

IPhO 1990

理论题与解答 · 荷兰格罗宁根 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1990/

题目 1: 晶体的 X 射线衍射

我们希望研究立方晶格对 X 射线的衍射。为此，先考察单色平面波垂直入射到二维栅格时的衍射。该栅格由 $N_1 \times N_2$ 个狭缝组成，两个方向上的间距分别为 d_1 和 d_2 。在距栅格 L 处的屏上观察衍射图样。屏与栅格平行，且 L 远大于 d_1 和 d_2 。

a – 确定屏上主极大的位置和宽度。宽度定义为极大两侧极小之间的距离。

现在考虑一个立方晶体，其晶格间距为 a ，尺寸为 $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$ 。 N_1 远小于 N_0 。将晶体以角度 Θ 放置在沿 z 轴传播的平行 X 射线束中（见图 1）。同样，在距晶体很远的屏上观察衍射图样。

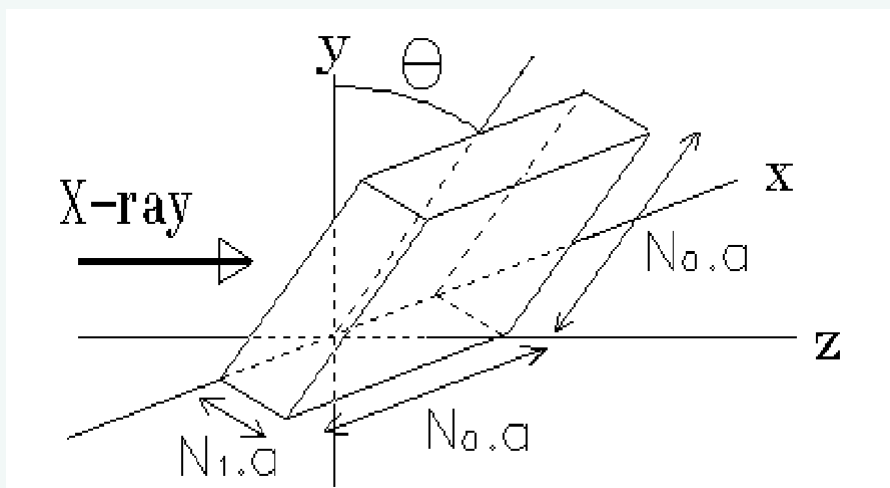


图 1 沿 z 轴传播的平行 X 射线束的衍射。晶体与 y 轴之间的夹角为 Θ 。

b – 计算极大的位置和宽度随角度 Θ 的变化关系（对于小 Θ ）。

– 特别地， $N_1 \ll N_0$ 这一事实会产生什么影响？

衍射图样也可以用布拉格理论推导出来。该理论假定 X 射线在晶格中的原子平面上发生反射，衍射图样由这些反射射线之间的相互干涉产生。

c – 证明，这种所谓的布拉格反射给出的极大条件与你在 b 中得到的条件相同。

有些测量采用所谓的粉末法。一束 X 射线被由大量微小晶体组成的粉末散射。（当然，晶体的尺寸远大于晶格间距 a 。）

波长为 0.15 nm 的 X 射线被氯化钾 $[\text{KCl}]$ （具有立方晶格，见图 2）散射后，在照相底片上形成同心暗环。晶体与底片之间的距离为 0.10 m ，最小圆环的半径为 0.053 m （见图 3）。 K^+ 和 Cl^- 离子的大小几乎相同，可以将它们视为相同的散射中心。

