

IPhO 1990

Teorik sorular ve çözümler · Groningen, Hollanda · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

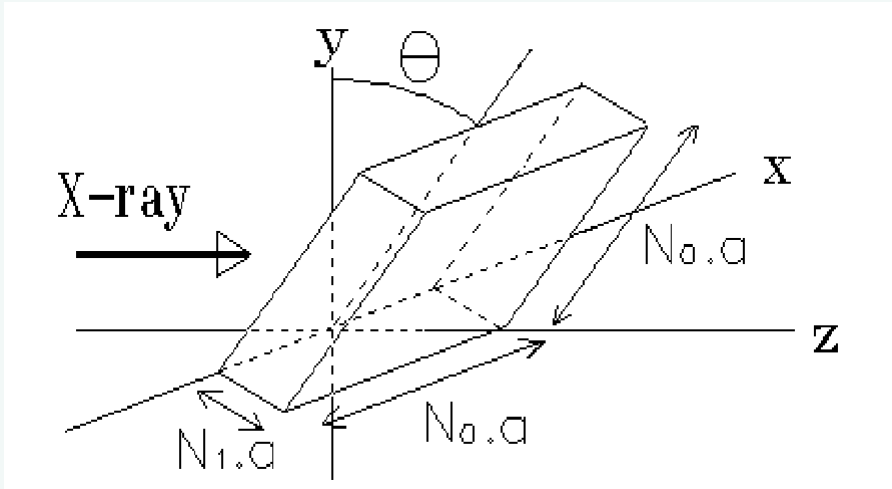
eulersolve.org/ipho/1990/

Soru 1: Bir kristalde X-ışını kırınımı

Kübik bir kristal örgüsünde X-ışını kırınımını incelemek istiyoruz. Bunun için, aralarındaki uzaklıklar d_1 ve d_2 olan $N_1 \times N_2$ yarıktan oluşan iki boyutlu bir ızgaraya dik olarak gelen düzlemsel, tek renkli bir dalganın kırınımıyla başlıyoruz. Kırınım deseni, ızgaradan L uzaklığındaki bir ekranda gözlenmektedir. Ekran ızgaraya paraleldir ve L , d_1 ve d_2 'den çok daha büyüktür.

a - Ekrandaki ana maksimumların konumlarını ve genişliklerini belirleyiniz. Genişlik, bir maksimumun iki yanındaki minimumlar arasındaki uzaklık olarak tanımlanmaktadır.

Şimdi örgü sabiti a ve boyutları $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$ olan kübik bir kristali ele alıyoruz. N_1 , N_0 'dan çok daha küçüktür. Kristal, z eksenı boyunca ilerleyen paralel bir X-ışını demeti içine Θ açısıyla yerleştirilmiştir (bkz. Şekil 1). Kırınım deseni yine kristalden çok uzaktaki bir ekranda gözlenmektedir.



Şekil 1 z eksenı boyunca ilerleyen paralel bir X-ışını demetinin kırınımı. Kristal ile y eksenı arasındaki açı Θ 'dir.

b - Maksimumların konumlarını ve genişliklerini Θ açısının fonksiyonu olarak hesaplayınız (küçük Θ için).

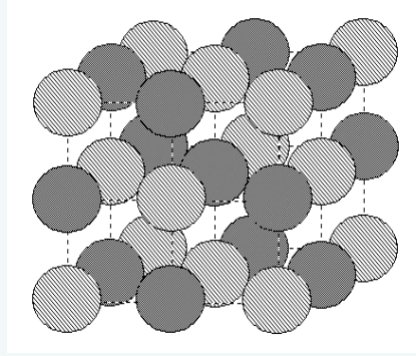
- Özellikle $N_1 \ll N_0$ olmasının sonuçları nelerdir?

Kırınım deseni, X-ışınlarının örgüdeki atom düzlemlerinden yansıdığı varsayıldığı Bragg kuramı yardımıyla da elde edilebilir. Bu durumda kırınım deseni, bu yansıyan ışınların birbirleriyle girişiminden kaynaklanır.

