

IPhO 1991

Theorieaufgaben und Lösungen · Havanna, Kuba · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/1991/

Aufgabe 1: Rotierende Kugel beim Aufprall auf den Boden

Abbildung 1.1 zeigt eine massive, homogene Kugel mit dem Radius R . Bevor sie auf den Boden fällt, ruht ihr Schwerpunkt, die Kugel rotiert jedoch mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um eine horizontale Achse durch ihren Mittelpunkt. Der tiefste Punkt der Kugel befindet sich in einer Höhe h über dem Boden.

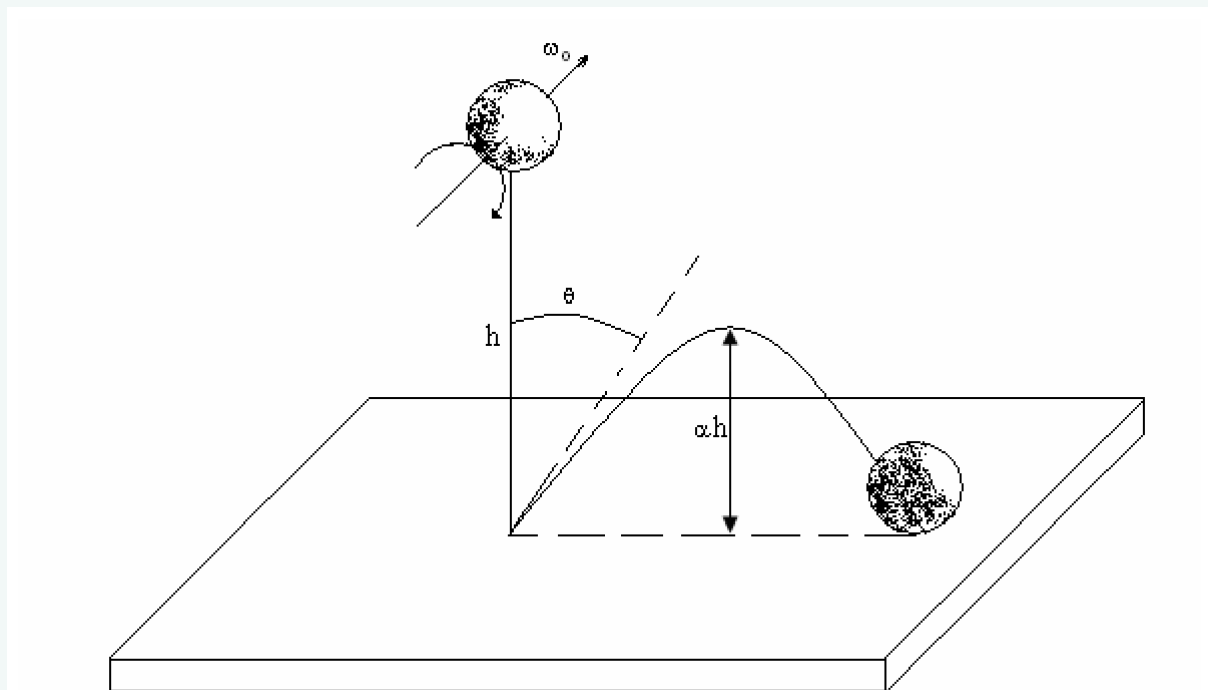


Figure 1.1

Abbildung 1.1

Nach dem Loslassen fällt die Kugel unter dem Einfluss der Schwerkraft und springt auf eine neue Höhe zurück, bei der ihr tiefster Punkt nun ah über dem Boden liegt. Die Verformung der Kugel und des Bodens beim Stoß kann als vernachlässigbar angesehen werden. Vernachlässigen Sie den Einfluss der Luft. Die Stoßdauer ist jedoch endlich.

Die Masse der Kugel beträgt m , die Fallbeschleunigung g , der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kugel und Boden μ_{kt} und das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich der angegebenen Achse ist:

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

Untersuchen Sie zwei Situationen: In der ersten gleitet die Kugel während der gesamten Stoßdauer, in der zweiten endet das Gleiten vor dem Ende der Stoßdauer.

Situation I: Gleiten während des gesamten Stoßes.

Bestimmen Sie:

- a) $\tan \theta$, wobei θ der in der Abbildung angegebene Rückprallwinkel ist;
- b) die während des Fluges zwischen dem ersten und dem zweiten Stoß zurückgelegte horizontale Strecke;
- c) den Mindestwert von ω_0 für diese Situation.

Situation II: Gleiten während eines Teils des Stoßes.

Bestimmen Sie erneut:

- a) $\tan \theta$;
- b) die während des Fluges zwischen dem ersten und dem zweiten Stoß zurückgelegte horizontale Strecke.

Skizzieren Sie unter Berücksichtigung beider oben genannten Situationen den Verlauf von $\tan \theta$ in Abhängigkeit von ω_0 .