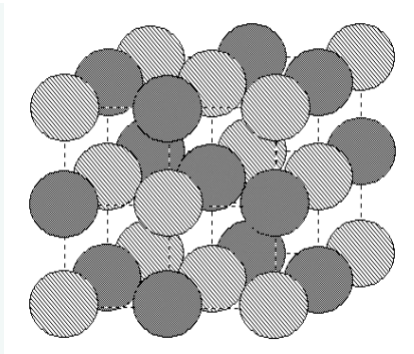


图 2. 氯化钾的立方晶格，其中 K^+ 和 Cl^- 离子的大小几乎相同。

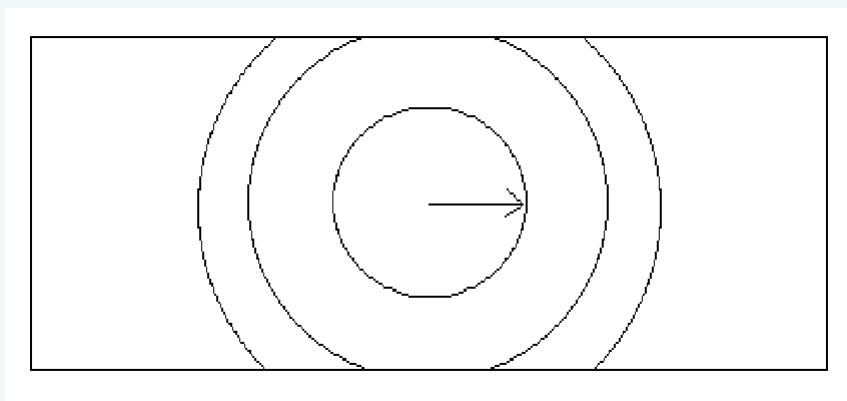


图 3. X 射线被 KCl 晶体粉末散射后，在照相底片上形成同心暗环。

d – 计算晶体中两个最近邻 K 离子之间的距离。

题目译自官方英文原文。

答案

用 λ 表示波长。屏坐标 X, Y 以未偏转光束的位置为原点；对于晶体， L 表示晶体到屏的距离。

- a. 对于整数 m, n ，令

$$u_m = \frac{m\lambda}{d_1}, \quad v_n = \frac{n\lambda}{d_2}.$$

主极大位于

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

它们在方向余弦空间中两侧第一零点之间的全宽为

$$\Delta u = \frac{2\lambda}{N_1 d_1}, \quad \Delta v = \frac{2\lambda}{N_2 d_2}.$$

对于小衍射角，上述结果变为

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2}, \quad W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

- **b.** 记 $r = \lambda/a$, 并令 h, k, ℓ 为整数衍射指标。定义

$$B = k \sin \Theta + \ell \cos \Theta, \quad C = k \cos \Theta - \ell \sin \Theta.$$

完全相长干涉的极大满足

$$2B + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0$$

并出现在

$$(X, Y) = \frac{Lr(h, C)}{1 + rB}.$$

对于小 Θ , 使用 $B \simeq k\Theta + \ell$ 和 $C \simeq k - \ell\Theta$ 。

对于小散射角下的前向衍射, 尖锐斑点满足

$$(X, Y) \simeq Lr(h, k), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

当

$$-k\Theta - \frac{\lambda}{2a}(h^2 + k^2) = \ell,$$

时, 其厚度方向的干涉因子取最大值; 当左端等于 $\ell \pm 1/N_1$ 时, 出现相邻零点。因此, $N_1 \ll N_0$ 使斑点很窄, 而使其被激发的条件宽松得多。对于 $k \neq 0$, 相应的倾角全宽近似为

$$\Delta\Theta = \frac{2}{N_1 |k|}.$$

- **c.** 布拉格条件

$$2d \sin \theta_B = p\lambda$$

与 **b** 中的晶格干涉条件等价。特别地, 对于法线沿倾斜晶体长轴的晶面, 其反射满足

$$2a \sin \Theta = p\lambda, \quad X = 0, \quad Y = -L \tan(2\Theta)$$

这里采用下文所选的取向。

- **d.** 最近邻钾离子之间的距离为

$$d_{K-K} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.44 \text{ nm}.$$

解答

我们采用远场（即夫琅禾费）近似下的相干弹性散射模型。将狭缝和晶格格点视为相同的辐射源, 忽略单个辐射源的衍射包络。

对于 N 个等间距辐射源, 相邻辐射源的相位差为 $2\pi t$ 时, 有一个有用的结果:

$$F_N(t) = \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j t} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\pi t)}{\sin^2(\pi t)}.$$

当 $t = m$ 为整数时, 其极限值为 N^2 : 所有贡献均同相。对于 $N > 1$, 最近的零点为

$$t = m \pm \frac{1}{N}.$$

a. 二维栅格的衍射

取栅格的两个轴沿 x, y 方向，入射波沿 z 方向传播。出射射线的单位方向矢量为

$$\mathbf{s} = (u, v, w), \quad w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0.$$

