

IPhO 1991

Problemas teóricos y soluciones · La Habana, Cuba · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1991/

Problema 1: Pelota en rotación que rebota en el suelo

La figura 1.1 muestra una pelota maciza y homogénea de radio R . Antes de caer al suelo, su centro de masas está en reposo, pero la pelota gira con velocidad angular ω_0 alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. El punto más bajo de la pelota se encuentra a una altura h sobre el suelo.

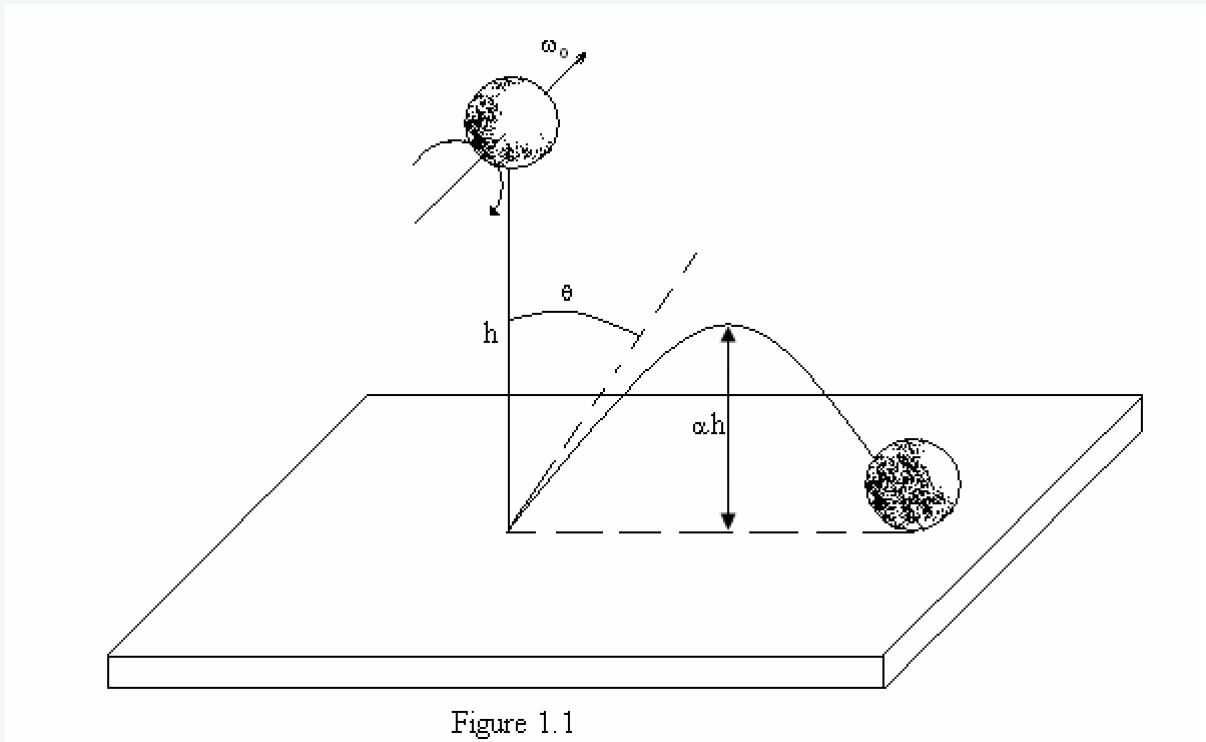


Figure 1.1

Figura 1.1

Al soltarla, la pelota cae bajo la acción de la gravedad y rebota hasta una nueva altura, de modo que su punto más bajo se encuentra ahora a una altura ah sobre el suelo. La deformación de la pelota y del suelo durante el impacto puede considerarse despreciable. Ignore la presencia del aire. Sin embargo, la duración del impacto es finita.

La masa de la pelota es m , la aceleración de la gravedad es g , el coeficiente de rozamiento cinético entre la pelota y el suelo es μ_k , y el momento de inercia de la pelota respecto al eje dado es:

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

Se pide considerar dos situaciones: en la primera, la pelota desliza durante todo el impacto y, en la segunda, el deslizamiento cesa antes de que termine el impacto.

Situación I: deslizamiento durante todo el impacto.

Determine:

- a) $\tan \theta$, donde θ es el ángulo de rebote indicado en el diagrama;
- b) la distancia horizontal recorrida en vuelo entre el primer y el segundo impacto;
- c) el valor mínimo de ω_0 para esta situación.

Situación II: deslizamiento durante parte del impacto.