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei D die während des Fluges nach dem Rückprall zurückgelegte horizontale Strecke. In der üblichen Näherung für einen kurzen Stoß, bei der der Kraftstoß der Gewichtskraft während des Kontakts vernachlässigt wird, gilt:

- **Situation I(a):**

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

- **Situation I(b):**

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a} (1 + \sqrt{a})$$

- **Situation I(c):**

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh} (1 + \sqrt{a})$$

Im Gleichheitsfall endet das Gleiten genau beim Ablösen. Eine von null verschiedene Gleitgeschwindigkeit beim Ablösen erfordert $\omega_0 > \omega_c$.

- **Situation II(a):**

$$\tan \theta = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}$$

- **Situation II(b):**

$$D = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}$$

• **Geforderte Skizze:**

$$\tan \theta = \begin{cases} \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}, & 0 \leq \omega_0 < \omega_c, \\ \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, & \omega_0 \geq \omega_c. \end{cases}$$

Der Graph steigt vom Ursprung aus linear bis zu einem Knickpunkt bei

$$\left(\omega_c, \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right),$$

und verläuft danach horizontal. Am Knickpunkt ist er stetig.

Lösung

Geschwindigkeiten im Flug und Stoßgleichungen

Es sei u der Betrag der abwärts gerichteten Geschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoß und w der Betrag der aufwärts gerichteten Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß. Während jedes freien Fluges bleibt die mechanische Energie erhalten, sodass

$$u = \sqrt{2gh}, \quad w = \sqrt{2gah} = \sqrt{a} u.$$

Der Schwerpunkt fällt um h und steigt um ah , da seine Höhe stets um R größer ist als die des tiefsten Punktes.

Wir wählen die positive horizontale Richtung als die Richtung der Reibungskraft auf die anfangs rotierende Kugel. Mit v bezeichnen wir die horizontale Schwerpunktgeschwindigkeit und wählen positives ω in der anfänglichen Drehrichtung. Die horizontale Geschwindigkeit des tiefsten Punktes ist dann

$$v - R\omega.$$

Anfangs beträgt sie $-R\omega_0$, sodass die Reibung den Schwerpunkt beschleunigt und die Rotation verlangsamt.

Der Kraftstoß der Normalkraft sei

$$P = \int_{\text{Stoß}} N dt.$$

Für eine Kontaktdauer τ liefert der Impulssatz in vertikaler Richtung

$$P - mg\tau = m(u + w).$$

In der üblichen Näherung für einen kurzen Stoß gilt

$$g\tau \ll u + w,$$

und damit

$$P \simeq m(u + w).$$

Der Stoß kann eine endliche Dauer haben und dennoch diese Näherung erfüllen.

Es sei J der bis zum betrachteten Zeitpunkt aufsummierte horizontale Reibungskraftstoß. Impulssatz und Drehimpulssatz ergeben

$$mv = J, \quad I(\omega - \omega_0) = -RJ.$$

Mit $I = 2mR^2/5$ folgt

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5J}{2mR}.$$

Somit gilt

$$R\omega - v = R\omega_0 - \frac{7J}{2m}.$$

Diese Größe nimmt monoton ab, solange die Kugel gleitet. Das Gleiten endet, wenn sie null erreicht.

Situation I(a): Rückprallwinkel

Wenn das Gleiten während des gesamten Stoßes anhält, hat die Reibungskraft durchgehend den Betrag $\mu_k N$. Daher gilt

$$J = \mu_k P = \mu_k m(u + w),$$

und die horizontale Geschwindigkeit nach dem Stoß beträgt

$$v = \mu_k(u + w).$$

Der Winkel θ in der Abbildung wird von der Vertikalen aus gemessen, sodass

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \mu_k \frac{u + w}{w}.$$

Da $w = \sqrt{a} u$, folgt

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Situation I(b): Horizontale Strecke

Beim Ablösen und bei der Rückkehr hat der Schwerpunkt der Kugel dieselbe Höhe R . Ihre Flugzeit T erfüllt daher

$$0 = wT - \frac{1}{2}gT^2,$$

woraus folgt:

$$T = \frac{2w}{g}.$$

Die horizontale Geschwindigkeit bleibt während des Fluges konstant, sodass

$$D = vT = \frac{2\mu_k(u + w)w}{g}.$$

Einsetzen von $u^2 = 2gh$ und $w = \sqrt{a} u$ ergibt

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}).$$

Situation I(c): Minimale anfängliche Winkelgeschwindigkeit

Da $R\omega - v$ während des Gleitens monoton abnimmt, genügt es, den Wert am Ende des Stoßes zu prüfen. An der Grenze zwischen den beiden Situationen wird diese Größe genau beim Ablösen null:

$$R\omega_0 - \frac{7J}{2m} = 0.$$

Mit $J = \mu_k m(u + w)$ ergibt sich daraus

$$\omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}(u + w).$$

Somit gilt

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh}(1 + \sqrt{a}).$$

Für $\omega_0 > \omega_c$ besteht das Gleiten auch noch beim Ablösen. Für $\omega_0 = \omega_c$ hält es bis zum letzten Augenblick des Kontakts an.