每个狭缝处的入射相位相同。相邻狭缝之间的出射光程差分别为 $d_1 u$ 和 $d_2 v$ 。因此

$$I(u, v) \propto F_{N_1} \left(\frac{d_1 u}{\lambda} \right) F_{N_2} \left(\frac{d_2 v}{\lambda} \right).$$

两个因子均在

$$d_1 u = m\lambda, \quad d_2 v = n\lambda.$$

时达到主极大。只有满足 $u_m^2 + v_n^2 < 1$ 的衍射级次才能到达前向半空间中的屏。

沿 $\mathbf{s}$ 方向传播的射线与平面 $z = L$ 相交于

$$X = L \frac{u}{w}, \quad Y = L \frac{v}{w}.$$

所以

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

最近的零点边界为

$$u = u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, \quad v = v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}.$$

这些方程与上述到屏坐标的映射一起，无须小角度近似即可确定第一零点边界。

例如，定义

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{L(u, v)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

沿栅格自然坐标方向的两对第一零点为

$$\mathbf{R} \left(u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, v_n \right), \quad \mathbf{R} \left(u_m, v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2} \right).$$

各对零点之间的距离给出相应的屏上宽度。

对于小衍射角， $u, v \ll 1$ ，所以 $X \simeq Lu$ 、 $Y \simeq Lv$ 。于是

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2},$$

且

$$\boxed{W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.}$$

b. 倾斜有限晶体的衍射

选取晶体的单位基矢为

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}} \cos \Theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \Theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \Theta.$$

两个长尺寸分别沿 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向；薄的尺寸沿 $\mathbf{e}_3$ 方向。这样，正 Θ 表示晶体长轴从 $+y$ 向 $+z$ 方向倾斜。

入射波矢和出射波矢为

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}_f = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}.$$

定义散射矢量

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

与 $\mathbf{a}$ 中的栅格不同，不同深度处的原子所处的入射相位也不同。 $\mathbf{q}$ 同时计入了入射和出射传播的影响。定义

$$p_i = \frac{a}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i.$$

具体写为

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a}{\lambda} s_x, \\ p_2 &= \frac{a}{\lambda} [s_y \cos \Theta + (s_z - 1) \sin \Theta], \\ p_3 &= \frac{a}{\lambda} [-s_y \sin \Theta + (s_z - 1) \cos \Theta]. \end{aligned}$$

因此，完整的有限晶格干涉图样为

$$I(\mathbf{s}) \propto F_{N_0}(p_1) F_{N_0}(p_2) F_{N_1}(p_3).$$

完全相长干涉的极大要求

$$p_1 = h, \quad p_2 = k, \quad p_3 = \ell,$$

其中 h, k, ℓ 为整数。等价地，

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3).$$

记 $r = \lambda/a$ ，则出射方向为

$$\begin{aligned} s_x &= rh, \\ s_y &= r(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta), \\ s_z &= 1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta). \end{aligned}$$

弹性散射要求 $|\mathbf{s}| = 1$ 。代入得

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

对于任一允许的前向衍射级次，其屏上位置为

$$X = \frac{Lrh}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}, \quad Y = \frac{Lr(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}.$$

这些公式保留了出射射线的精确几何关系。对于小晶体倾角，

$$2(k\Theta + \ell) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) \simeq 0,$$

且

$$X \simeq \frac{Lrh}{1 + r(\ell + k\Theta)}, \quad Y \simeq \frac{Lr(k - \ell\Theta)}{1 + r(\ell + k\Theta)}.$$

完全相长干涉极大周围的第一零点位于

$$p_1 = h \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_2 = k \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_3 = \ell \pm \frac{1}{N_1}.$$

因此，各散射矢量分量上的全宽为

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \frac{4\pi}{N_0 a}, \quad \Delta q_3 = \frac{4\pi}{N_1 a}.$$

由于 $N_1 \ll N_0$ ，前两个因子形成窄峰，而第三个因子给出相对较宽的包络。因此，即使 p_3 不恰好为整数，尖锐斑点仍可能可见。

为完整起见，可以不要求严格的三维相长干涉而求得这种斑点的位置。令 $p_1 = h$, $p_2 = k$ 。在前向分支上，

$$\zeta_{hk}(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - r^2 h^2 - (\sin \Theta + rk)^2} - \cos \Theta}{r}$$