Determine de nuevo:

- a) $\tan \theta$;
- b) la distancia horizontal recorrida en vuelo entre el primer y el segundo impacto.

Teniendo en cuenta las dos situaciones anteriores, esboce la variación de $\tan \theta$ con ω_0 .

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea D la distancia horizontal recorrida durante el vuelo tras el rebote. En la aproximación habitual de impacto breve, en la que se desprecia el impulso de la gravedad durante el contacto:

- **Situación I(a):**

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

- **Situación I(b):**

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a} (1 + \sqrt{a})$$

- **Situación I(c):**

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh} (1 + \sqrt{a})$$

En el caso de igualdad, el deslizamiento cesa exactamente en el instante de separación. Para que haya deslizamiento en el instante de separación se requiere $\omega_0 > \omega_c$.

- **Situación II(a):**

$$\tan \theta = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}$$

- **Situación II(b):**

$$D = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}$$

• **Esbozo solicitado:**

$$\tan \theta = \begin{cases} \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}, & 0 \leq \omega_0 < \omega_c, \\ \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, & \omega_0 \geq \omega_c. \end{cases}$$

La gráfica crece linealmente desde el origen hasta un punto anguloso situado en

$$\left(\omega_c, \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right),$$

y después permanece horizontal. Es continua en el punto anguloso.

Solución

Rapideces de vuelo y ecuaciones del impacto

Sea u la rapidez descendente inmediatamente antes del impacto y w la rapidez ascendente inmediatamente después del impacto. La energía mecánica se conserva durante cada vuelo libre, por lo que

$$u = \sqrt{2gh}, \quad w = \sqrt{2gah} = \sqrt{a} u.$$

El centro de masas desciende una distancia h y asciende una distancia ah , porque su altura siempre supera en R la del punto más bajo.

Elijamos como sentido horizontal positivo el de la fuerza de rozamiento sobre la pelota que gira inicialmente. Denotemos por v la velocidad horizontal del centro de masas y tomemos ω positiva en el sentido de giro inicial. La velocidad horizontal del punto más bajo es entonces

$$v - R\omega.$$

Inicialmente vale $-R\omega_0$, de modo que el rozamiento acelera el centro de masas y reduce la velocidad de giro.

Sea el impulso normal

$$P = \int_{\text{impacto}} N dt.$$

Para una duración del contacto τ , el teorema del impulso y la cantidad de movimiento en la dirección vertical da

$$P - mg\tau = m(u + w).$$

En la aproximación habitual de impacto breve,

$$g\tau \ll u + w,$$

y, por tanto,

$$P \simeq m(u + w).$$

El impacto puede tener una duración finita y satisfacer esta aproximación.

Sea J el impulso horizontal acumulado de la fuerza de rozamiento. Los teoremas del impulso y la cantidad de movimiento, y del impulso angular y el momento angular, dan

$$mv = J, \quad I(\omega - \omega_0) = -RJ.$$

Usando $I = 2mR^2/5$,

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5J}{2mR}.$$

En consecuencia,

$$R\omega - v = R\omega_0 - \frac{7J}{2m}.$$

Esta magnitud disminuye monótonamente mientras la pelota desliza. El deslizamiento cesa cuando se anula.

Situación I(a): ángulo de rebote

Si el deslizamiento continúa durante todo el impacto, la fuerza de rozamiento tiene módulo $\mu_k N$ en todo momento. Por tanto,

$$J = \mu_k P = \mu_k m(u + w),$$

y la rapidez horizontal de salida es

$$v = \mu_k(u + w).$$

El ángulo θ de la figura se mide respecto a la vertical, de modo que

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \mu_k \frac{u + w}{w}.$$

Como $w = \sqrt{a}u$,

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Situación I(b): distancia horizontal

La pelota sale y regresa a la misma altura del centro de masas, R . Por tanto, su tiempo de vuelo T satisface

$$0 = wT - \frac{1}{2}gT^2,$$

de donde se obtiene

$$T = \frac{2w}{g}.$$

La velocidad horizontal permanece constante durante el vuelo, por lo que

$$D = vT = \frac{2\mu_k(u + w)w}{g}.$$

Sustituyendo $u^2 = 2gh$ y $w = \sqrt{a}u$,

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}).$$

Situación I(c): velocidad angular inicial mínima

Como $R\omega - v$ disminuye monótonamente durante el deslizamiento, basta con comprobar su valor al final del impacto. En el límite entre las dos situaciones, se anula exactamente en el instante de separación:

$$R\omega_0 - \frac{7J}{2m} = 0.$$

Con $J = \mu_k m(u + w)$, se obtiene

$$\omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}(u + w).$$

Así,

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}\sqrt{2gh}(1 + \sqrt{a}).$$

Para $\omega_0 > \omega_c$, el deslizamiento persiste incluso en el instante de separación. Para $\omega_0 = \omega_c$, persiste hasta el último instante del contacto.