Situation II(a): Rückprallwinkel

Wenn $0 < \omega_0 < \omega_c$, endet das Gleiten, bevor der gesamte Kraftstoß der Normalkraft übertragen ist. Es sei J_* der bis zu diesem Zeitpunkt aufsummierte Reibungskraftstoß. Die Bedingung $v = R\omega$ liefert

$$R\omega_0 - \frac{7J_*}{2m} = 0,$$

also

$$J_* = \frac{2mR\omega_0}{7}.$$

Daher gilt in dem Augenblick, in dem das Gleiten endet:

$$v_* = \frac{2R\omega_0}{7}, \quad \omega_* = \frac{2\omega_0}{7}.$$

Diese Geschwindigkeiten der Tangentialbewegung bleiben während der restlichen Kontaktzeit unverändert. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass eine Haftreibungskraft f wirkt, während $v = R\omega$ gilt. Dann ist

$$m\dot{v} = f, \quad I\dot{\omega} = -Rf, \quad \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

Zusammen folgt daraus

$$f \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) = 0,$$

und damit $f = 0$. Es ist kein weiterer tangentialer Kraftstoß erforderlich.

Die horizontale Geschwindigkeit nach dem Stoß beträgt daher

$$v = \frac{2R\omega_0}{7},$$

und

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}.$$

Das Ergebnis schließt auch den Grenzfall $\omega_0 = 0$ ein, in dem kein Gleiten auftritt und der Rückprall vertikal erfolgt.

Situation II(b): Horizontale Strecke

Mit derselben Flugzeit $T = 2w/g$ ergibt sich

$$D = \frac{2R\omega_0}{7} \frac{2w}{g}.$$

Somit gilt

$$D = \frac{4R\omega_0}{7g} \sqrt{2agh} = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}.$$

Geforderte Skizze

Für feste Werte von h, R, a, μ_k besteht der Graph aus zwei Abschnitten:

- Von $\omega_0 = 0$ bis ω_c ist er eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung

$$\frac{2R}{7\sqrt{2agh}}.$$

- Bei ω_c geht er in eine horizontale Gerade auf der Höhe

$$\mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

über.

Die Werte an der Übergangsstelle stimmen überein, denn

$$\frac{2R\omega_c}{7\sqrt{2agh}} = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Bei größeren anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten wirkt die Reibung bereits während der gesamten Kontaktzeit, sodass eine Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit den verfügbaren tangentialen Kraftstoß nicht vergrößern kann.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Geladene Kugeln, die sich entlang einer quadratischen Schleife in einem elektrischen Feld bewegen (Relativitätstheorie)

Auf einer quadratischen Schleife mit der Seitenlänge L bewegt sich eine große Anzahl von Kugeln mit vernachlässigbarem Radius und jeweils der Ladung q mit der Geschwindigkeit u und einem konstanten Abstand a voneinander, betrachtet in einem Bezugssystem, das relativ zur Schleife ruht. Die Kugeln sind auf der Schleife wie die Perlen einer Halskette angeordnet, wobei L viel größer als a ist, wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Der nichtleitende Draht, der die Schleife bildet, hat im Ruhesystem der Schleife eine homogene Ladungsdichte pro Längeneinheit. Seine Gesamtladung ist in diesem Bezugssystem betragsmäßig gleich der Gesamtladung der Kugeln und hat das entgegengesetzte Vorzeichen.

Betrachten Sie die Situation, in der sich die Schleife mit der Geschwindigkeit v parallel zu ihrer Seite AB (Abb. 2.1) durch ein homogenes elektrisches Feld der Stärke E bewegt, das senkrecht zur Geschwindigkeit der Schleife steht und mit der Ebene der Schleife einen Winkel θ bildet.

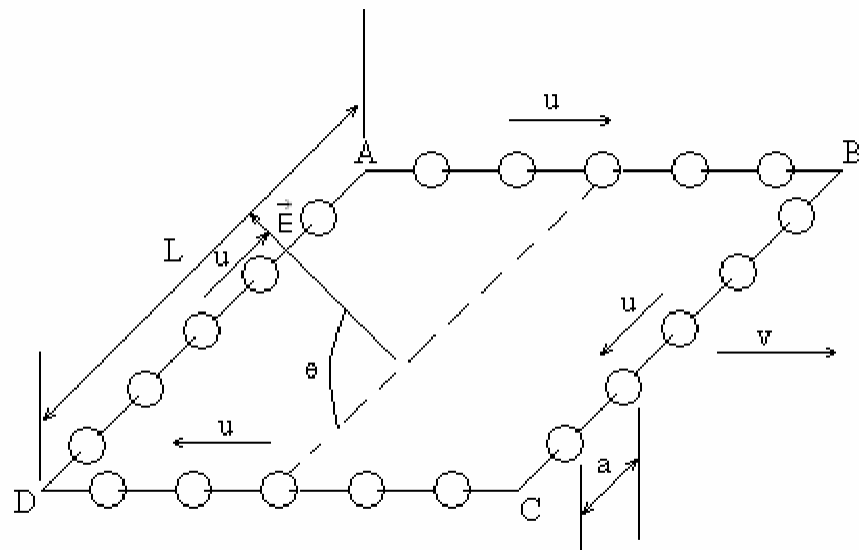


Figure 2.1

Abbildung 2.1

Berechnen Sie unter Berücksichtigung relativistischer Effekte die folgenden Größen im Bezugssystem eines Beobachters, für den sich die Schleife mit der Geschwindigkeit v bewegt:

- Die Abstände zwischen den Kugeln auf den einzelnen Seiten der Schleife, a_{AB} , a_{BC} , a_{CD} und a_{DA} .
- Die Nettoladung von Schleife und Kugeln auf jeder Seite der Schleife: Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CD} und Q_{DA} .
- Den Betrag M des elektrisch erzeugten Drehmoments, das das System aus Schleife und Kugeln zu drehen versucht.
- Die Energie W aufgrund der Wechselwirkung des aus Schleife und Kugeln bestehenden Systems mit dem elektrischen Feld.