即由此得到的 p_3 值。其位置为

$$\mathcal{R}_\Theta(h, k) = \frac{Lr(h, k \cos \Theta - \zeta_{hk} \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \zeta_{hk} \cos \Theta)}.$$

其强度包含因子 $F_{N_1}(\zeta_{hk})$ 。当 ζ_{hk} 为整数时，出现完全相长干涉峰。

对于充分激发的斑点，通过在此映射中作替换

$$h \longrightarrow h \pm \frac{1}{N_0}, \quad \text{或} \quad k \longrightarrow k \pm \frac{1}{N_0}.$$

即可得到两对第一零点。它们之间的距离给出屏上宽度，并包含对 Θ 的依赖关系。

小角度形式使其物理影响尤为清楚。令

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{Y}{L}, \quad \mathbf{s} \simeq \left(\alpha, \beta, 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

对于小 Θ, α, β ,

$$p_1 \simeq \frac{\alpha}{r}, \quad p_2 \simeq \frac{\beta}{r}, \quad p_3 \simeq -\frac{\Theta\beta + (\alpha^2 + \beta^2)/2}{r}.$$

在 p_3 中必须保留角度的二次项，因为它是纵向光程差的最低阶项。

因此，横向窄峰出现在

$$\alpha_h \simeq hr, \quad \beta_k \simeq kr,$$

其全宽为

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\beta \simeq \frac{2r}{N_0}.$$

故

$$(X, Y) \simeq \left(\frac{h\lambda L}{a}, \frac{k\lambda L}{a} \right), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

在这些位置处，

$$p_3 \simeq -k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2).$$

因此，厚度包络在

$$-k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2) = \ell,$$

时出现极大，其相邻零点位于 $\ell \pm 1/N_1$ 。

对于厚度方向的中央级次 $\ell = 0$ ，最强的斑点满足

$$h^2 + \left(k + \frac{\Theta}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Theta}{r}\right)^2.$$

有限厚度将这一圆展宽为一个带状区域，其中的晶格斑点受到显著激发。

对于 $k \neq 0$ ，改变倾角时， p_3 的变化率为

$$\frac{dp_3}{d\Theta} \simeq -k.$$

因此，倾角上两侧第一零点之间的全宽为

$$\Delta\Theta \simeq \frac{2}{N_1|k|}.$$

两个大尺寸决定了斑点的窄宽度。薄的尺寸给出较宽的干涉包络，使斑点能在较宽的晶体取向范围内受到显著激发。

c. 与布拉格反射的等价性

考虑一组由互素整数指标 (H, K, M) 标记的原子平面。它们的单位法向量和面间距为

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}.$$

令 θ_B 为入射光束与这些平面之间的掠射角。相邻平面反射的射线之间的光程差为

$$2d \sin \theta_B.$$

相长干涉要求

$$2d \sin \theta_B = p\lambda, \quad p = 1, 2, \dots$$

镜面反射只改变波矢垂直于平面的分量。因此， $\mathbf{q}$ 垂直于这些平面，其大小为

$$|\mathbf{q}| = 2\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_B.$$

利用布拉格条件，

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\pi p}{d}.$$

适当选取法线方向后，

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi p}{a}(H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3).$$

令

$$(h, k, \ell) = p(H, K, M)$$

便恰好得到

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a}(h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3),$$

即 **b** 中推导出的三个晶格干涉条件。再要求入射波长与出射波长相等，即得到同样的条件

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + \frac{\lambda}{a}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

作为一个直接的例子，取法线沿 $\mathbf{e}_2$ 的平面。它们的面间距为 a ，掠射角为 Θ 。布拉格定律给出

$$2a \sin \Theta = p\lambda.$$

在 **b** 中，选取 $h = 0$, $k = -p$, $\ell = 0$ 。条件变为

$$-2p \sin \Theta + \frac{\lambda}{a}p^2 = 0,$$

两者完全相同。出射射线为

$$\mathbf{s} = (0, -\sin 2\Theta, \cos 2\Theta),$$

所以

$$X = 0, \quad Y = -L \tan 2\Theta.$$

d. 最近邻钾离子之间的距离

当 K^+ 和 Cl^- 的散射作用相同时，交替排列的离子就相当于由相同散射中心组成的简单立方晶格。

用 b 表示最近邻 K-Cl 间距。等效简单立方晶格的晶格间距为 b 。其最大的反射晶面间距为 b ，因此，最小非零衍射角来自满足下式的一级反射：

$$2b \sin \theta_B = \lambda.$$

随机的晶体取向产生散射角为 $2\theta_B$ 的散射射线圆锥。因此，垂直放置的照相底片记录到一个半径为

$$R = L \tan(2\theta_B).$$

的圆环。利用给定数据，

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{0.053}{0.10}\right) = 27.9236^\circ,$$

