

المسألة 1: كرة دوارة تترد عن الأرضية

يبين الشكل 1.1 كرة مصمتة ومتجانسة نصف قطرها R . قبل سقوطها على الأرضية، يكون مركز كتلتها ساكنًا، لكن الكرة تدور بسرعة زاوية ω_0 حول محور أفقي يمر بمركزها. تقع أدنى نقطة في الكرة على ارتفاع h فوق الأرضية.

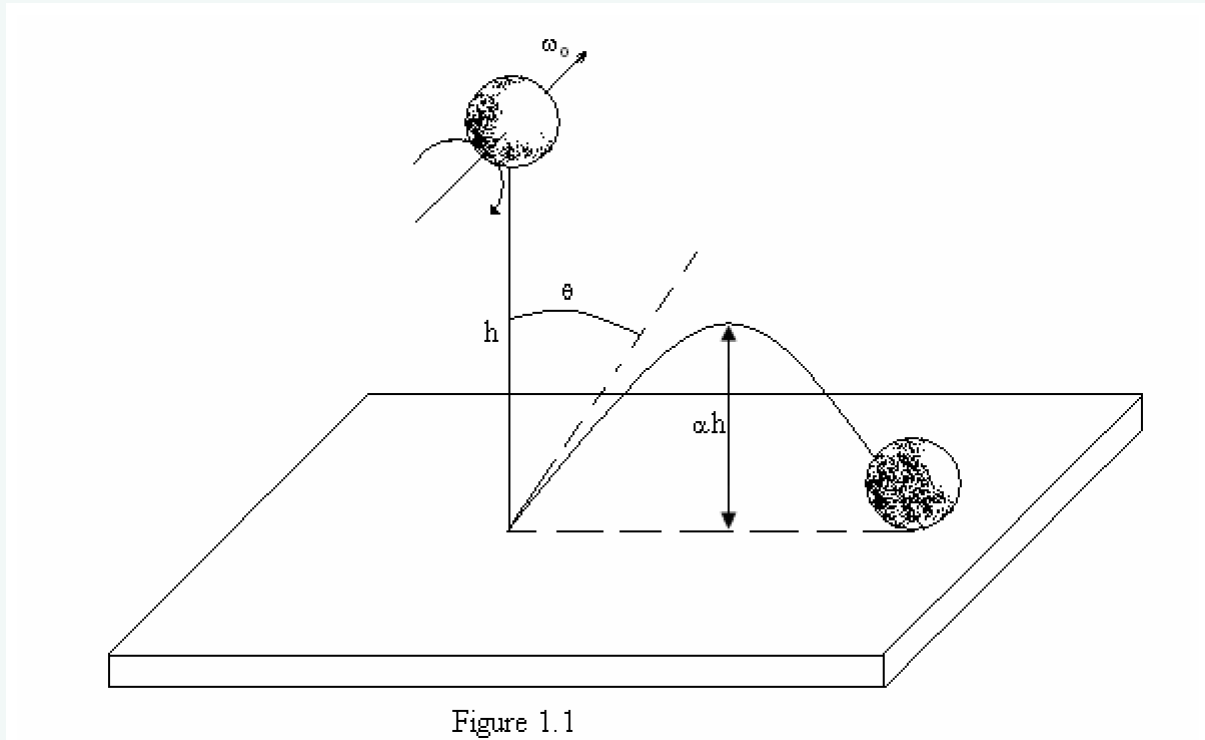


Figure 1.1

الشكل 1.1

عند إفلات الكرة، تسقط تحت تأثير الجاذبية، ثم تترد إلى ارتفاع جديد بحيث تصبح أدنى نقطة فيها على ارتفاع ah فوق الأرضية. يمكن اعتبار تشوه الكرة والأرضية عند التصادم مهملاً. أهمل وجود الهواء. إلا أن مدة التصادم غير صفرية. كتلة الكرة هي m ، وتسارع الجاذبية هو g ، ومعامل الاحتكاك الحركي بين الكرة والأرضية هو μ_k ، وعزم قصور الكرة الذاتي حول المحور المعطى هو:

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

يُطلب منك دراسة حالتين: في الأولى، تنزلق الكرة طوال مدة التصادم، وفي الثانية، يتوقف الانزلاق قبل نهاية مدة التصادم.

الحالة أ: الانزلاق طوال مدة التصادم.

أوجد:

- $\tan \theta$ ، حيث θ زاوية الارتداد المبينة في الرسم؛
- المسافة الأفقية المقطوعة أثناء الطيران بين التصادمين الأول والثاني؛
- القيمة الدنيا لـ ω_0 في هذه الحالة.

الحالة II: الانزلاق خلال جزء من مدة التصادم.

أوجد، مرة أخرى:

(a) $\tan \theta$:

(b) المسافة الأفقية المقطوعة أثناء الطيران بين التصادمين الأول والثاني.

مع أخذ الحالتين السابقتين في الحسبان، ارسم رسماً تخطيطياً لتغير $\tan \theta$ بدلالة ω_0 .

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لتكن D المسافة الأفقية المقطوعة أثناء طيران الكرة بعد ارتدادها. في التقريب المعتاد للتصادم القصير، مع إهمال دفع الجاذبية أثناء التلامس:

• الحالة I(a):

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

• الحالة I(b):

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a} (1 + \sqrt{a})$$

• الحالة I(c):

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R} \sqrt{2gh} (1 + \sqrt{a})$$

عند تحقق المساواة، يتوقف الانزلاق تماماً عند الانفصال. أما بقاء الانزلاق غير صفري عند الانفصال فيطلب $\omega_0 > \omega_c$.