Alle Antworten sind durch die in der Aufgabe angegebenen Größen auszudrücken.

Hinweis. Die elektrische Ladung eines isolierten Körpers ist unabhängig vom Bezugssystem, in dem die Messung erfolgt. Jegliche Effekte elektromagnetischer Strahlung sind zu vernachlässigen.

Einige Formeln der speziellen Relativitätstheorie

Betrachten Sie ein Bezugssystem S' , das sich mit der Geschwindigkeit V relativ zu einem anderen Bezugssystem S bewegt. Die Achsen der Bezugssysteme sind parallel, und ihre Ursprünge fallen bei $t = 0$ zusammen. V ist in die positive Richtung der x -Achse gerichtet.

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Bewegt sich ein Teilchen mit der in S' gemessenen Geschwindigkeit u' in x' -Richtung, so ist seine in S gemessene Geschwindigkeit gegeben durch:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

Relativistische Längenkontraktion

Hat ein im Bezugssystem S ruhender Körper in x -Richtung die Länge L_0 , so misst ein Beobachter im Bezugssystem S' (das sich mit der Geschwindigkeit V in x -Richtung bewegt) für seine Länge:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die Ergebnisse verwenden die durch $L \gg a$ gerechtfertigte Näherung einer kontinuierlichen Ladungsverteilung und die in Abb. 2.1 gezeigten Richtungen. Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit.

• a)

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{BC} = a, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}, \quad a_{DA} = a.$$

• b)

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

• c)

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

• d) Für die gezeigte Feldrichtung, deren Komponente in der Schleifenebene von AB nach CD zeigt,

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Lösung

Es sei S' das Ruhesystem der Schleife und S das Bezugssystem des Beobachters. Wir wählen die x -Achse entlang $A \rightarrow B$, sodass sich die Schleife mit der Geschwindigkeit $v\hat{x}$ bewegt. Wir wählen $\hat{y}$ entlang $A \rightarrow D$, senkrecht zu AB in der Schleifenebene.

Wir definieren

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \kappa = \frac{uv}{c^2}.$$

Da $L \gg a$, ersetzen wir die diskreten Kugeln auf jeder geraden Seite durch eine kontinuierliche Linienladung und vernachlässigen Schwankungen, die dadurch entstehen, dass einzelne Kugeln eine Ecke erreichen oder verlassen. In S' betragen die Ladungsdichten der Kugeln bzw. des Drahtes

$$\lambda'_b = \frac{q}{a}, \quad \lambda'_w = -\frac{q}{a}.$$

a) Abstände zwischen den Kugeln

Der Abstand muss zwischen Positionen gemessen werden, die **gleichzeitig in S** erfasst werden. Solche Ereignisse sind in S' im Allgemeinen nicht gleichzeitig.

Auf den beiden zur Bewegung parallelen Seiten sei die Kugelgeschwindigkeit in S' jeweils w' , wobei

$$w' = +u \quad \text{auf } AB, \quad w' = -u \quad \text{auf } CD.$$

Wir wählen zwei benachbarte Kugeln, geordnet in Richtung zunehmender x' -Werte. Für Ereignisse auf ihren Bahnen gilt

$$\Delta x' = a + w' \Delta t'.$$

Die Lorentz-Transformation liefert

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$$

Die Forderung $\Delta t = 0$ ergibt

$$\Delta t' = -\frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

Folglich gilt

$$\Delta x' = a - \frac{vw'}{c^2} \Delta x', \quad \Delta x' = \frac{a}{1 + vw'/c^2}.$$

Die Transformation der Ortskoordinaten ergibt dann

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \Delta x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Somit ist

$$a_{\parallel} = \frac{a}{\gamma(1 + vw'/c^2)}.$$

Einsetzen der beiden Geschwindigkeiten ergibt

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}.$$

Auf BC bzw. DA haben alle Kugeln auf derselben Seite dieselbe Koordinate x' . Daher ist $\Delta x' = 0$, und für gleichzeitige Beobachtungen in S gilt auch $\Delta t' = 0$. Transversale Abstände bleiben bei der Lorentz-Transformation unverändert, sodass

$$a_{BC} = a_{DA} = a.$$

b) Nettoladung auf jeder Seite

In S sind die zur Bewegung parallelen Seiten kontrahiert:

$$\ell_{AB} = \ell_{CD} = \frac{L}{\gamma}, \quad \ell_{BC} = \ell_{DA} = L.$$

Jede Drahtseite trägt die feste Ladung

$$Q_w = -\frac{qL}{a}.$$

Diese ist in beiden Bezugssystemen gleich, weil die Ladung invariant ist und die Drahtladungen nicht zwischen den Seiten wechseln.