从而

$$\theta_B = 13.9618^\circ.$$

这里不需要小角度近似。

于是

$$b = \frac{0.15 \text{ nm}}{2 \sin 13.9618^\circ} = 0.31085 \text{ nm}.$$

两种离子沿简单立方晶格的每个轴交替排列。因此，两个最近邻钾离子位于边长为 b 的立方体的一条面对角线两端，故

$$d_{\text{K-K}} = \sqrt{2}b = \sqrt{2}(0.31085 \text{ nm}) = 0.43961 \text{ nm}.$$

保留两位有效数字，

$d_{\text{K-K}} = 0.44 \text{ nm} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m}.$

解答已与官方解答核对。

题目 2：地球磁层中的电学实验

1991 年 5 月，亚特兰蒂斯号航天飞机将进入环绕地球的轨道。我们假定该轨道为圆形，且位于地球赤道平面内。

在某个预定时刻，航天飞机将释放一颗卫星 S，卫星连接在一根长度为 L 的导电杆上。假设该杆是刚性的，质量可忽略不计，表面包覆着电绝缘材料。我们还忽略一切摩擦。设 α 为杆与亚特兰蒂斯号和地心之间连线的夹角。（见图 1）。

S 也位于赤道平面内。

假设卫星的质量远小于亚特兰蒂斯号的质量，且 L 远小于轨道半径。

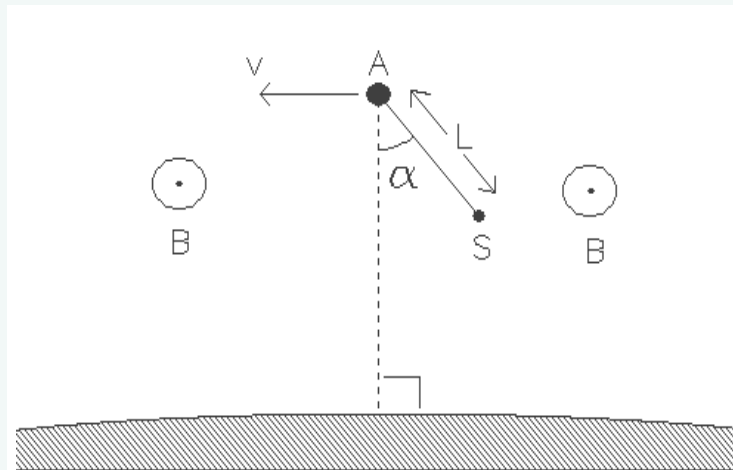


图 1 携带卫星 (S) 的亚特兰蒂斯号航天飞机 (A) 在环绕地球的轨道上运行。轨道位于地球赤道平面内。磁场 (B) 垂直于图面，方向指向读者。

a₁ – 推导当 α 取何值时，航天飞机与卫星的构型（相对于地球）保持不变？换言之，当 α 取何值时， α 为常量？

a₂ – 讨论每种情况下平衡的稳定性。

假设在某一时刻，杆偏离稳定构型一个小角度。系统将开始像摆一样摆动。

b – 用系统绕地球公转的周期表示摆动周期。

在图 1 中，地球磁场垂直于图面，方向指向读者。由于杆具有轨道速度，其两端会产生电势差。周围环境（磁层）是一种稀薄的电离气体，具有很好的导电性。通过 A（亚特兰蒂斯号）和 S（卫星）上的电极与电离气体接触。由于这一运动，电流 I 流过杆。

c₁ – 电流沿杆向哪个方向流动？（取 $\alpha = 0$ ）

数据：

– 轨道周期	$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$
– 杆的长度	$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$
– 卫星所在高度处的地球磁感应强度	$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
– 亚特兰蒂斯号航天飞机的质量	$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$

接着，将航天飞机内部的一个电流源接入电路，使电路中维持方向相反、大小为 0.1 A 的净直流电流。

c_2 – 为使轨道高度改变 10 m, 这一电流必须维持多长时间?