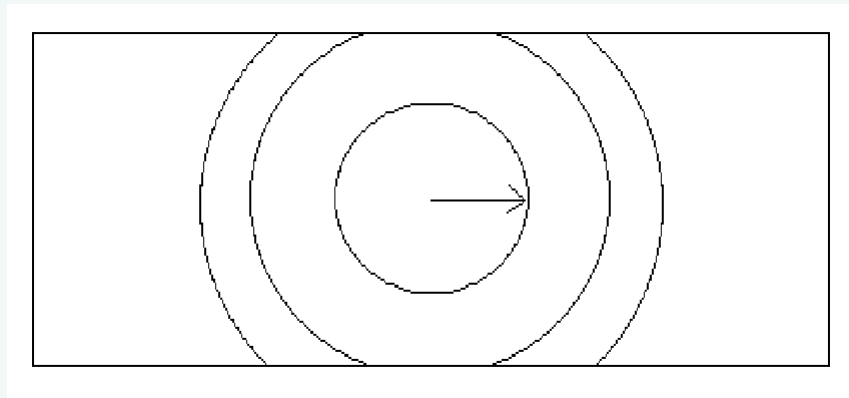
c - Bragg yansıması olarak adlandırılan bu yansımanın, maksimumlar için b'de bulduğunuz koşullarla aynı koşulları verdiğini gösteriniz.

Bazı ölçümlerde toz yöntemi olarak adlandırılan yöntem kullanılır. Bir X-ışını demeti, çok sayıda küçük kristalden oluşan bir toz tarafından saçılır. (Elbette kristallerin boyutları, örgü sabiti a 'dan çok daha büyüktür.)

Dalga boyu 0.15 nm olan X-ışınlarının potasyum klorür [KCl] (kübik bir örgüye sahiptir, bkz. Şekil 2) tarafından saçılması, bir fotoğraf plağı üzerinde eş merkezli koyu çemberlerin oluşmasına yol açar. Kristaller ile plak arasındaki uzaklık 0.10 m , en küçük çemberin yarıçapı ise 0.053 m 'dir (bkz. Şekil 3). K^+ ve Cl^- iyonları hemen hemen aynı büyüklüktedir ve özdeş saçılma merkezleri olarak ele alınabilirler.



Şekil 2. K^+ ve Cl^- iyonlarının hemen hemen aynı büyüklükte olduğu potasyum klorürün kübik örgüsü.



Şekil 3. X-ışınlarının KCl kristallerinden oluşan bir toz tarafından saçılması, bir fotoğraf plağı üzerinde eş merkezli koyu çemberlerin oluşmasına yol açar.

d - Kristaldeki iki komşu K iyonu arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Dalga boyunu λ ile gösterelim. Ekran koordinatları X, Y , sapmaya uğramayan demetten itibaren ölçülmektedir; kristal için L , kristal ile ekran arasındaki uzaklığı gösterir.

- **a.** m, n tam sayıları için

$$u_m = \frac{m\lambda}{d_1}, \quad v_n = \frac{n\lambda}{d_2}.$$

olarak tanımlayalım. Ana maksimumların konumları

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

ile verilir. Yön kosinüsleri cinsinden, ilk sıfırlar arasındaki tam genişlikleri

$$\Delta u = \frac{2\lambda}{N_1 d_1}, \quad \Delta v = \frac{2\lambda}{N_2 d_2}.$$

olur. Küçük kırınım açıları için bunlar

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2}, \quad W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

biçimine dönüşür.

- **b.** $r = \lambda/a$ yazalım ve h, k, ℓ tam sayı kırınım indisleri olsun.

$$B = k \sin \Theta + \ell \cos \Theta, \quad C = k \cos \Theta - \ell \sin \Theta.$$

olarak tanımlayalım. Tam yapıcı girişim maksimumları

$$2B + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0$$

koşulunu sağlar ve

$$(X, Y) = \frac{Lr(h, C)}{1 + rB}.$$

konumlarında ortaya çıkar. Küçük Θ için $B \simeq k\Theta + \ell$ ve $C \simeq k - \ell\Theta$ kullanılır.

Küçük saçılma açılarında ileri yöndeki kırınım için keskin lekelerin konum ve genişlikleri

$$(X, Y) \simeq Lr(h, k), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

olur. Kalınlığa bağlı girişim çarpanları

$$-k\Theta - \frac{\lambda}{2a}(h^2 + k^2) = \ell,$$

olduğunda maksimumdur; sol taraf $\ell \pm 1/N_1$ 'e eşit olduğunda ise komşu sıfırlar elde edilir.

Dolayısıyla $N_1 \ll N_0$, belirginleşme koşulu çok daha geniş olan dar lekeler verir. $k \neq 0$ için buna karşılık gelen eğim açısındaki tam genişlik yaklaşık olarak

$$\Delta\Theta = \frac{2}{N_1 |k|}.$$

olur.