• الحالة II(a):

$$\tan \theta = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}$$

• الحالة II(b):

$$D = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}$$

• الرسم التخطيطي المطلوب:

$$\tan \theta = \begin{cases} \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}, & 0 \leq \omega_0 < \omega_c, \\ \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}, & \omega_0 \geq \omega_c. \end{cases}$$

يرتفع المنحنى خطياً من نقطة الأصل إلى نقطة زاوية عند

$$\left(\omega_c, \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right),$$

ثم يبقى أفقياً. ويكون متصلاً عند النقطة الزاوية.

الحل

سرعات الطيران ومعادلات التصادم

لتكن u مقدار السرعة نحو الأسفل قبيل التصادم مباشرة، ولتكن w مقدار السرعة نحو الأعلى بُعيد التصادم مباشرة. تُحفظ الطاقة الميكانيكية خلال كل مرحلة من مراحل الطيران الحر، ومن ثم

$$u = \sqrt{2gh}, \quad w = \sqrt{2gah} = \sqrt{a}u.$$

ينخفض مركز الكتلة بمقدار h ويرتفع بمقدار ah ، لأن ارتفاعه يزيد دائماً على ارتفاع أدنى نقطة بمقدار R .

اختر الاتجاه الأفقي الموجب ليكون اتجاه قوة الاحتكاك المؤثرة في الكرة الدوّارة في البداية. ارمز بـ v إلى السرعة الأفقية لمركز الكتلة، واعتبر ω موجبة في اتجاه الدوران الابتدائي. عندئذ تكون السرعة الأفقية لأدنى نقطة

$$v - R\omega.$$

تساوي هذه السرعة في البداية $-R\omega_0$ ، ولذلك يسرّع الاحتكاك مركز الكتلة ويبطئ الدوران.

ليكن دفع القوة العمودية

$$P = \int_{\text{التصادم}} N dt.$$

إذا كانت مدة التلامس τ ، فإن مبرهنة الدفع وكمية الحركة في الاتجاه الرأسي تعطي

$$P - mg\tau = m(u + w).$$

في التقريب المعتاد للتصادم القصير،

$$g\tau \ll u + w,$$

ومن ثم

$$P \simeq m(u + w).$$

يمكن أن تكون مدة التصادم غير صفرية مع تحقق هذا التقريب.

ليكن J دفع الاحتكاك الأفقي المتراكم. تعطي مبرهنتا الدفع وكمية الحركة الخطية، والدفع الزاوي وكمية الحركة الزاوية

$$mv = J, \quad I(\omega - \omega_0) = -RJ.$$

وباستخدام $I = 2mR^2/5$

$$v = \frac{J}{m}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{5J}{2mR}.$$

وبالتالي،

$$\boxed{R\omega - v = R\omega_0 - \frac{7J}{2m}}.$$

تتناقص هذه الكمية تناقصاً رتيباً ما دامت الكرة تنزلق. ويتوقف الانزلاق عندما تبلغ الصفر.

الحالة (a): زاوية الارتداد

إذا استمر الانزلاق طوال مدة التصادم، كان مقدار قوة الاحتكاك $\mu_k N$ طوال هذه المدة. لذلك

$$J = \mu_k P = \mu_k m(u + w),$$

وتكون السرعة الأفقية عند الانفصال

$$v = \mu_k(u + w).$$

تُقاس الزاوية θ في الشكل من الاتجاه الرأسي، ومن ثم

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \mu_k \frac{u + w}{w}.$$

وبما أن $w = \sqrt{a} u$

$$\tan \theta = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

الحالة (b): المسافة الأفقية

تغادر الكرة الأرضية وتعود إليها عند الارتفاع نفسه لمركز الكتلة، وهو R . لذلك يحقق زمن طيرانها T المعادلة

$$0 = wT - \frac{1}{2}gT^2,$$

التي تعطي

$$T = \frac{2w}{g}.$$

تبقى السرعة الأفقية ثابتة أثناء الطيران، ومن ثم

$$D = vT = \frac{2\mu_k(u + w)w}{g}.$$

بالتعويض بـ $u^2 = 2gh$ و $w = \sqrt{a} u$

$$D = 4\mu_k h \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}).$$

الحالة (c): السرعة الزاوية الابتدائية الدنيا

لأن $R\omega - v$ تتناقص تناقصاً رتيباً أثناء الانزلاق، يكفي فحص قيمتها عند نهاية التصادم. عند الحد الفاصل بين الحالتين، تصبح صفراً تماماً عند الانفصال:

$$R\omega_0 - \frac{7J}{2m} = 0.$$

ومع $J = \mu_k m(u + w)$ ، ينتج عن ذلك

$$\omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}(u + w).$$

إذن

$$\omega_{0,\min} = \omega_c = \frac{7\mu_k}{2R}\sqrt{2gh}(1 + \sqrt{a}).$$

عندما تكون $\omega_0 > \omega_c$ ، يستمر الانزلاق حتى عند الانفصال. وعندما تكون $\omega_0 = \omega_c$ ، يستمر حتى اللحظة الأخيرة من التلامس.