Situación II(a): ángulo de rebote

Cuando $0 < \omega_0 < \omega_c$, el deslizamiento cesa antes de que se complete el impulso normal. Sea J_* el impulso de rozamiento acumulado en ese instante. La condición $v = R\omega$ da

$$R\omega_0 - \frac{7J_*}{2m} = 0,$$

por lo que

$$J_* = \frac{2mR\omega_0}{7}.$$

Por tanto, en el instante en que cesa el deslizamiento,

$$v_* = \frac{2R\omega_0}{7}, \quad \omega_* = \frac{2\omega_0}{7}.$$

Estas velocidades tangenciales permanecen invariables durante el resto del contacto. Para verlo, supongamos que actúa una fuerza de rozamiento estático f mientras $v = R\omega$. Entonces

$$m\dot{v} = f, \quad I\dot{\omega} = -Rf, \quad \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

Estas ecuaciones implican conjuntamente

$$f \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) = 0,$$

y, por tanto, $f = 0$. No se requiere ningún impulso tangencial adicional.

La rapidez horizontal de salida es, por tanto,

$$v = \frac{2R\omega_0}{7},$$

y

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}.$$

El resultado también incluye el caso límite $\omega_0 = 0$, en el que no hay deslizamiento y el rebote es vertical.

Situación II(b): distancia horizontal

Usando el mismo tiempo de vuelo $T = 2w/g$,

$$D = \frac{2R\omega_0}{7} \frac{2w}{g}.$$

Así,

$$D = \frac{4R\omega_0}{7g} \sqrt{2agh} = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}.$$

Esbozo solicitado

Para valores fijos de h, R, a, μ_k , la gráfica tiene dos tramos:

- Desde $\omega_0 = 0$ hasta ω_c , es una recta que pasa por el origen con pendiente

$$\frac{2R}{7\sqrt{2agh}}.$$

- En ω_c , se une a una recta horizontal de ordenada

$$\mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Los valores en el punto de unión coinciden porque

$$\frac{2R\omega_c}{7\sqrt{2agh}} = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Para velocidades de giro iniciales mayores, el rozamiento ya actúa durante todo el contacto, de modo que aumentar la velocidad de giro no puede aumentar el impulso tangencial disponible.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Bolas cargadas que se mueven a lo largo de un circuito cuadrado en un campo eléctrico (relatividad)

En un circuito cuadrado de lado L , un gran número de bolas de radio despreciable, cada una con una carga q , se mueven con una rapidez u y una separación constante a entre ellas, según se observa desde un sistema de referencia fijo respecto al circuito. Las bolas están dispuestas sobre el circuito como las cuentas de un collar, siendo L mucho mayor que a , como se indica en la figura 2.1. El hilo no conductor que forma el circuito tiene una densidad de carga homogénea por unidad de longitud en el sistema de referencia del circuito. Su carga total es igual en magnitud y de signo opuesto a la carga total de las bolas en ese sistema.

Considérese la situación en la que el circuito se mueve con una velocidad v paralela a su lado AB (fig. 2.1) a través de un campo eléctrico homogéneo de intensidad E , que es perpendicular a la velocidad del circuito y forma un ángulo θ con el plano del circuito.

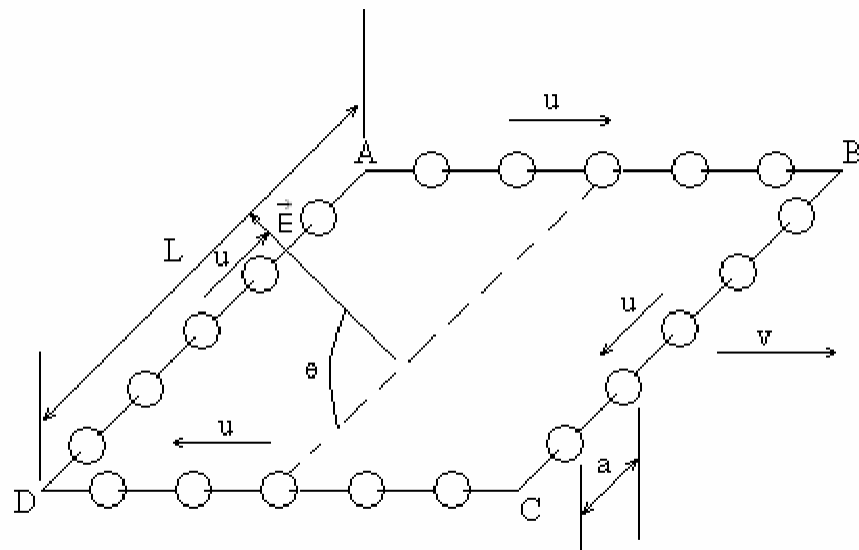


Figure 2.1

Figura 2.1

Teniendo en cuenta los efectos relativistas, calcule las siguientes magnitudes en el sistema de referencia de un observador que ve el circuito moverse con velocidad v :