Die Anzahl der Kugeln auf jeder Seite ist gleich ihrer beobachteten Länge geteilt durch den zugehörigen beobachteten Abstand:

$$N_{AB} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1+\kappa)]} = \frac{L}{a}(1+\kappa),$$

$$N_{CD} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1-\kappa)]} = \frac{L}{a}(1-\kappa),$$

und

$$N_{BC} = N_{DA} = \frac{L}{a}.$$

Die Addition der Drahtladung zur Kugelladung ergibt

$$Q_{AB} = q\frac{L}{a}(1+\kappa) - \frac{qL}{a} = \frac{qL}{a}\kappa,$$

$$Q_{CD} = q\frac{L}{a}(1-\kappa) - \frac{qL}{a} = -\frac{qL}{a}\kappa.$$

Die beiden transversalen Seiten bleiben neutral. Somit gilt

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

Ihre Summe ist null, wie es die Invarianz der Gesamtladung verlangt. Die Ladung einer einzelnen Seite muss nicht null bleiben, da je nach Bezugssystem unterschiedliche Kugeln zu einem gemeinsamen Zeitpunkt auf dieser Seite liegen.

c) Elektrisch erzeugtes Drehmoment

Wir schreiben

$$Q = \frac{qLuv}{ac^2},$$

sodass die Nettoladungen auf AB und CD gleich Q bzw. $-Q$ sind.

In der Näherung einer kontinuierlichen Ladungsverteilung sind diese Ladungen gleichmäßig entlang ihrer jeweiligen Seiten verteilt. Die resultierenden Kräfte greifen in den Seitenmittelpunkten an. Der Verbindungsvektor zwischen diesen Mittelpunkten ist $L\hat{\mathbf{y}}$, da dieser Abstand senkrecht zur Bewegung der Schleife liegt und nicht kontrahiert wird.

Das elektrische Dipolmoment ist daher

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_{AB} - Q\mathbf{r}_{CD} = -QL\hat{\mathbf{y}}.$$

In einem homogenen elektrischen Feld ist die Gesamtkraft null, während für das Drehmoment gilt

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Die Feldkomponente in der Schleifenebene ist parallel zu $\hat{\mathbf{y}}$ und erzeugt kein Drehmoment. Die zur Ebene senkrechte Komponente ist $E \sin \theta$ und erzeugt ein Drehmoment um eine zu AB parallele Achse mit dem Betrag

$$M = |Q|LE \sin \theta.$$

Somit ist

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

Dieser Ausdruck hat die Einheit N m . Wird q als positiver Ladungsbetrag verstanden, kann $|q|$ einfach als q geschrieben werden.

d) Wechselwirkungsenergie

Für ein homogenes äußeres elektrisches Feld gilt

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

Die Wechselwirkungsenergie ist

$$W = \int \phi_{\text{ext}} dq.$$

Da die Gesamtladung des Systems null ist, fällt die Konstante ϕ_0 weg:

$$W = -\mathbf{E} \cdot \int \mathbf{r} dq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Aus der Winkelmarkierung in Abb. 2.1 ergibt sich, dass die Komponente von $\mathbf{E}$ in der Schleifenebene entlang $A \rightarrow D$ gerichtet ist, sodass

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} = E \cos \theta.$$

Mit $\mathbf{p} = -QL\hat{\mathbf{y}}$ folgt

$$W = QLE \cos \theta.$$

Daher ist

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

Dieser Ausdruck hat die Einheit Joule und verschwindet, wenn das Feld senkrecht zur Schleife steht. Für positives q ergibt sich das positive Vorzeichen daraus, dass das elektrische Dipolmoment der Feldkomponente in der Schleifenebene entgegengerichtet ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Kühlung von Atomen mit einem Laser

Um die Eigenschaften isolierter Atome mit hoher Genauigkeit untersuchen zu können, müssen diese für eine gewisse Zeit nahezu in Ruhe gehalten werden. Kürzlich wurde eine Methode entwickelt, die dies ermöglicht. Sie wird als „Laserkühlung“ bezeichnet und anhand der folgenden Aufgabe veranschaulicht.

In einer Vakuumkammer wird ein gut kollimierter Strahl von Na^{23} -Atomen (die durch Verdampfen einer Probe bei 10^3 K entstehen) frontal mit einem Laserstrahl hoher Intensität bestrahlt (Abb. 3.1). Die Laserfrequenz wird so gewählt, dass Atome mit der Geschwindigkeit v_0 ein Photon

resonant absorbieren. Bei der Absorption des Lichts werden diese Atome auf das erste angeregte Energieniveau angehoben, das im Mittel um E über dem Grundzustand liegt und eine Unschärfe von Γ aufweist (Abb. 3.2).