- c. Bragg koşulu

$$2d \sin \theta_B = p\lambda$$

b'deki örgü girişimi koşullarına eşdeğerdir. Özellikle, eğik uzun kristal eksenine dik düzlemlerden yansıma, aşağıda seçilen yönelim için

$$2a \sin \Theta = p\lambda, \quad X = 0, \quad Y = -L \tan(2\Theta)$$

sonucunu verir.

- d. En yakın komşu potasyum iyonları arasındaki uzaklık

$$d_{K-K} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.44 \text{ nm.}$$

olur.

Çözüm

Uzak alan, yani Fraunhofer yaklaşımında eşevreli, esnek saçılmayı kullanıyoruz. Yarıklar ve örgü noktaları özdeş dalga kaynakları olarak ele alınmakta; bunların tek tek oluşturduğu kırınım zarfı göz ardı edilmektedir.

Aralarındaki faz farkı $2\pi t$ olan, eşit aralıklarla dizilmiş N dalga kaynağı için yararlı bir sonuç şudur:

$$F_N(t) = \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j t} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\pi t)}{\sin^2(\pi t)}.$$

$t = m$ tam sayı olduğunda limit değeri N^2 'dir: tüm katkılar aynı fazdadır. $N > 1$ için en yakın sıfırlar

$$t = m \pm \frac{1}{N}.$$

konumlarındadır.

a. İki boyutlu ızgarada kırınım

Izgara eksenlerini x, y boyunca, gelen dalganın yönünü ise z boyunca alalım. Çıkan bir ışının birim yön vektörü

$$\mathbf{s} = (u, v, w), \quad w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0.$$

olsun.

Gelen dalganın fazı her yarıktadır. Komşu yarıklardan çıkan ışınların yol farkları $d_1 u$ ve $d_2 v$ 'dir. Dolayısıyla

$$I(u, v) \propto F_{N_1} \left(\frac{d_1 u}{\lambda} \right) F_{N_2} \left(\frac{d_2 v}{\lambda} \right).$$

Her iki çarpan da

$$d_1 u = m\lambda, \quad d_2 v = n\lambda.$$

olduğunda ana maksimumlarına ulaşır. Yalnızca $u_m^2 + v_n^2 < 1$ koşulunu sağlayan mertebeler ileri yarı uzaydaki bir ekrana ulaşır.

$\mathbf{s}$ yönündeki bir ışın, $z = L$ düzlemini

$$X = L \frac{u}{w}, \quad Y = L \frac{v}{w}.$$

konumunda keser. Bu nedenle

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

En yakın sıfır sınırları

$$u = u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, \quad v = v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}.$$

ile verilir. Bu denklemler, yukarıdaki ekran dönüşümüyle birlikte, küçük açı yaklaşımı olmaksızın ilk sıfır sınırlarını belirler.

Örneğin,

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{L(u, v)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

olarak tanımlayalım. Doğal ızgara koordinatları boyunca iki çift ilk sıfır noktası

$$\mathbf{R}\left(u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, v_n\right), \quad \mathbf{R}\left(u_m, v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}\right).$$

ile verilir. Her bir çiftteki noktalar arasındaki uzaklık, karşılık gelen ekran genişliğini verir.

Küçük kırınım açıları için $u, v \ll 1$ olduğundan $X \simeq Lu, Y \simeq Lv$ olur. Böylece

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2},$$

ve

$$W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

b. Eğik, sonlu kristalde kırınım

Kristalin birim vektörlerini

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}} \cos \Theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \Theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \Theta.$$

olarak seçelim. İki uzun boyut $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ boyunca, ince boyut ise $\mathbf{e}_3$ boyuncadır. Bu seçimde pozitif Θ , kristalin uzun ekseninin $+y$ 'den $+z$ 'ye doğru eğilmesine karşılık gelir.

Gelen ve çıkan dalga vektörleri

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}_f = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}.$$

ile verilir. Saçılma vektörünü

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

olarak tanımlayalım.

a'daki ızgaradan farklı olarak, farklı derinliklerdeki atomlarda gelen dalganın fazı da farklıdır. Hem gelen hem de çıkan dalganın yayılması $\mathbf{q}$ ile hesaba katılır.

$$p_i = \frac{a}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i.$$

olarak tanımlayalım. Açık biçimde,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a}{\lambda} s_x, \\ p_2 &= \frac{a}{\lambda} [s_y \cos \Theta + (s_z - 1) \sin \Theta], \\ p_3 &= \frac{a}{\lambda} [-s_y \sin \Theta + (s_z - 1) \cos \Theta]. \end{aligned}$$

Dolayısıyla sonlu örgünün tam girişim deseni

$$I(\mathbf{s}) \propto F_{N_0}(p_1) F_{N_0}(p_2) F_{N_1}(p_3).$$

ile verilir.