- La separación entre las bolas en cada uno de los lados del circuito, a_{AB} , a_{BC} , a_{CD} y a_{DA} .
- El valor de la carga neta del conjunto formado por el circuito y las bolas en cada uno de los lados del circuito: Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CD} y Q_{DA} .
- El módulo M del momento de las fuerzas eléctricas que tiende a hacer girar el sistema formado por el circuito y las bolas.
- La energía W debida a la interacción del sistema formado por el circuito y las bolas con el campo eléctrico.

Todas las respuestas deben expresarse en función de las magnitudes especificadas en el problema.

Nota. La carga eléctrica de un objeto aislado es independiente del sistema de referencia en el que se realizan las medidas. Deben ignorarse todos los efectos de la radiación electromagnética.

Algunas fórmulas de la relatividad especial

Considérese un sistema de referencia S' que se mueve con velocidad V respecto a otro sistema de referencia S . Los ejes de los sistemas son paralelos y sus orígenes coinciden en $t = 0$. V está dirigida en el sentido positivo del eje x .

Composición relativista de velocidades

Si una partícula se mueve con velocidad u' en la dirección x' , medida en S' , la velocidad de la partícula medida en S viene dada por:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

Contracción relativista

Si un objeto en reposo en el sistema S tiene una longitud L_0 en la dirección x , un observador en el sistema S' (que se mueve con velocidad V en la dirección x) medirá la siguiente longitud:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los resultados utilizan la aproximación de carga continua, justificada por $L \gg a$, con los sentidos indicados en la fig. 2.1. Aquí c es la velocidad de la luz.

• a)

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{BC} = a, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}, \quad a_{DA} = a.$$

• b)

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

• c)

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

• d) Para el sentido del campo indicado, cuya componente en el plano apunta desde AB hacia CD ,

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Solución

Sea S' el sistema de referencia en reposo respecto al circuito y S el sistema del observador. Tomemos el eje x en el sentido $A \rightarrow B$, de modo que el circuito se mueve con velocidad $v\hat{x}$. Tomemos $\hat{y}$ en el sentido $A \rightarrow D$, perpendicular a AB dentro del plano del circuito.

Definimos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \kappa = \frac{uv}{c^2}.$$

Como $L \gg a$, sustituimos las bolas discretas por una distribución lineal continua de carga en cada lado recto, despreciando las fluctuaciones asociadas al paso de bolas individuales hacia un vértice o desde él. En S' , las densidades de carga de las bolas y del hilo son, respectivamente,

$$\lambda'_b = \frac{q}{a}, \quad \lambda'_w = -\frac{q}{a}.$$

a) Separación entre las bolas

La separación debe medirse entre posiciones registradas **simultáneamente en S** . En general, estos sucesos no son simultáneos en S' .

En cualquiera de los dos lados paralelos al movimiento, sea w' la velocidad de las bolas en S' , donde

$$w' = +u \quad \text{en } AB, \quad w' = -u \quad \text{en } CD.$$

Elegimos dos bolas vecinas ordenadas en el sentido creciente de x' . Para sucesos en sus trayectorias,

$$\Delta x' = a + w' \Delta t'.$$

La transformación de Lorentz da

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$$

Al exigir $\Delta t = 0$, se obtiene

$$\Delta t' = -\frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta x' = a - \frac{vw'}{c^2} \Delta x', \quad \Delta x' = \frac{a}{1 + vw'/c^2}.$$

La transformación espacial da entonces

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \Delta x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Así,

$$a_{\parallel} = \frac{a}{\gamma(1 + vw'/c^2)}.$$

Sustituyendo las dos velocidades,

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}.$$

En BC o DA , todas las bolas de un mismo lado tienen la misma x' . Por tanto, $\Delta x' = 0$, y las observaciones simultáneas en S también cumplen $\Delta t' = 0$. Las distancias transversales no cambian bajo la transformación de Lorentz, por lo que

$$a_{BC} = a_{DA} = a.$$

b) Carga neta en cada lado

En S , los lados paralelos al movimiento se contraen:

$$\ell_{AB} = \ell_{CD} = \frac{L}{\gamma}, \quad \ell_{BC} = \ell_{DA} = L.$$

Cada lado del hilo contiene una carga fija

$$Q_w = -\frac{qL}{a}.$$

Esta es la misma en ambos sistemas de referencia porque la carga es invariante y las cargas del hilo no se desplazan de un lado a otro.