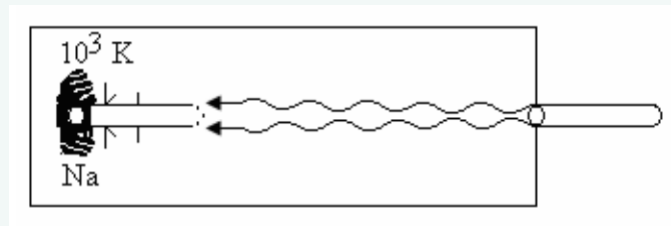


Abbildung 3.1

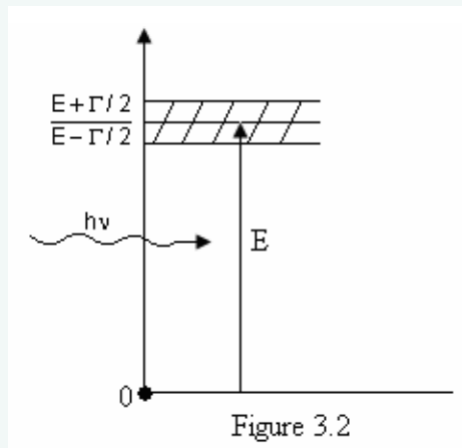


Figure 3.2

Abbildung 3.2

Bei diesem Vorgang ist die Geschwindigkeitsabnahme Δv_1 des Atoms durch $\Delta v_1 = v_1 - v_0$ gegeben. Anschließend emittiert das Atom Licht, während es in seinen Grundzustand zurückkehrt. Die Geschwindigkeit des Atoms ändert sich um $\Delta v' = v'_1 - v_1$, und seine Bewegungsrichtung ändert sich um einen Winkel φ (Abb. 3.3).

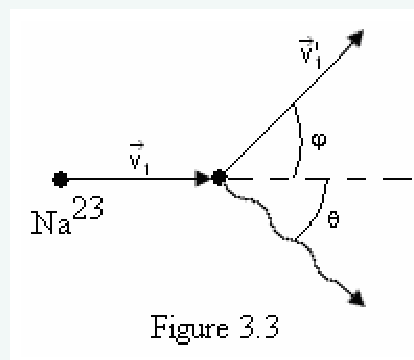


Figure 3.3

Abbildung 3.3

Diese Folge von Absorption und Emission wiederholt sich viele Male, bis die Geschwindigkeit der Atome um einen bestimmten Betrag Δv abgenommen hat, sodass keine resonante Absorption von Licht der Frequenz ν mehr stattfindet. Dann muss die Laserfrequenz geändert werden, um die resonante Absorption aufrechtzuerhalten. Die Atome, die sich mit der neuen Geschwindigkeit bewegen, werden weiter abgebremst, bis einige von ihnen eine Geschwindigkeit nahe null haben.

In erster Näherung können wir alle atomaren Wechselwirkungsprozesse außer der oben beschriebenen spontanen Absorption und Emission von Licht vernachlässigen. Außerdem dürfen wir annehmen, dass der Laser so intensiv ist, dass die Atome praktisch keine Zeit im Grundzustand verbringen.

Fragen

- Bestimmen Sie die Laserfrequenz, die erforderlich ist, um die resonante Absorption des Lichts durch diejenigen Atome sicherzustellen, deren kinetische Energie der Atome innerhalb des Bereichs hinter dem Kollimator. Bestimmen Sie außerdem die Geschwindigkeitsabnahme dieser Atome, Δv_1 , nach dem Absorptionsvorgang.
- Licht mit der in Frage a) berechneten Frequenz wird von Atomen absorbiert, deren Geschwindigkeiten innerhalb eines Bereichs Δv_0 liegen. Berechnen Sie diesen Geschwindigkeitsbereich.
- Wenn ein Atom Licht emittiert, ändert sich seine Bewegungsrichtung um φ gegenüber der ursprünglichen Richtung. Berechnen Sie φ .
- Bestimmen Sie die maximal mögliche Geschwindigkeitsabnahme Δv bei einer gegebenen Frequenz.
- Wie groß ist näherungsweise die Anzahl N der Absorptions-Emissions-Vorgänge, die erforderlich ist, um die Geschwindigkeit eines Atoms von ihrem Anfangswert v_0 – der oben in Frage a) bestimmt wurde – auf nahezu null zu verringern? Nehmen Sie an, dass sich das Atom geradlinig bewegt.
- Bestimmen Sie die Zeit t , die der Vorgang in Frage e benötigt. Berechnen Sie die Strecke ΔS , die ein Atom in dieser Zeit zurücklegt.

Gegebene Daten

$$\begin{aligned}E &= 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ \Gamma &= 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J} \\ c &= 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \\ m_p &= 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ h &= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ k &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}\end{aligned}$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, h die Planck-Konstante, k die Boltzmann-Konstante und m_p die Masse des Protons.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die numerischen Ergebnisse beruhen auf der als beabsichtigt angenommenen Bedingung in (a), $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT$, aus der sich $v_0 = 1.04 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ ergibt.

- a)

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)} \simeq 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Diese Frequenz liegt ungefähr $1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$ unter der Resonanzfrequenz eines ruhenden Atoms.

$$\Delta v_1 \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

Der positive Betrag der Geschwindigkeitsabnahme ist $2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

- b) Der gesamte resonante Geschwindigkeitsbereich beträgt

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1},$$

und erstreckt sich ungefähr von $v_0 - 3.1 \text{ m s}^{-1}$ bis $v_0 + 3.1 \text{ m s}^{-1}$.