الحالة (a): زاوية الارتداد

عندما تكون $0 < \omega_0 < \omega_c$ ، يتوقف الانزلاق قبل اكتمال دفع القوة العمودية. ليكن J_* دفع الاحتكاك المتراكم عند تلك اللحظة. يعطي الشرط $v = R\omega$

$$R\omega_0 - \frac{7J_*}{2m} = 0,$$

ومن ثم

$$J_* = \frac{2mR\omega_0}{7}.$$

لذلك، عند اللحظة التي يتوقف فيها الانزلاق،

$$v_* = \frac{2R\omega_0}{7}, \quad \omega_* = \frac{2\omega_0}{7}.$$

تبقى هذه السرعات المرتبطة بالحركة المماسية دون تغيير خلال بقية مدة التلامس. لتبين ذلك، افترض أن قوة احتكاك سكوني f تؤثر بينما $v = R\omega$ عندئذ

$$m\dot{v} = f, \quad I\dot{\omega} = -Rf, \quad \dot{v} = R\dot{\omega}.$$

تؤدي هذه العلاقات مجتمعة إلى

$$f \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I} \right) = 0,$$

ومن ثم $f = 0$. ولا يلزم أي دفع مماسي إضافي.

إذن تكون السرعة الأفقية عند الانفصال

$$v = \frac{2R\omega_0}{7},$$

و

$$\tan \theta = \frac{v}{w} = \frac{2R\omega_0}{7\sqrt{2agh}}.$$

تشمل النتيجة أيضاً الحالة الحدية $\omega_0 = 0$ ، التي لا يحدث فيها انزلاق ويكون الارتداد رأسياً.

الحالة (b): المسافة الأفقية

باستخدام زمن الطيران نفسه $T = 2w/g$ ،

$$D = \frac{2R\omega_0}{7} \frac{2w}{g}.$$

إذن

$$D = \frac{4R\omega_0}{7g} \sqrt{2agh} = \frac{4R\omega_0}{7} \sqrt{\frac{2ah}{g}}.$$

الرسم التخطيطي المطلوب

عند ثبات h, R, a, μ_k ، يتكون المنحنى من جزأين:

• من $\omega_0 = 0$ إلى ω_c ، يكون خطأ مستقيماً يمر بنقطة الأصل وميله

$$\frac{2R}{7\sqrt{2agh}}.$$

• عند ω_c ، يتصل بخط أفقي يقع على ارتفاع

$$\mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

تتساوى القيمتان عند نقطة الاتصال لأن

$$\frac{2R\omega_c}{7\sqrt{2agh}} = \mu_k \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

عند سرعات دوران ابتدائية أكبر، يكون الاحتكاك مؤثراً بالفعل طوال مدة التلامس، ولذلك لا يمكن لزيادة سرعة الدوران أن تزيد الدفع المماسي المتاح.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: كرات مشحونة تتحرك على طول حلقة مربعة في مجال كهربائي (النسبية)

تتحرك في حلقة مربعة طول ضلعها L كرات كثيرة ذات أنصاف أقطار مهملة، تحمل كل منها شحنة q ، بسرعة u وبمسافة فاصلة ثابتة a بينها، كما تُرصد من إطار مرجعي ثابت بالنسبة إلى الحلقة. تنتظم الكرات على الحلقة مثل خرزات عقد، ويكون L أكبر بكثير من a ، كما هو موضح في الشكل 2.1. للسلك غير الموصل الذي يشكل الحلقة كثافة شحنة متجانسة لكل وحدة طول في إطار الحلقة. وشحنته الكلية تساوي الشحنة الكلية للكرات في ذلك الإطار مقداراً وتعاكسها إشارةً.

لننظر في الحالة التي تتحرك فيها الحلقة بسرعة v موازية لضلعها AB (الشكل 2.1) عبر مجال كهربائي متجانس شدته E ، عمودي على سرعة الحلقة ويصنع زاوية θ مع مستوى الحلقة.

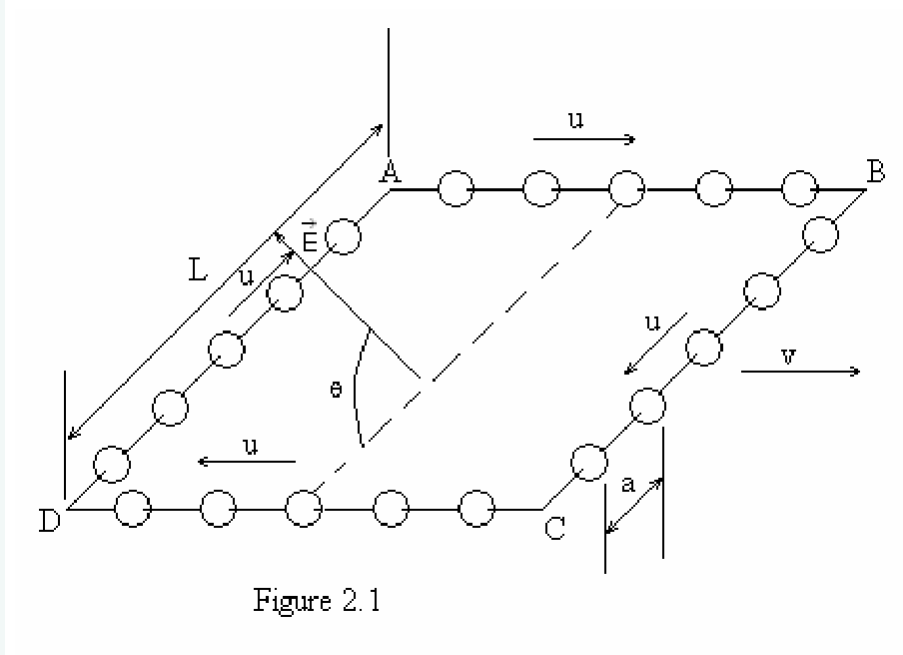


Figure 2.1

الشكل 2.1

مع أخذ التأثيرات النسبية في الحسبان، احسب المقادير التالية في الإطار المرجعي لراصد يرى الحلقة تتحرك بسرعة v :

(a) المسافة الفاصلة بين الكرات على كل ضلع من أضلاع الحلقة، a_{AB} ، a_{BC} ، a_{CD} ، و a_{DA} .