El número de bolas en cada lado es su longitud observada dividida por la separación observada correspondiente:

$$N_{AB} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1+\kappa)]} = \frac{L}{a}(1+\kappa),$$

$$N_{CD} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1-\kappa)]} = \frac{L}{a}(1-\kappa),$$

y

$$N_{BC} = N_{DA} = \frac{L}{a}.$$

Al sumar la carga del hilo a la carga de las bolas, se obtiene

$$Q_{AB} = q\frac{L}{a}(1+\kappa) - \frac{qL}{a} = \frac{qL}{a}\kappa,$$

$$Q_{CD} = q\frac{L}{a}(1-\kappa) - \frac{qL}{a} = -\frac{qL}{a}\kappa.$$

Los dos lados transversales permanecen neutros. Por tanto,

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

Su suma es cero, como exige la invariancia de la carga total. La carga de un lado individual no tiene por qué seguir siendo cero, porque las bolas que ocupan ese lado en un mismo instante difieren entre sistemas de referencia.

c) Momento de las fuerzas eléctricas

Escribimos

$$Q = \frac{qLuv}{ac^2},$$

de modo que las cargas netas en AB y CD son Q y $-Q$.

En la aproximación continua, estas cargas están distribuidas uniformemente a lo largo de sus respectivos lados. Las fuerzas resultantes sobre ellas actúan en los puntos medios de los lados. La separación entre esos puntos medios es $L\hat{y}$, ya que esta distancia es perpendicular al movimiento del circuito y no se contrae.

El momento dipolar eléctrico es, por tanto,

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_{AB} - Q\mathbf{r}_{CD} = -QL\hat{y}.$$

En un campo eléctrico uniforme, la fuerza total es cero, mientras que el momento de las fuerzas es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

La componente del campo en el plano del circuito es paralela a $\hat{y}$ y no produce momento de fuerza. La componente perpendicular al plano es $E \sin \theta$, lo que da un momento de fuerza respecto a un eje paralelo a AB , de módulo

$$M = |Q|LE \sin \theta.$$

Así,

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

Esta expresión tiene unidades de N m. Si q se interpreta como una magnitud positiva de carga, $|q|$ puede escribirse simplemente como q .

d) Energía de interacción

Para un campo eléctrico externo uniforme,

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

La energía de interacción es

$$W = \int \phi_{\text{ext}} dq.$$

Como la carga total del sistema es cero, la constante ϕ_0 se cancela:

$$W = -\mathbf{E} \cdot \int \mathbf{r} dq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

La indicación del ángulo en la fig. 2.1 sitúa la componente de $\mathbf{E}$ en el plano en el sentido $A \rightarrow D$, por lo que

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} = E \cos \theta.$$

Utilizando $\mathbf{p} = -QL\hat{\mathbf{y}}$,

$$W = QLE \cos \theta.$$

Por tanto,

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Esta expresión tiene unidades de julios y se anula cuando el campo es perpendicular al circuito. Para q positiva, el signo positivo se debe a que el momento dipolar eléctrico se opone a la componente del campo en el plano.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Enfriamiento de átomos mediante láser

Para estudiar las propiedades de átomos aislados con un alto grado de precisión, es necesario mantenerlos casi en reposo durante cierto tiempo. Recientemente se ha desarrollado un método para lograrlo. Se denomina «enfriamiento por láser» y se ilustra en el problema siguiente.

En una cámara de vacío, un haz bien colimado de átomos de Na^{23} (procedentes de la evaporación de una muestra a 10^3 K) se ilumina frontalmente con un haz láser de alta intensidad (fig. 3.1). La frecuencia del láser se elige de modo que los átomos cuya velocidad es v_0 absorban un fotón de forma resonante. Al absorber la luz, estos átomos se excitan al primer nivel de energía, situado, en valor medio, a una energía E por encima del estado fundamental y con una incertidumbre de Γ (fig. 3.2).