Tam yapıcı girişim maksimumu için

$$p_1 = h, \quad p_2 = k, \quad p_3 = \ell,$$

olmalıdır; burada h, k, ℓ tam sayılardır. Eşdeğer olarak,

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3).$$

$r = \lambda/a$ yazıldığında çıkan ışının yönü

$$\begin{aligned} s_x &= rh, \\ s_y &= r(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta), \\ s_z &= 1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta). \end{aligned}$$

olur.

Esnek saçılma $|\mathbf{s}| = 1$ olmasını gerektirir. Yerine koyma işlemi

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

sonucunu verir. İzin verilen herhangi bir ileri yönlü mertebenin ekrandaki konumu

$$X = \frac{Lrh}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}, \quad Y = \frac{Lr(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}.$$

ile verilir.

Bu formüller, çıkan ışının geometrisini tam olarak korur. Küçük kristal eğimi için

$$2(k\Theta + \ell) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) \simeq 0,$$

ve

$$X \simeq \frac{Lrh}{1 + r(\ell + k\Theta)}, \quad Y \simeq \frac{Lr(k - \ell\Theta)}{1 + r(\ell + k\Theta)}.$$

Tam yapıcı girişim maksimumunu çevreleyen ilk sıfırlar

$$p_1 = h \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_2 = k \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_3 = \ell \pm \frac{1}{N_1}.$$

üzerinde oluşur. Böylece saçılma vektörünün bileşenleri cinsinden tam genişlikler

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \frac{4\pi}{N_0 a}, \quad \Delta q_3 = \frac{4\pi}{N_1 a}.$$

olur.

$N_1 \ll N_0$ olduğundan ilk iki çarpan dar tepeler oluştururken üçüncü çarpan görece geniş bir zarf sağlar. Dolayısıyla p_3 tam olarak bir tam sayı olmadığında bile keskin bir leke görünür kalabilir.

Tamlık açısından, böyle bir lekenin konumu, tam üç boyutlu yapıcı girişim koşulu aranmadan elde edilebilir. $p_1 = h$, $p_2 = k$ alalım. İleri yönlü dalda,

$$\zeta_{hk}(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - r^2 h^2 - (\sin \Theta + rk)^2} - \cos \Theta}{r}$$

p_3 'ün elde edilen değeridir. Lekenin konumu

$$\mathcal{R}_\Theta(h, k) = \frac{Lr(h, k \cos \Theta - \zeta_{hk} \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \zeta_{hk} \cos \Theta)}.$$

ile verilir. Şiddeti $F_{N_1}(\zeta_{hk})$ çarpanını içerir. Tam yapıcı girişim tepeleri, ζ_{hk} bir tam sayı olduğunda oluşur.

Belirgin biçimde uyarılan bir leke için iki çift ilk sıfır noktası, bu dönüşümde

$$h \longrightarrow h \pm \frac{1}{N_0}, \quad \text{veya} \quad k \longrightarrow k \pm \frac{1}{N_0}.$$

değişimleri yapılarak elde edilir. Bu noktalar arasındaki uzaklıklar, Θ 'ya bağımlılık da dâhil olmak üzere, ekran genişliklerini verir.

Küçük açı biçimi, fiziksel sonuçları özellikle açık hâle getirir.

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{Y}{L}, \quad \mathbf{s} \simeq \left(\alpha, \beta, 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

alalım. Küçük Θ , α, β için

$$p_1 \simeq \frac{\alpha}{r}, \quad p_2 \simeq \frac{\beta}{r}, \quad p_3 \simeq -\frac{\Theta\beta + (\alpha^2 + \beta^2)/2}{r}.$$

Açılarda ikinci dereceden olan terim, boyuna yol farkının başat terimi olduğundan p_3 'te korunmalıdır.

Bu nedenle dar enine tepeler

$$\alpha_h \simeq hr, \quad \beta_k \simeq kr,$$

konumlarında oluşur ve tam genişlikleri

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\beta \simeq \frac{2r}{N_0}.$$

olur. Dolayısıyla

$$(X, Y) \simeq \left(\frac{h\lambda L}{a}, \frac{k\lambda L}{a} \right), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

Bu konumlarda,

$$p_3 \simeq -k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2).$$

Böylece kalınlık zarfının bir maksimumu

$$-k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2) = \ell,$$

olduğunda oluşur ve komşu sıfırları $\ell \pm 1/N_1$ 'de bulunur.