(b) قيمة الشحنة الصافية للحلقة والكرات معاً على كل ضلع من أضلاع الحلقة: Q_{AB} ، Q_{BC} ، Q_{CD} ، و Q_{DA} .

(c) مقدار عزم الدوران M الناشئ عن التأثير الكهربائي، والذي يميل إلى تدوير منظومة الحلقة والكرات.

(d) الطاقة W الناتجة عن تفاعل المنظومة المكوّنة من الحلقة والكرات مع المجال الكهربائي.

يجب التعبير عن جميع الإجابات بدلالة الكميات المحددة في المسألة.

ملاحظة. الشحنة الكهربائية لجسم معزول مستقلة عن الإطار المرجعي الذي تُجرى فيه القياسات. ينبغي إهمال أي تأثيرات للإشعاع الكهرومغناطيسي.

بعض صيغ النسبية الخاصة

لنعتبر إطاراً مرجعياً S' يتحرك بسرعة V بالنسبة إلى إطار مرجعي آخر S . محاور الإطارين متوازية، ويتطابق أصلاهما عند $t = 0$. وتتجه V في الاتجاه الموجب للمحور x .

الجمع النسبي للسرعات

إذا كان جسيم يتحرك بسرعة u' في الاتجاه x' ، كما تُقاس في S' ، فإن سرعة الجسيم المقاسة في S تُعطى بالعلاقة:

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

الانكماش النسبي

إذا كان طول جسم ساكن في الإطار S هو L_0 في الاتجاه x ، فإن راصداً في الإطار S' (يتحرك بسرعة V في الاتجاه x) سيقاس طوله ليكون:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تستخدم النتائج تقريب الشحنة المستمرة الذي يبرره الشرط $L \gg a$ ، مع اعتماد الاتجاهات المبينة في الشكل 2.1. هنا c هي سرعة الضوء.

(a •

$$a_{AB} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{BC} = a, \quad a_{CD} = \frac{a\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}, \quad a_{DA} = a.$$

(b •

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

(c •

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

(d • لاتجاه المجال المبين، الذي تتجه مركبته الواقعة في مستوى الحلقة من AB نحو CD .

$$W = \frac{qL^2uvE}{ac^2} \cos \theta.$$

الحل

ليكن S' إطار سكون الحلقة و S إطار الراصد. نختار المحور x في اتجاه $A \rightarrow B$ ، بحيث تتحرك الحلقة بسرعة $v\hat{x}$. ونختار $\hat{y}$ في اتجاه $A \rightarrow D$ ، عمودياً على AB ضمن مستوى الحلقة.

نعرف

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \kappa = \frac{uv}{c^2}.$$

بما أن $L \gg a$ ، نستعيض عن الكرات المنفصلة بشحنة خطية مستمرة على كل ضلع مستقيم، مهملين التقلبات المرتبطة بدخول الكرات المفردة إلى إحدى الزوايا أو خروجها منها. في S' ، تكون كثافتا شحنة الكرات والسلك، على الترتيب،

$$\lambda'_b = \frac{q}{a}, \quad \lambda'_w = -\frac{q}{a}.$$

(a) المسافة الفاصلة بين الكرات

يجب قياس المسافة الفاصلة بين مواضع تُسجَّل في الوقت نفسه في S . وهذه الأحداث لا تكون عمومًا متزامنة في S' .

على أيٍّ من الضلعين الموازيين للحركة، لتكن سرعة الكرات في S' هي w' ، حيث

$$w' = +u \text{ على } AB, \quad w' = -u \text{ على } CD.$$

نختار كرتين متجاورتين مرتبتي في اتجاه تزايد x' . بالنسبة إلى حدثين على مساريهما،

$$\Delta x' = a + w' \Delta t'.$$

يعطي تحويل لورنتز

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right).$$

ويؤدي اشتراط $\Delta t = 0$ إلى

$$\Delta t' = -\frac{v \Delta x'}{c^2}.$$

ومن ثم،

$$\Delta x' = a - \frac{vw'}{c^2} \Delta x', \quad \Delta x' = \frac{a}{1 + vw'/c^2}.$$

ويعطي تحويل الإحداثي المكاني عندئذٍ

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') = \gamma \Delta x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

إذًا

$$a_{\parallel} = \frac{a}{\gamma(1 + vw'/c^2)}.$$

بالتعويض عن السرعتين،

$$\boxed{a_{AB} = \frac{a \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + uv/c^2}, \quad a_{CD} = \frac{a \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - uv/c^2}.$$

على BC أو DA ، يكون لجميع الكرات على الضلع الواحد الإحداثي نفسه x' . لذلك $\Delta x' = 0$ ، وتحقق الأرصاد المتزامنة في S أيضًا $\Delta t' = 0$. لا تتغير المسافات العرضية بتحويل لورنتز، ولذلك

$$\boxed{a_{BC} = a_{DA} = a.}$$

(b) الشحنة الصافية على كل ضلع

في S ، تتكش الأضلاع الموازية للحركة:

$$\ell_{AB} = \ell_{CD} = \frac{L}{\gamma}, \quad \ell_{BC} = \ell_{DA} = L.$$

يحمل كل ضلع من السلك شحنة ثابتة

$$Q_w = -\frac{qL}{a}.$$

وهي نفسها في كلا الإطارين، لأن الشحنة ثابتة تحت التحويل بين الأطر ولأن شحنات السلك لا تنتقل بين الأضلاع.