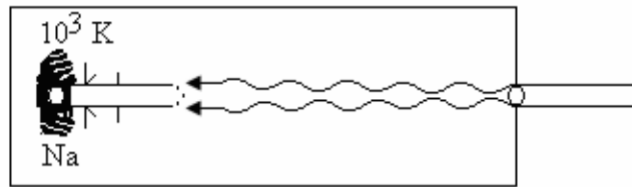


Figura 3.1

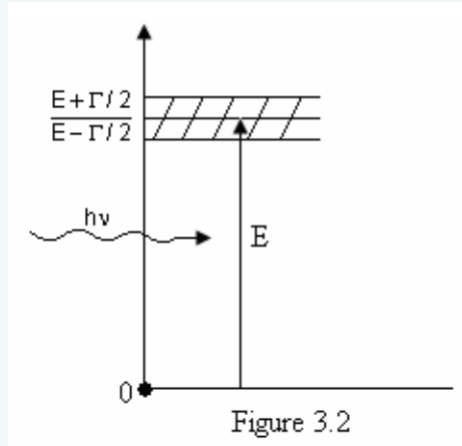


Figure 3.2

Figura 3.2

En este proceso, la disminución de la velocidad del átomo, Δv_1 , viene dada por $\Delta v_1 = v_1 - v_0$. A continuación, el átomo emite luz al volver a su estado fundamental. La velocidad del átomo cambia en $\Delta v' = v'_1 - v_1$ y su dirección de movimiento cambia un ángulo φ (fig. 3.3).

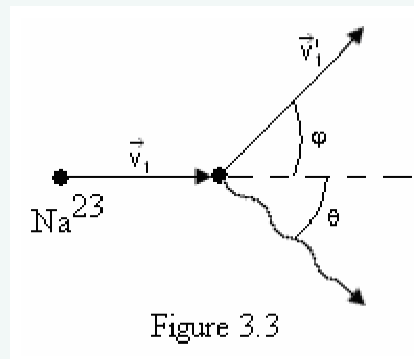


Figure 3.3

Figura 3.3

Esta secuencia de absorción y emisión se repite muchas veces hasta que la velocidad de los átomos ha disminuido en una cantidad determinada Δv , de modo que deja de producirse la absorción resonante de luz de frecuencia ν . Entonces es necesario cambiar la frecuencia del láser para mantener la absorción resonante. Los átomos que se mueven con la nueva velocidad siguen frenándose hasta que algunos alcanzan una velocidad próxima a cero.

En una primera aproximación, podemos ignorar todos los procesos de interacción atómica salvo la absorción y la emisión espontánea de luz descritas anteriormente.

Además, podemos suponer que el láser es tan intenso que los átomos prácticamente no permanecen tiempo alguno en el estado fundamental.

Preguntas

- a) Halle la frecuencia del láser necesaria para garantizar la absorción resonante de la luz por aquellos átomos cuya energía cinética de los átomos en la región situada detrás del colimador. Halle también la reducción de la velocidad de estos átomos, Δv_1 , tras el proceso de absorción.
- b) La luz de la frecuencia calculada en la pregunta a) es absorbida por átomos cuyas velocidades se encuentran dentro de un intervalo Δv_0 . Calcule este intervalo de velocidades.
- c) Cuando un átomo emite luz, su dirección de movimiento cambia un ángulo φ respecto a la dirección inicial. Calcule φ .
- d) Halle la máxima disminución posible de la velocidad Δv para una frecuencia dada.
- e) ¿Cuál es el número aproximado N de procesos de absorción-emisión necesarios para reducir la velocidad de un átomo desde su valor inicial v_0 —hallado en la pregunta a) anterior— hasta un valor casi nulo? Suponga que el átomo se desplaza en línea recta.
- f) Halle el tiempo t que tarda el proceso de la pregunta e. Calcule la distancia ΔS que recorre un átomo durante este tiempo.

Datos

$$\begin{aligned}
 E &= 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
 \Gamma &= 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J} \\
 c &= 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \\
 m_p &= 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
 h &= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
 k &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}
 \end{aligned}$$

donde c es la velocidad de la luz, h es la constante de Planck, k es la constante de Boltzmann y m_p es la masa del protón.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los resultados numéricos utilizan la condición que se supone pretendida en (a), $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT$, que da $v_0 = 1.04 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

- a)

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)} \simeq 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Esta frecuencia está aproximadamente $1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$ por debajo de la resonancia del átomo en reposo.

$$\Delta v_1 \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

La magnitud positiva de la reducción de la rapidez es $2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

- **b)** El intervalo completo de velocidades resonantes es

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1},$$

y se extiende aproximadamente desde $v_0 - 3.1 \text{ m s}^{-1}$ hasta $v_0 + 3.1 \text{ m s}^{-1}$.