- c) Für den in Abbildung 3.3 dargestellten Emissionswinkel θ sei $v_r = E/(mc)$. Dann gilt

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

Die maximale anfängliche Ablenkung beträgt ungefähr $2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$.

- d) Ausgehend von der zentralen Resonanzgeschwindigkeit v_0 gilt

$$\Delta v \simeq \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Ein Atom, das am oberen Rand des Resonanzbereichs startet, kann den gesamten Bereich von ungefähr 6.3 m s^{-1} durchlaufen.

- e) Wenn die Laserfrequenz während des Abbremsens nachgeführt wird, gilt

$$N \simeq \frac{mc v_0}{E} \simeq 3.6 \times 10^4.$$

- f) Wird Γ als volle natürliche Energielinienbreite aufgefasst, ergibt sich

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.54 \text{ ms}, \quad \Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

Lösung

a) Resonanzfrequenz und Absorptionsrückstoß

Der Satz, der die anfängliche kinetische Energie festlegt, ist im bereitgestellten Text unvollständig. Wir verwenden die vermutlich beabsichtigte Bedingung, dass die ausgewählten Atome die mittlere thermische kinetische Energie besitzen:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} k T.$$

Mit der Näherung $23m_p$ für die Masse des Natriumatoms erhält man

$$m = 23(1.67 \times 10^{-27}) = 3.841 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

und damit

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(10^3)}{3.841 \times 10^{-26}}} = 1.038 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

Somit ist $v_0/c \simeq 3.46 \times 10^{-6}$, sodass nichtrelativistische Mechanik und die Dopplerformel erster Ordnung ausreichen.

Wir wählen die positive Richtung entlang des einfallenden Atomstrahls. Das entgegenlaufende Photon hat den Impuls $-h\nu/c$. Aus der Impulserhaltung bei der Absorption folgt

$$mv_1 = mv_0 - \frac{h\nu}{c},$$

also

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\frac{h\nu}{mc}.$$

Die Energieerhaltung liefert

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + E.$$

Durch Einsetzen der Impulsbeziehung ergibt sich

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2}.$$

Der letzte Term ist die Rückstoßenergie. Ihr Wert beträgt ungefähr

$$E_r \simeq \frac{E^2}{2mc^2} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ J},$$

was selbst im Vergleich zu $\Gamma = 7.0 \times 10^{-27} \text{ J}$ klein ist. Vernachlässigt man diesen Term, erhält man

$$\boxed{\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)}}.$$

Dies ist zugleich die Doppler-Resonanzbedingung: Das entgegenkommende Atom nimmt die Frequenz $\nu(1 + v_0/c)$ wahr, die gleich E/h sein muss.

Zur Verdeutlichung behalten wir vorübergehend zusätzliche Stellen bei:

$$\nu_{\text{rest}} = \frac{E}{h} = 5.0755287 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

$$\nu \simeq 5.0755111 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Die erforderliche Laserfrequenz liegt daher um

$$\nu_{\text{rest}} - \nu \simeq \nu_{\text{rest}} \frac{v_0}{c} = 1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$$

unter der Resonanzfrequenz eines ruhenden Atoms.

Der Absorptionsrückstoß beträgt

$$\boxed{\Delta v_1 = -\frac{h\nu}{mc} \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}.$$

Gemäß der in der Aufgabenstellung angegebenen Definition ist sein Vorzeichen negativ.

b) Resonanter Geschwindigkeitsbereich

Entsprechend dem in Abbildung 3.2 dargestellten Energieintervall nehmen wir an, dass Resonanz auftritt, wenn die dopplerverschobene Photonenenergie zwischen $E - \Gamma/2$ und $E + \Gamma/2$ liegt:

$$E - \frac{\Gamma}{2} \leq h\nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) \leq E + \frac{\Gamma}{2}.$$

Die Grenzggeschwindigkeiten sind folglich

$$v_{\pm} = c \left(\frac{E \pm \Gamma/2}{h\nu} - 1 \right).$$

Da der Laser für die Geschwindigkeit v_0 auf die Linienmitte abgestimmt ist, gilt

$$v_{\pm} = v_0 \pm \frac{c\Gamma}{2h\nu}.$$

Somit beträgt der gesamte Geschwindigkeitsbereich

$$\Delta v_0 = v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu}.$$

Mit $h\nu \simeq E$ ergibt sich

$$\Delta v_0 \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)(7.0 \times 10^{-27})}{3.36 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m s}^{-1} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

Die halbe Breite beträgt ungefähr 3.1 m s^{-1} .

c) Ablenkung durch spontane Emission

Das emittierte Photon hat näherungsweise den Impuls E/c . Wir definieren die zugehörige Rückstoßgeschwindigkeit

$$v_r = \frac{E}{mc} \simeq 2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

Die kleinen Doppler- und Rückstoßkorrekturen der Energie des emittierten Photons sind hier vernachlässigbar.