عدد الكرات على كل ضلع يساوي طوله المرصود مقسومًا على المسافة الفاصلة المرصودة المقابلة:

$$N_{AB} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1 + \kappa)]} = \frac{L}{a}(1 + \kappa),$$

$$N_{CD} = \frac{L/\gamma}{a/[\gamma(1-\kappa)]} = \frac{L}{a}(1-\kappa),$$

$$N_{BC} = N_{DA} = \frac{L}{a}.$$

بإضافة شحنة السلك إلى شحنة الكرات نحصل على

$$Q_{AB} = q\frac{L}{a}(1+\kappa) - \frac{qL}{a} = \frac{qL}{a}\kappa,$$

$$Q_{CD} = q\frac{L}{a}(1-\kappa) - \frac{qL}{a} = -\frac{qL}{a}\kappa.$$

ويبقى الضلعان العرضيان متعادلين كهربائياً. ومن ثم

$$Q_{AB} = \frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{BC} = 0, \quad Q_{CD} = -\frac{qLuv}{ac^2}, \quad Q_{DA} = 0.$$

مجموع هذه الشحنات يساوي صفراً، كما يقتضي ثبات الشحنة الكلية تحت التحويل بين الأطر. وليس من الضروري أن تبقى شحنة كل ضلع على حدة صفراً، لأن الكرات التي تشغل ذلك الضلع عند لحظة متزامنة تختلف من إطار إلى آخر.

(c) عزم الدوران الناشئ عن التأثير الكهربائي

نكتب

$$Q = \frac{qLuv}{ac^2},$$

بحيث تكون الشحنتان الصافيتان على AB و CD هما Q و $-Q$.

في تقريب الشحنة المستمرة، تنتوزع هاتان الشحنتان بانتظام على طول الضلعين المعنيين. وتؤثر محصلتا القوتين عند منتصف الضلعين. متجه الفصل بين هذين المنتصفين هو $L\hat{y}$ ، لأن هذه المسافة عمودية على حركة الحلقة ولا تنكمش.

لذلك يكون عزم ثنائي القطب الكهربائي

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{r}_{AB} - Q\mathbf{r}_{CD} = -QL\hat{y}.$$

في مجال كهربائي منتظم، تكون القوة الكلية صفراً، بينما يكون عزم الدوران

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

مركبة المجال الواقعة في مستوى الحلقة موازية لـ $\hat{y}$ ، ولا تُحدث عزم دوران. أما المركبة العمودية على المستوى فهي $E \sin \theta$ ، وتُحدث عزم دوران حول محور موازٍ لـ AB ، مقداره

$$M = |Q|LE \sin \theta.$$

إذاً

$$M = \frac{|q|L^2uvE}{ac^2} \sin \theta.$$

وحدة هذا المقدار هي N m. إذا كان المقصود بـ q مقدار الشحنة الموجب، فيمكن ببساطة كتابة q بدلاً من $|q|$.

(d) طاقة التفاعل

لمجال كهربائي خارجي منتظم،

$$\phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \phi_0 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

تكون طاقة التفاعل

$$W = \int \phi_{\text{ext}} dq.$$

بما أن الشحنة الكلية للمنظومة صفر، يزول إسهام الثابت ϕ_0 :

$$W = -\mathbf{E} \cdot \int \mathbf{r} dq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

تُبين علامة الزاوية في الشكل 2.1 أن مركبة $\mathbf{E}$ الواقعة في مستوى الحلقة تتجه في اتجاه $A \rightarrow D$ ، ولذلك

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{y}} = E \cos \theta.$$

وباستخدام $\mathbf{p} = -QL\hat{\mathbf{y}}$

$$W = QLE \cos \theta.$$

وعليه

$$W = \frac{qL^2 uv E}{ac^2} \cos \theta.$$

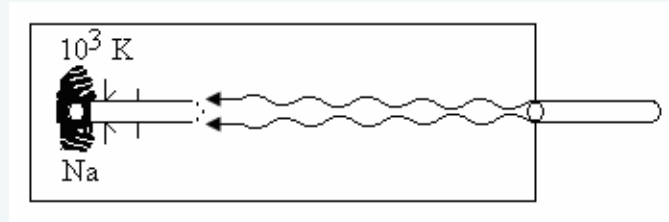
وحدة هذه الطاقة هي الجول، وتنعقد عندما يكون المجال عمودياً على الحلقة. عندما تكون q موجبة، تنتج الإشارة الموجبة من كون عزم ثنائي القطب الكهربائي معاكساً لمركبة المجال الواقعة في مستوى الحلقة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

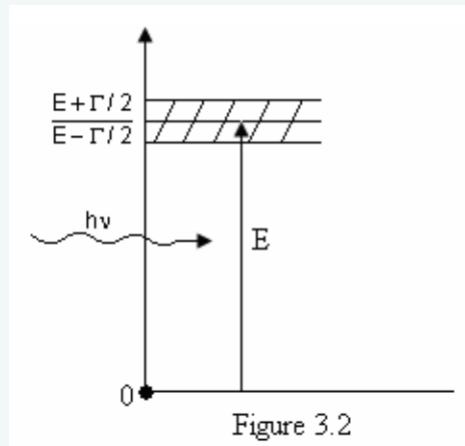
المسألة 3: تبريد الذرات بالليزر

لدراسة خصائص الذرات المعزولة بدرجة عالية من الدقة، يجب إبقاؤها شبه ساكنة مدة من الزمن. وقد طُوِّرت حديثاً طريقة لتحقيق ذلك، تُسمى «التبريد بالليزر»، وتوضحها المسألة الآتية.