假设 α 始终为零。忽略磁层中电流的一切影响。

- 高度是降低还是升高?

题目译自官方英文原文。

答案

- a_1 : 杆必须沿径向或切向。在 L/R 的首阶近似下, 有向角为

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- a_2 : 径向平衡位置 $\alpha = 0, \pi$ 是稳定的。切向平衡位置 $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ 是不稳定的。
- b : 小振动周期为

$$T_{\text{swing}} = \frac{T}{\sqrt{3}} \simeq 3.1 \times 10^3 \text{ s}.$$

- c_1 : 约定的电流方向为从卫星 S 流向亚特兰蒂斯号 A。
- c_2 : 高度升高, 在圆轨道近似下, 所需时间为

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT} \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

解答

a_1 — 平衡取向

设亚特兰蒂斯号的轨道半径为 R , $\mu = GM_E$, 且

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

由于亚特兰蒂斯号沿圆轨道运行,

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3}.$$

卫星的质量小得多, 因此可以忽略它对亚特兰蒂斯号运动的影响。

采用以亚特兰蒂斯号为原点、随轨道运动旋转的参考系。令 $\mathbf{e}_x$ 指向地心, $\mathbf{e}_y$ 指向图 1 中的右方。卫星相对于亚特兰蒂斯号的位移为

$$\boldsymbol{\rho} = L \cos \alpha \mathbf{e}_x + L \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

对于一般的小位移 $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, 将地球引力场按 L/R 展开至一阶, 得到

$$\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_A = \frac{\mu}{R^3} (2x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

附加的离心加速度为

$$\Omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y).$$

因此, 两者之和为

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = 3\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

垂直于杆且指向 α 增大方向的单位矢量为

$$\mathbf{e}_\alpha = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y.$$

杆的作用力沿杆方向。科里奥利力也沿杆方向，因为相对速度 $L\dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ 垂直于杆。这两个力都不对切向运动方程作出贡献。

因此，

$$L\ddot{\alpha} = \mathbf{a}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -3\Omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha,$$

即

$$\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

角度保持不变要求

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

所以

$$\alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

因此，杆沿径向或切向。这些角度是在题设近似 $L \ll R$ 下得到的。

a₂ — 稳定性

令

$$\alpha = \alpha_0 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

其中 α_0 为平衡角。将运动方程线性化，得到

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \cos(2\alpha_0) \delta = 0.$$

对于径向构型， $\alpha_0 = 0, \pi$,

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \delta = 0.$$

加速度使杆返回平衡位置，因此两种径向构型都是**稳定的**。

对于切向构型， $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$,

$$\ddot{\delta} - 3\Omega^2 \delta = 0.$$

该方程具有位移随时间指数增长的解，

$$\delta \propto e^{\sqrt{3}\Omega t},$$

因此两种切向构型都是**不稳定的**。

b — 小振动周期

在任一稳定平衡位置附近，上面得到的方程都是简谐运动方程：

$$\ddot{\delta} + \omega_{\text{swing}}^2 \delta = 0, \quad \omega_{\text{swing}} = \sqrt{3}\Omega.$$

因此

$$T_{\text{swing}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}}.$$

代入给定的轨道周期，

$$T_{\text{swing}} = \frac{5.4 \times 10^3}{\sqrt{3}} \text{ s} \simeq \boxed{3.1 \times 10^3 \text{ s}}.$$

c₁ — 感应电流的方向

随杆一起运动的正电荷所受的磁场力为

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

在图 1 中, $\mathbf{v}$ 指向左方, $\mathbf{B}$ 指向纸外。因此, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 指向上方。

当 $\alpha = 0$ 时, S 位于 A 下方。因此, 动生电动势驱使正电荷沿杆从 S 流向 A:

$$\boxed{\text{约定的电流方向为从 S 流向 A。}}$$

c₂ — 所需时间与高度变化的方向

电流源使电流反向, 因此电流从 A 流向 S, 在图中向下。杆所受的磁场力为

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B},$$

其中 $\boldsymbol{\ell}$ 指向电流方向。向下的矢量与指向纸外的矢量作叉积, 结果指向左方, 即轨道速度的方向。

由于杆与磁场垂直,

$$F = IBL = (0.1)(5.0 \times 10^{-5})(2.0 \times 10^4) = \boxed{0.10 \text{ N}}.$$