Bei der Geometrie in Abbildung 3.3 bewegt sich das Photon unter dem Winkel θ unterhalb der ursprünglichen Richtung. Die Impulserhaltung parallel und senkrecht zu dieser Richtung liefert

$$\begin{aligned} mv_1 &= mv'_1 \cos \varphi + \frac{E}{c} \cos \theta, \\ mv'_1 \sin \varphi &= \frac{E}{c} \sin \theta. \end{aligned}$$

Durch Division erhält man

$$\tan \varphi = \frac{v_r \sin \theta}{v_1 - v_r \cos \theta}.$$

Anfangs gilt $v_r \ll v_1$, also

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta.$$

Mit $v_1 \simeq 1038.16 \text{ m s}^{-1}$ ergibt sich

$$\varphi \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

Die größte Ablenkung tritt bei einer Emission ungefähr senkrecht zur Geschwindigkeit des Atoms auf. Genauer gilt bei festem Photonenimpuls

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{v_r}{v_1}\right) \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

Eine einzelne Emission ändert die ursprüngliche Richtung somit nur sehr geringfügig. Für einen eindeutigen Wert von φ muss der zufällige Emissionswinkel θ angegeben werden.

d) Maximale Abbremsung bei fester Laserfrequenz

Betrachten wir zunächst ein Atom, das wie in Teil (a) mit der zentralen Resonanzgeschwindigkeit v_0 startet. Beim Abbremsen nimmt die Photonenenergie in seinem Ruhesystem ab. Die untere Grenze des Resonanzintervalls wird erreicht, wenn

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c}\right) = E - \frac{\Gamma}{2}.$$

Subtrahiert man dies von

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E$$

so erhält man

$$\frac{h\nu}{c} \Delta v = \frac{\Gamma}{2}.$$

Damit gilt im Rahmen der in der Aufgabe verwendeten Genauigkeit bezüglich der Linienbreite

$$\Delta v = \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Falls „maximal möglich“ alle Anfangsgeschwindigkeiten einschließt, bei denen Licht dieser festen Laserfrequenz absorbiert werden kann, kann ein Atom bei v_+ starten und bis auf v_- abgebremst werden. Die maximale Spanne beträgt dann

$$v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

Beide Werte sind viel kleiner als v_0 . Für eine fortgesetzte Abbremsung muss die Laserfrequenz daher beim Abbremsen der Atome in Richtung E/h erhöht werden.

e) Anzahl der Absorptions-Emissions-Vorgänge

Jede Absorption bewirkt beim Atom eine gerichtete Impulsänderung von ungefähr

$$\Delta p_{x,\text{abs}} = -\frac{E}{c}.$$

Bei der spontanen Emission gibt es im Ruhesystem des Atoms keine bevorzugte Vorwärts- oder Rückwärtsrichtung. Daher gilt mit der hier verwendeten Genauigkeit

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \Delta p_{x,\text{em}} \rangle = 0.$$

Die mittlere Änderung der longitudinalen Geschwindigkeit pro vollständigem Zyklus ist somit

$$\langle \Delta v_x \rangle = -v_r = -\frac{E}{mc}.$$

Verwendet man die in der Aufgabenstellung verlangte Näherung einer geradlinigen Bewegung und führt die Laserfrequenz zur Aufrechterhaltung der Resonanz nach, gilt

$$Nv_r \simeq v_0.$$

Daraus folgt

$$\boxed{N \simeq \frac{v_0}{v_r} = \frac{mc v_0}{E}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$N \simeq \frac{(3.841 \times 10^{-26})(3.0 \times 10^8)(1038.19)}{3.36 \times 10^{-19}} = 3.56 \times 10^4.$$

Somit sind ungefähr

$$\boxed{N \simeq 3.6 \times 10^4}$$

Zyklen erforderlich. Dies ist eine Abschätzung der Verringerung der mittleren gerichteten Geschwindigkeit; einzelne Atome erfahren zufällige Emissionsrückstöße.

f) Kühlzeit und Strecke

Für einen angeregten Zustand mit der mittleren Lebensdauer τ erfüllt die volle natürliche Energielinienbreite die Beziehung

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

Hier wird Γ als volle Breite aufgefasst, im Einklang mit den Grenzen $E \pm \Gamma/2$. Somit gilt

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{h}{2\pi\Gamma}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\tau = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{2\pi(7.0 \times 10^{-27})} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

Aufgrund der ausdrücklichen Annahme, dass die Atome praktisch keine Zeit im Grundzustand verbringen, beträgt die mittlere Dauer eines Zyklus τ . Daher gilt

$$t = N\tau = (3.56 \times 10^4)(1.51 \times 10^{-8}) \simeq 5.36 \times 10^{-4} \text{ s},$$

oder

$$\boxed{t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s}}.$$

Der mittlere Rückstoß pro Zyklus und die mittlere Zyklusdauer sind näherungsweise konstant. Daher hat die mittlere Verzögerung den konstanten Betrag

$$a = \frac{v_r}{\tau} \simeq 1.94 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}.$$

Beim Abbremsen von v_0 auf nahezu null beträgt die mittlere Geschwindigkeit während des Vorgangs $v_0/2$, sodass sich ergibt

$$\Delta S \simeq \frac{v_0 t}{2} = \frac{(1038.19)(5.36 \times 10^{-4})}{2} \simeq 0.278 \text{ m}.$$

Damit gilt

$$\Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.