- **c)** Para el ángulo de emisión θ mostrado en la figura 3.3, sea $v_r = E/(mc)$. Entonces

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

La desviación inicial máxima es aproximadamente $2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$.

- **d)** Partiendo de la velocidad resonante central v_0 ,

$$\Delta v \simeq \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Un átomo que parte del extremo superior del intervalo resonante puede recorrer el intervalo completo, de aproximadamente 6.3 m s^{-1} .

- **e)** Reajustando la frecuencia del láser durante el frenado,

$$N \simeq \frac{mc v_0}{E} \simeq 3.6 \times 10^4.$$

- **f)** Tomando Γ como la anchura natural completa de la línea en energía,

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.54 \text{ ms}, \quad \Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

Solución

a) Frecuencia resonante y retroceso por absorción

La frase que especifica la energía cinética inicial está incompleta en el texto proporcionado. Utilizamos la condición probablemente pretendida de que los átomos seleccionados tienen la energía cinética térmica media:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} kT.$$

Aproximando la masa del átomo de sodio por $23m_p$,

$$m = 23(1.67 \times 10^{-27}) = 3.841 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

y, por tanto,

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(10^3)}{3.841 \times 10^{-26}}} = 1.038 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

Así, $v_0/c \simeq 3.46 \times 10^{-6}$, por lo que bastan la mecánica no relativista y la fórmula Doppler de primer orden.

Elegimos el sentido positivo a lo largo del haz atómico incidente. El fotón que se propaga en sentido opuesto tiene un momento lineal $-\hbar\nu/c$. La conservación del momento lineal durante la absorción da

$$m v_1 = m v_0 - \frac{\hbar\nu}{c},$$

de donde

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\frac{h\nu}{mc}.$$

La conservación de la energía da

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + E.$$

Sustituyendo la relación para el momento lineal,

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2}.$$

El último término es la energía de retroceso. Su valor es aproximadamente

$$E_r \simeq \frac{E^2}{2mc^2} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ J},$$

que es pequeño incluso en comparación con $\Gamma = 7.0 \times 10^{-27} \text{ J}$. Despreciándolo,

$$\boxed{\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)}}.$$

Esta es también la condición de resonancia Doppler: el átomo que se aproxima percibe una frecuencia $\nu(1 + v_0/c)$, que debe ser igual a E/h .

Para mayor claridad, conservando temporalmente cifras adicionales,

$$\begin{aligned}\nu_{\text{rest}} &= \frac{E}{h} = 5.0755287 \times 10^{14} \text{ Hz}, \\ \nu &\simeq 5.0755111 \times 10^{14} \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Por tanto, la frecuencia requerida del láser está por debajo de la resonancia del átomo en reposo en

$$\nu_{\text{rest}} - \nu \simeq \nu_{\text{rest}} \frac{v_0}{c} = 1.76 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

El retroceso por absorción es

$$\boxed{\Delta v_1 = -\frac{h\nu}{mc} \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}.$$

Su signo es negativo según la definición que aparece en la pregunta.

b) Intervalo de velocidades resonantes

De acuerdo con el intervalo de energía mostrado en la figura 3.2, consideramos que se produce resonancia cuando la energía del fotón desplazada por el efecto Doppler se encuentra entre $E - \Gamma/2$ y $E + \Gamma/2$:

$$E - \frac{\Gamma}{2} \leq h\nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) \leq E + \frac{\Gamma}{2}.$$

Por consiguiente, las velocidades límite son

$$v_{\pm} = c \left(\frac{E \pm \Gamma/2}{h\nu} - 1 \right).$$

Como el láser está sintonizado con el centro de la línea para la velocidad v_0 ,

$$v_{\pm} = v_0 \pm \frac{c\Gamma}{2h\nu}.$$

Así, el intervalo completo de velocidades es

$$\Delta v_0 = v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu}.$$

Utilizando $h\nu \simeq E$,

$$\Delta v_0 \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)(7.0 \times 10^{-27})}{3.36 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m s}^{-1} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

La semianchura es aproximadamente 3.1 m s^{-1} .

c) Desviación causada por la emisión espontánea

El fotón emitido tiene un momento lineal de aproximadamente E/c . Definimos la rapidez de retroceso correspondiente

$$v_r = \frac{E}{mc} \simeq 2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

Las pequeñas correcciones Doppler y de retroceso a la energía del fotón emitido son despreciables aquí.