في حجرة مفرغة، تُضأ حزمة جيدة التسديد من ذرات Na^{23} (ناتجة عن تبخير عينة عند 10^3 K) بحزمة ليزر عالية الشدة تواجهها مباشرة (الشكل 3.1). يُختار تردد الليزر بحيث يحدث امتصاص رنيني لفوتون بواسطة الذرات التي سرعتها v_0 . وعند امتصاص الضوء، تُثار هذه الذرات إلى مستوى الطاقة الأول، الذي يزيد متوسط طاقته بمقدار E على طاقة الحالة الأرضية، ويبلغ عدم اليقين فيه Γ (الشكل 3.2).



الشكل 3.1



الشكل 3.2

في هذه العملية، يُعطى انخفاض سرعة الذرة Δv_1 بالعلاقة $\Delta v_1 = v_1 - v_0$. ثم تُصدر الذرة ضوءاً عند عودتها إلى حالتها الأرضية. وتتغير سرعة الذرة بمقدار $\Delta v' = v'_1 - v_1$ ، ويتغير اتجاه حركتها بزاوية φ (الشكل 3.3).

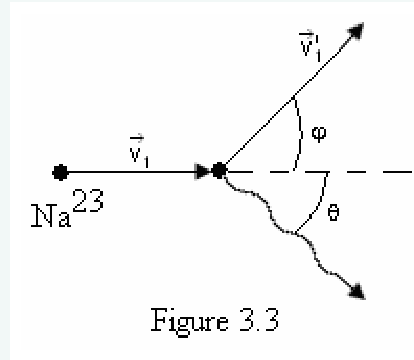


Figure 3.3

الشكل 3.3

يتكرر هذا التسلسل من الامتصاص والانبعث مرات عديدة إلى أن تنخفض سرعة الذرات بمقدار معين Δv ، بحيث لا يعود الامتصاص الرنيني للضوء ذي التردد ν يحدث. وعندئذ يلزم تغيير تردد الليزر للحفاظ على الامتصاص الرنيني. وتُبطأ الذرات المتحركة بالسرعة الجديدة أكثر، إلى أن تصبح سرعة بعضها قريبة من الصفر.

كتقريب أول، يمكننا إهمال جميع عمليات التفاعل الذري عدا امتصاص الضوء وانبعثاته التلقائيين الموصوفين أعلاه. كما يمكننا افتراض أن شدة الليزر كبيرة إلى حد أن الذرات لا تمكث عملياً أي وقت في الحالة الأرضية.

الأسئلة

- أوجد تردد الليزر اللازم لضمان الامتصاص الرنيني للضوء بواسطة تلك الذرات التي طاقتها الحركية للذرات داخل المنطقة الواقعة خلف المسدّد. وأوجد أيضاً انخفاض سرعة هذه الذرات، Δv_1 ، بعد عملية الامتصاص.
- تمتص الضوء ذا التردد المحسوب في السؤال (a) ذرات تقع سرعاتها ضمن مجال Δv_0 . احسب مجال السرعات هذا.
- عندما تُصدر ذرة ضوءاً، يتغير اتجاه حركتها بزاوية φ عن الاتجاه الابتدائي. احسب φ .
- أوجد أكبر انخفاض ممكن في السرعة Δv عند تردد معين.
- ما العدد التقريبي N لعمليات الامتصاص والانبعث اللازمة لخفض سرعة ذرة من قيمتها الابتدائية v_0 -الموجودة في السؤال (a) أعلاه- إلى ما يقارب الصفر؟ افترض أن الذرة تتحرك في خط مستقيم.
- أوجد الزمن t الذي تستغرقه العملية الواردة في السؤال e. واحسب المسافة ΔS التي تقطعها الذرة خلال هذا الزمن.

المعطيات

$$\begin{aligned}
 E &= 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
 \Gamma &= 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J} \\
 c &= 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \\
 m_p &= 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
 h &= 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
 k &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}
 \end{aligned}$$

حيث c سرعة الضوء، و h ثابت بلانك، و k ثابت بولتزمان، و m_p كتلة البروتون.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تستخدم النتائج العددية الشرط المفترض أنه المقصود في (a)، وهو $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT$ ، الذي يعطي $v_0 = 1.04 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$.

• (a)

$$\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)} \simeq 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

وهذا أقل من تردد رنين الذرة الساكنة بنحو $1.76 \times 10^9 \text{ Hz}$.

$$\Delta v_1 \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

المقدار الموجب لانخفاض السرعة هو $2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

• (b) مجال السرعات الرنينية الكامل هو

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1},$$

ويمتد تقريباً من $v_0 - 3.1 \text{ m s}^{-1}$ إلى $v_0 + 3.1 \text{ m s}^{-1}$.

• (c) لزاوية الانبعاث θ المبينة في الشكل 3.3، لتكن $v_r = E/(mc)$ عندئذ

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

يبلغ أقصى انحراف ابتدائي نحو $2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}$.

