligned} mv_1 &= mv'_1 \cos \varphi + \frac{E}{c} \cos \theta, \\ mv'_1 \sin \varphi &= \frac{E}{c} \sin \theta. \end{aligned}$$

Деля соответствующие выражения, получаем

$$\tan \varphi = \frac{v_r \sin \theta}{v_1 - v_r \cos \theta}.$$

В начале процесса $v_r \ll v_1$, поэтому

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta.$$

При $v_1 \simeq 1038.16 \text{ m s}^{-1}$

$$\varphi \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

Наибольшее отклонение возникает при испускании приблизительно перпендикулярно скорости атома. Точнее, при фиксированном импульсе фотона

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{v_r}{v_1} \right) \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

Таким образом, одно испускание лишь очень слабо изменяет первоначальное направление. Для получения однозначного значения φ необходимо задать случайный угол испускания θ .

d) Максимальное уменьшение скорости при фиксированной частоте лазера

Рассмотрим сначала атом с начальной скоростью v_0 , соответствующей центру резонансного интервала, как в пункте (а). По мере его замедления энергия фотона в системе отсчёта атома уменьшается. Нижняя граница резонансного интервала достигается при

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c} \right) = E - \frac{\Gamma}{2}.$$

Вычитая это равенство из

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) = E$$

получаем

$$\frac{h\nu}{c} \Delta v = \frac{\Gamma}{2}.$$

Следовательно, с точностью, соответствующей принятому в задаче описанию ширины линии,

$$\Delta v = \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Если под «максимально возможным» понимается результат для всех начальных скоростей, при которых атомы могут поглощать свет лазера данной фиксированной частоты, то атом может иметь начальную скорость v_+ и замедлиться до v_- . Тогда максимальный интервал изменения скорости равен

$$v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

Оба значения значительно меньше v_0 . Поэтому для дальнейшего замедления необходимо по мере уменьшения скорости атомов повышать частоту лазера, приближая её к E/h .

e) Число актов поглощения–испускания

Каждое поглощение вызывает направленное изменение импульса атома, приблизительно равное

$$\Delta p_{x,\text{abs}} = -\frac{E}{c}.$$

При спонтанном испускании в системе отсчёта атома нет предпочтения направления вперёд или назад. Следовательно, в принятом приближении

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \Delta p_{x,\text{em}} \rangle = 0.$$

Поэтому среднее изменение продольной скорости за один полный цикл равно

$$\langle \Delta v_x \rangle = -v_r = -\frac{E}{mc}.$$

Используя указанное в условии приближение прямолинейного движения и перестраивая лазер для поддержания резонанса, получаем

$$Nv_r \simeq v_0.$$

Отсюда

$$N \simeq \frac{v_0}{v_r} = \frac{mc v_0}{E}.$$

Численно

$$N \simeq \frac{(3.841 \times 10^{-26})(3.0 \times 10^8)(1038.19)}{3.36 \times 10^{-19}} = 3.56 \times 10^4.$$

Таким образом, требуется приблизительно

$$N \simeq 3.6 \times 10^4$$

циклов. Эта оценка описывает уменьшение средней направленной скорости; отдельные атомы испытывают случайную отдачу при испускании.

f) Время охлаждения и пройденное расстояние

Для возбуждённого состояния со средним временем жизни τ полная естественная ширина линии по энергии удовлетворяет соотношению

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

Здесь Γ принимается за полную ширину, что согласуется с границами $E \pm \Gamma/2$. Таким образом,

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{h}{2\pi\Gamma}.$$

Численно

$$\tau = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{2\pi(7.0 \times 10^{-27})} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

Согласно явно сформулированному предположению, атомы практически не проводят времени в основном состоянии, поэтому средняя длительность одного цикла равна τ . Следовательно,

$$t = N\tau = (3.56 \times 10^4)(1.51 \times 10^{-8}) \simeq 5.36 \times 10^{-4} \text{ s},$$

или

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

Средняя отдача за цикл и средняя длительность цикла приблизительно постоянны. Поэтому среднее ускорение замедления имеет постоянный модуль

$$a = \frac{v_r}{\tau} \simeq 1.94 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}.$$

При замедлении от v_0 почти до нуля средняя скорость за всё время процесса равна $v_0/2$, откуда

$$\Delta S \simeq \frac{v_0 t}{2} = \frac{(1038.19)(5.36 \times 10^{-4})}{2} \simeq 0.278 \text{ m.}$$

Следовательно,

$$\boxed{\Delta S \simeq 0.28 \text{ m.}}$$

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.