Para la geometría de la figura 3.3, el fotón se desplaza formando un ángulo θ por debajo de la dirección inicial. La conservación del momento lineal en las direcciones paralela y perpendicular a dicha dirección da

$$\begin{aligned} mv_1 &= mv'_1 \cos \varphi + \frac{E}{c} \cos \theta, \\ mv'_1 \sin \varphi &= \frac{E}{c} \sin \theta. \end{aligned}$$

Dividiendo,

$$\tan \varphi = \frac{v_r \sin \theta}{v_1 - v_r \cos \theta}.$$

Inicialmente, $v_r \ll v_1$, por lo que

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta.$$

Con $v_1 \simeq 1038.16 \text{ m s}^{-1}$,

$$\varphi \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

La mayor desviación se produce cuando la emisión es aproximadamente perpendicular a la velocidad del átomo. Más precisamente, para un momento lineal del fotón fijo,

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{v_r}{v_1} \right) \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

Así, una emisión modifica la dirección inicial solo muy ligeramente. Para obtener un valor único de φ es necesario especificar el ángulo aleatorio de emisión θ .

d) Frenado máximo con frecuencia del láser fija

Consideremos primero un átomo que parte de la velocidad resonante central v_0 , como en el apartado (a). A medida que se frena, disminuye la energía del fotón en el sistema de referencia en reposo con el átomo. Se alcanza el límite inferior del intervalo de resonancia cuando

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c} \right) = E - \frac{\Gamma}{2}.$$

Restando esta expresión de

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c} \right) = E$$

se obtiene

$$\frac{h\nu}{c} \Delta v = \frac{\Gamma}{2}.$$

Por tanto, con la precisión relativa a la anchura de línea utilizada en el problema,

$$\Delta v = \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Si «máxima posible» incluye todas las velocidades iniciales que permiten absorber esta frecuencia fija del láser, un átomo puede comenzar en v_+ y frenarse hasta v_- . La variación máxima es entonces

$$v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

Ambos valores son mucho menores que v_0 . Por tanto, para continuar el frenado es necesario aumentar la frecuencia del láser hacia E/h a medida que los átomos se frenan.

e) Número de procesos de absorción-emisión

Cada absorción produce en el átomo una variación dirigida del momento lineal de aproximadamente

$$\Delta p_{x,\text{abs}} = -\frac{E}{c}.$$

La emisión espontánea no tiene una dirección preferente hacia delante ni hacia atrás en el sistema de referencia en reposo con el átomo. Por consiguiente, con la precisión empleada aquí,

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \Delta p_{x,\text{em}} \rangle = 0.$$

La variación media de la velocidad longitudinal por ciclo completo es, por tanto,

$$\langle \Delta v_x \rangle = -v_r = -\frac{E}{mc}.$$

Utilizando la aproximación de trayectoria rectilínea solicitada en la pregunta y reajustando la frecuencia del láser para mantener la resonancia,

$$Nv_r \simeq v_0.$$

De donde

$$N \simeq \frac{v_0}{v_r} = \frac{mc v_0}{E}.$$

Numéricamente,

$$N \simeq \frac{(3.841 \times 10^{-26})(3.0 \times 10^8)(1038.19)}{3.36 \times 10^{-19}} = 3.56 \times 10^4.$$

Así, se requieren aproximadamente

$$N \simeq 3.6 \times 10^4$$

ciclos. Esto estima la reducción de la velocidad media dirigida; cada átomo experimenta retrocesos aleatorios debidos a la emisión.

f) Tiempo y distancia de enfriamiento

Para un estado excitado con vida media τ , la anchura natural completa de la línea en energía satisface

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

Aquí se toma Γ como la anchura completa, de acuerdo con los límites $E \pm \Gamma/2$. Así,

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{h}{2\pi\Gamma}.$$

Numéricamente,

$$\tau = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{2\pi(7.0 \times 10^{-27})} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

Por la suposición explícita de que los átomos prácticamente no permanecen tiempo alguno en el estado fundamental, la duración media de un ciclo es τ . Por tanto,

$$t = N\tau = (3.56 \times 10^4)(1.51 \times 10^{-8}) \simeq 5.36 \times 10^{-4} \text{ s},$$

o bien

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

El retroceso medio por ciclo y la duración media del ciclo son aproximadamente constantes. Así, la desaceleración media tiene magnitud constante

$$a = \frac{v_r}{\tau} \simeq 1.94 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}.$$

Al frenar desde v_0 hasta un valor casi nulo, la rapidez media durante el proceso es $v_0/2$, lo que da

$$\Delta S \simeq \frac{v_0 t}{2} = \frac{(1038.19)(5.36 \times 10^{-4})}{2} \simeq 0.278 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$\Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.