• (d) عند البدء بالسرعة الرنينية المركزية v_0 ،

$$\Delta v \simeq \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

يمكن لذرة تبدأ عند الحد الأعلى لمجال الرنين أن تعبر المجال كاملاً، أي نحو 6.3 m s^{-1} .

• (e) مع إعادة ضبط تردد الليزر أثناء التباطؤ،

$$N \simeq \frac{mc v_0}{E} \simeq 3.6 \times 10^4.$$

• (f) باعتبار Γ العرض الطبيعي الكامل لخط الطاقة،

$$t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s} = 0.54 \text{ ms}, \quad \Delta S \simeq 0.28 \text{ m}.$$

الحل

(a) تردد الرنين والارتداد الناتج عن الامتصاص

الجملة التي تحدد الطاقة الحركية الابتدائية غير مكتملة في النص المقدم. نستخدم الشرط المرجح أنه المقصود، وهو أن الذرات المختارة تمتلك متوسط الطاقة الحركية الحرارية:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT.$$

بتقريب كتلة ذرة الصوديوم إلى $23m_p$ ،

$$m = 23(1.67 \times 10^{-27}) = 3.841 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

ومن ثم

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(10^3)}{3.841 \times 10^{-26}}} = 1.038 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

إذن $v_0/c \simeq 3.46 \times 10^{-6}$ ، ولذلك تكفي الميكانيكا غير النسبية وصيغة دوپلر من الرتبة الأولى.

نختار الاتجاه الموجب على امتداد الحزمة الذرية الساقطة. ويكون زخم الفوتون المنتشر في الاتجاه المعاكس $-h\nu/c$. يعطي انحفاظ الزخم أثناء الامتصاص

$$mv_1 = mv_0 - \frac{h\nu}{c},$$

ومن ثم

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = -\frac{h\nu}{mc}.$$

ويعطي انحفاظ الطاقة

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + E.$$

بالتعويض من علاقة الزخم،

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2}.$$

الحد الأخير هو طاقة الارتداد. وتبلغ قيمته تقريباً

$$E_r \simeq \frac{E^2}{2mc^2} = 1.6 \times 10^{-29} \text{ J},$$

وهي صغيرة حتى بالمقارنة مع $\Gamma = 7.0 \times 10^{-27} \text{ J}$. وبإهمالها،

$$\boxed{\nu \simeq \frac{E}{h(1 + v_0/c)}}.$$

وهذا أيضاً شرط الرنين وفق تأثير دوپلر: ترى الذرة المقتربة تردداً $\nu(1 + v_0/c)$ ، ويجب أن يساوي E/h .

للتوضيح، مع الاحتفاظ مؤقتاً بأرقام إضافية،

$$\nu_{\text{rest}} = \frac{E}{h} = 5.0755287 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

$$\nu \simeq 5.0755111 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

وعليه، فإن تردد الليزر المطلوب أقل من تردد رنين الذرة الساكنة بمقدار

$$\nu_{\text{rest}} - \nu \simeq \nu_{\text{rest}} \frac{v_0}{c} = 1.76 \times 10^9 \text{ Hz}.$$

الارتداد الناتج عن الامتصاص هو

$$\boxed{\Delta v_1 = -\frac{h\nu}{mc} \simeq -2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}.$$

وتكون إشارته سالبة وفق التعريف الوارد في السؤال.

(b) مجال السرعات الرنينية

وفق مجال الطاقة المبين في الشكل 3.2، نعتبر أن الرنين يحدث عندما تقع طاقة الفوتون المزاخة بتأثير دوپلر بين $E - \Gamma/2$ و $E + \Gamma/2$:

$$E - \frac{\Gamma}{2} \leq h\nu \left(1 + \frac{v}{c}\right) \leq E + \frac{\Gamma}{2}.$$

وعليه، فإن السرعتين الحديتين هما

$$v_{\pm} = c \left(\frac{E \pm \Gamma/2}{h\nu} - 1 \right).$$

ولأن الليزر مضبوط على مركز الخط عند السرعة v_0 ،

$$v_{\pm} = v_0 \pm \frac{c\Gamma}{2h\nu}.$$

إن مجال السرعات الكامل هو

$$\Delta v_0 = v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu}.$$

وباستخدام $h\nu \simeq E$

$$\Delta v_0 \simeq \frac{(3.0 \times 10^8)(7.0 \times 10^{-27})}{3.36 \times 10^{-19}} = 6.25 \text{ m s}^{-1} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

يبلغ نصف العرض نحو 3.1 m s^{-1} .

(c) الانحراف الناتج عن الانبعاث التلقائي

يبلغ زخم الفوتون المنبعث تقريباً E/c . نعرّف سرعة الارتداد المقابلة

$$v_r = \frac{E}{mc} \simeq 2.92 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}.$$

يمكن هنا إهمال التصحيحات الصغيرة لطاقة الفوتون المنبعث الناتجة عن تأثير دوبلر والارتداد.