这一向前的力为轨道运动提供能量。

将微弱推力的作用视为使近圆轨道缓慢变化。绕轨道运动的总质量近似等于给定的航天飞机质量 m 。对于圆轨道,

$$v^2 = \frac{\mu}{R},$$

总机械能为

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{R} = -\frac{\mu m}{2R}.$$

磁场力提供的功率为 Fv , 所以

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{\mu m}{2R^2} \frac{dR}{dt}.$$

代入 $v = \Omega R$ 和 $\mu = \Omega^2 R^3$,

$$F\Omega R = \frac{m\Omega^2 R}{2} \frac{dR}{dt},$$

得到

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{2F}{m\Omega} = \frac{FT}{\pi m}}.$$

高度的变化等于轨道半径的变化。在仅升高 10 m 的过程中, 可以将 B 、 F 和 T 视为常量。因此

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{FT} = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT}.$$

代入数值得

$$t = \frac{\pi(1.0 \times 10^5)(10)}{(0.10)(5.4 \times 10^3)} \text{ s} = 5.82 \times 10^3 \text{ s}.$$

因此,

$$t \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 97 \text{ min} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

由于该力增加了轨道能量, E 的负值绝对值减小, R 增大:

$$\text{高度升高 } 10 \text{ m}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3: 旋转的中子星

“毫秒脉冲星”是宇宙中的一种辐射源, 它以一毫秒至几毫秒的周期发出极短的脉冲。这种辐射的波长处于无线电波段; 使用合适的无线电接收机可以探测到一个个独立的脉冲, 从而极其精确地测量其周期。

这些无线电脉冲来自一种特殊恒星的表面, 这种恒星称为中子星。中子星非常致密: 它们的质量与太阳的质量具有相同的数量级, 但半径仅为几十千米。它们的自转非常快。由于快速自转, 中子星略呈扁平状(扁球形)。假设其表面的轴截面是一个长短轴几乎相等的椭圆。设 r_p 为极半径, r_e 为赤道半径, 并将扁率定义为:

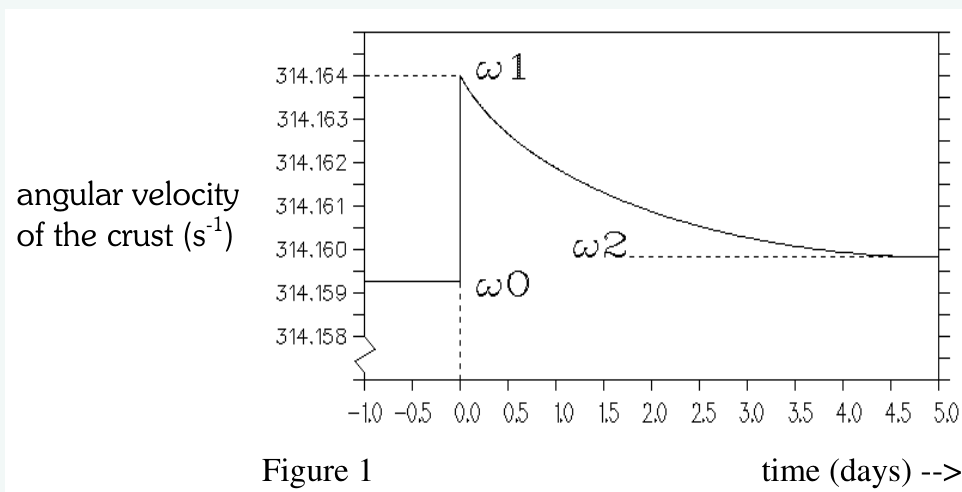
$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}$$

考虑一颗具有下列参数的中子星:

质量为	$2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg},$
平均半径为	$1.0 \cdot 10^4 \text{ m},$
自转周期为	$2.0 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$

a – 已知万有引力常量为 $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, 计算扁率。

在很长的时间尺度上(多年), 由于能量损失, 中子星的自转逐渐减慢, 因而扁率减小。然而, 中子星有一层漂浮在液态内部之上的固态星壳。固态星壳阻碍其形状连续地调整至平衡形状。取而代之的是发生星震, 使星壳形状突然向平衡形状变化。在这样一次星震期间及其后, 观测到的角速度变化如图 1 所示。



中子星星壳形状的突然变化导致角速度的突然变化。

b – 利用图 1 中的数据，计算液态内部的平均半径。近似认为星壳与内部的密度相同。（忽略内部形状的变化。）

题目译自官方英文原文。

答案

- **a.** 在球对称引力场近似下，

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}$$

（无量纲）。

- **b.** 液态内部的平均半径约为

$$r_{\text{liquid}} \simeq 9.7 \times 10^3 \text{ m} = 9.7 \text{ km}.$$

解答

a. 扁率

用 M 、 R 和 T 分别表示质量、平均半径和自转周期。角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0 \times 10^{-2}} \simeq 314.16 \text{ s}^{-1}.$$

为求平衡形状，将中子星视为旋转流体，并用球对称形式 $-GM/r$ 近似表示其引力势。在与中子星一起旋转的参考系中，单位质量的有效势为

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2,$$

其中 s 为到自转轴的距离。

平衡时的表面是一个等势面，否则物质就会沿表面流动。在极点处 $s = 0$ ，而在赤道处 $s = r_e$ 。因此

$$-\frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

即

$$GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2.$$

由 ϵ 的定义，

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e} = \frac{\epsilon}{r_e},$$

从而

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

由于扁率很小，可以在此表达式中用平均半径 R 代替 r_e ：

$$\epsilon \simeq \frac{\omega^2 R^3}{2GM} = \frac{2\pi^2 R^3}{GMT^2}.$$

代入数值得

$$\epsilon \simeq \frac{2\pi^2(1.0 \times 10^4)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(2.0 \times 10^{-2})^2} = 3.699 \times 10^{-4}.$$

因此

$$\boxed{\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}}.$$

这对应于 $r_e - r_p \simeq \epsilon R \simeq 3.7 \text{ m}$, 与两种半径几乎相等的假设一致。

b. 液态内部的半径

假设星震前, 星壳与液态内部以角速度 ω_0 一起旋转。在突然形变的过程中, 星壳的转动惯量减小。由于没有足够的时间向液体传递可观的角动量, 星壳的角速度增大至 ω_1 , 而液体最初仍保持角速度 ω_0 。

在随后的几天中, 内部摩擦将角动量从星壳传递给液体, 直至两者均以角速度 ω_2 旋转。相对于以年为尺度的长期演化, 在这段时间内向外界损失的角动量可以忽略。

设 I_c 为星震后星壳的转动惯量, I_l 为液体的转动惯量。根据题设, 液体的转动惯量保持不变。由弛豫过程中的角动量守恒可得

$$I_c\omega_1 + I_l\omega_0 = (I_c + I_l)\omega_2.$$

整理得

$$I_c(\omega_1 - \omega_2) = I_l(\omega_2 - \omega_0).$$

因此,

$$\boxed{\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0}}.$$

这里所需的守恒量是角动量; 转动动能在弛豫过程中耗散。

为建立转动惯量与半径之间的关系, 忽略微小的扁率, 并采用题目给定的相同密度 ρ 。半径为 r 、厚度为 dr 的球壳满足

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm.$$

因此, 半径为 a 的均匀球体的转动惯量为

$$I(a) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} a^5.$$

将液态内部的半径记为 r_l , 得到

$$\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{r_l^5}{R^5}.$$

因此,

$$\boxed{r_l = R \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0} \right)^{1/5}}.$$

从图中读出的近似值为

$$\omega_0 \simeq 314.1593 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 \simeq 314.1640 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 \simeq 314.1599 \text{ s}^{-1}.$$

由此得到

$$\left(\frac{r_l}{R}\right)^5 \simeq \frac{0.0041}{0.0047} \simeq 0.872,$$

进而

$$r_l \simeq (1.0 \times 10^4)(0.872)^{1/5} \simeq 9.73 \times 10^3 \text{ m}.$$

取合理的精度,

$$\boxed{r_l \simeq 9.7 \text{ km}}.$$

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。