وفق الترتيب الهندسي في الشكل 3.3، ينتقل الفوتون بزاوية θ أسفل الاتجاه الابتدائي. يعطي انحفاظ الزخم في الاتجاهين الموازي والعمودي على ذلك الاتجاه

$$mv_1 = mv'_1 \cos \varphi + \frac{E}{c} \cos \theta,$$

$$mv'_1 \sin \varphi = \frac{E}{c} \sin \theta.$$

وبالقسمة،

$$\tan \varphi = \frac{v_r \sin \theta}{v_1 - v_r \cos \theta}.$$

في البداية $v_r \ll v_1$ ، ولذلك

$$\varphi \simeq \frac{v_r}{v_1} \sin \theta.$$

ومع $v_1 \simeq 1038.16 \text{ m s}^{-1}$

$$\varphi \simeq 2.8 \times 10^{-5} \sin \theta \text{ rad}.$$

يحدث أكبر انحراف عندما يكون الانبعاث عمودياً تقريباً على سرعة الذرة. وبصورة أدق، عند ثبات زخم الفوتون،

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{v_r}{v_1} \right) \simeq 2.8 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

وهكذا، لا يغير انبعاث واحد الاتجاه الابتدائي إلا بمقدار ضئيل جداً. ويتطلب تعيين قيمة وحيدة لـ φ تحديد زاوية الانبعاث العشوائية θ .

(d) أقصى تباطؤ عند ثبات تردد الليزر

لننظر أولاً في ذرة تبدأ بالسرعة الرنينية المركزية v_0 ، كما في الجزء (a). عندما تتباطأ، تنخفض طاقة الفوتون في إطار سكونها. ويبلغ الحد الأدنى لمجال الرنين عندما

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c}\right) = E - \frac{\Gamma}{2}.$$

وبطرح هذه العلاقة من

$$h\nu \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) = E$$

نحصل على

$$\frac{h\nu}{c} \Delta v = \frac{\Gamma}{2}.$$

لذلك، ضمن دقة عرض الخط المستخدمة في المسألة،

$$\Delta v = \frac{c\Gamma}{2h\nu} \simeq 3.1 \text{ m s}^{-1}.$$

إذا كان تعبير «أكبر انخفاض ممكن» يشمل جميع السرعات الابتدائية التي تتيح امتصاص ضوء الليزر بهذا التردد الثابت، فقد تبدأ الذرة عند v_+ وتتباطأ إلى v_- . وعندئذ يكون أكبر مدى

$$v_+ - v_- = \frac{c\Gamma}{h\nu} \simeq 6.3 \text{ m s}^{-1}.$$

كلتا القيمتين أصغر بكثير من v_0 . ولذلك يتطلب استمرار التباطؤ زيادة تردد الليزر نحو E/h مع تباطؤ الذرات.

(e) عدد عمليات الامتصاص والانبعاث

تُكسب كل عملية امتصاص الذرة تغيرًا موجَّهًا في الزخم يساوي تقريبًا

$$\Delta p_{x,\text{abs}} = -\frac{E}{c}.$$

ليس للانبعاث التلقائي اتجاه مفضَّل إلى الأمام أو الخلف في إطار سكون الذرة. وبالتالي، ضمن الدقة الحالية،

$$\langle \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \Delta p_{x,\text{em}} \rangle = 0.$$

إذن متوسط تغير السرعة الطولية في كل دورة كاملة هو

$$\langle \Delta v_x \rangle = -v_r = -\frac{E}{mc}.$$

باستخدام تقريب الحركة في خط مستقيم المطلوب في السؤال، وإعادة ضبط تردد الليزر للحفاظ على الرنين،

$$Nv_r \simeq v_0.$$

ومن ثم

$$N \simeq \frac{v_0}{v_r} = \frac{mcv_0}{E}.$$

عديًا،

$$N \simeq \frac{(3.841 \times 10^{-26})(3.0 \times 10^8)(1038.19)}{3.36 \times 10^{-19}} = 3.56 \times 10^4.$$

إذن يلزم نحو

$$N \simeq 3.6 \times 10^4$$

دورة. يقدر هذا انخفاض متوسط السرعة الموجهة؛ أما الذرات منفردة فتتعرض لارتدادات عشوائية ناتجة عن الانبعاث.

(f) زمن التبريد ومسافته

لحالة مثارة متوسط عمرها τ ، يحقق العرض الطبيعي الكامل لخط الطاقة العلاقة

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}.$$

تُؤخذ Γ هنا بوصفها العرض الكامل، بما يتسق مع الحدين $E \pm \Gamma/2$. ومن ثم

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{h}{2\pi\Gamma}.$$

عددياً،

$$\tau = \frac{6.62 \times 10^{-34}}{2\pi(7.0 \times 10^{-27})} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

وفق الافتراض الصريح بأن الذرات لا تمكث عملياً أي وقت في الحالة الأرضية، فإن متوسط مدة الدورة الواحدة هو τ . ولذلك

$$t = N\tau = (3.56 \times 10^4)(1.51 \times 10^{-8}) \simeq 5.36 \times 10^{-4} \text{ s},$$

أو

$$\boxed{t \simeq 5.4 \times 10^{-4} \text{ s}}.$$

متوسط الارتداد في كل دورة ومتوسط مدة الدورة ثابتان تقريباً. لذا يكون مقدار متوسط التباطؤ ثابتاً

$$a = \frac{v_r}{\tau} \simeq 1.94 \times 10^6 \text{ m s}^{-2}.$$

عند التباطؤ من v_0 إلى ما يقارب الصفر، يكون متوسط السرعة خلال العملية $v_0/2$ ، مما يعطي

$$\Delta S \simeq \frac{v_0 t}{2} = \frac{(1038.19)(5.36 \times 10^{-4})}{2} \simeq 0.278 \text{ m}.$$

لذلك

$$\boxed{\Delta S \simeq 0.28 \text{ m}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.