Merkezî kalınlık mertebesi $\ell = 0$ için en güçlü lekeler

$$h^2 + \left(k + \frac{\Theta}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Theta}{r}\right)^2.$$

koşulunu sağlar. Sonlu kalınlık, bu çemberi belirgin biçimde uyarılan örgü lekelerinden oluşan bir banda genişletir.

$k \neq 0$ için eğimin değiştirilmesi, p_3 'ü

$$\frac{dp_3}{d\Theta} \simeq -k.$$

hızıyla değiştirir. Bu nedenle eğim açısında ilk sıfırlar arasındaki tam genişlik

$$\Delta\Theta \simeq \frac{2}{N_1|k|}.$$

olur.

İki büyük boyut, lekelerin dar genişliklerini belirler. İnce boyut ise daha geniş bir girişim zarfı ve bir lekenin belirgin biçimde uyarıldığı daha geniş bir kristal yönelim aralığı verir.

c. Bragg yansımasıyla eşdeğerlik

Aralarında asal tam sayı indisleri (H, K, M) olan bir atom düzlemleri ailesini ele alalım. Bu düzlemlerin birim normali ve aralarındaki uzaklık

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}.$$

ile verilir.

θ_B , gelen demet ile bu düzlemler arasındaki sıyırma açısı olsun. Ardışık düzlemlerden yansıyan ışınlar arasındaki yol farkı

$$2d \sin \theta_B.$$

olur. Yapıcı girişim için

$$2d \sin \theta_B = p\lambda, \quad p = 1, 2, \dots$$

olmalıdır.

Aynasal yansıma, dalga vektörünün yalnızca düzlemlere dik bileşenini değiştirir. Bu nedenle $\mathbf{q}$ düzlemlere diktir ve büyüklüğü

$$|\mathbf{q}| = 2\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_B.$$

olur. Bragg koşulu kullanıldığında,

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\pi p}{d}.$$

Normal yönü uygun seçildiğinde,

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi p}{a}(H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3). \\ (h, k, \ell) = p(H, K, M)$$

alındığında tam olarak

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a}(h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3),$$

yani $\mathbf{b}'$ 'de türetilen üç örgü girişimi koşulu elde edilir. Ardından gelen ve çıkan dalga boylarının eşit olması koşulu uygulandığında aynı

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + \frac{\lambda}{a}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

koşulu elde edilir.

Doğrudan bir örnek olarak, $\mathbf{e}_2$ 'ye dik düzlemleri ele alalım. Aralarındaki uzaklık a , sıyırma açıları ise Θ 'dır. Bragg yasası

$$2a \sin \Theta = p\lambda.$$

sonucunu verir. $\mathbf{b}'$ 'de $h = 0$, $k = -p$, $\ell = 0$ seçelim. Koşul

$$-2p \sin \Theta + \frac{\lambda}{a}p^2 = 0,$$

biçimine dönüşür ve bu, aynı koşuldur. Çıkan ışının yönü

$$\mathbf{s} = (0, -\sin 2\Theta, \cos 2\Theta),$$

olduğundan

$$X = 0, \quad Y = -L \tan 2\Theta.$$

d. En yakın komşu potasyum iyonları arasındaki uzaklık

K^+ ve Cl^- özdeş biçimde saçılma yaptığında, dönüşümlü iyon dizilimi, özdeş saçılma merkezlerinden oluşan basit kübik bir örgü gibi davranır.

En yakın komşu K-Cl iyonları arasındaki uzaklığı b ile gösterelim. Etkin basit kübik örgünün örgü sabiti b 'dir. Yansıtıcı düzlemleri arasındaki en büyük uzaklık b olduğundan sıfırdan farklı en küçük kırınım açısı,

$$2b \sin \theta_B = \lambda.$$

koşulunu sağlayan birinci mertebeden yansımadan kaynaklanır.

Rastgele kristal yönelimleri, saçılma açısı $2\theta_B$ olan saçılmış ışıklardan oluşan bir koni meydana getirir. Bu nedenle demete dik bir fotoğraf plağı, yarıçapı

$$R = L \tan(2\theta_B).$$

olan bir halka kaydeder. Verilen değerler kullanıldığında,

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{0.053}{0.10}\right) = 27.9236^\circ,$$

ve dolayısıyla

$$\theta_B = 13.9618^\circ.$$

Burada küçük açı yaklaşımına gerek yoktur.

Böylece

$$b = \frac{0.15 \text{ nm}}{2 \sin 13.9618^\circ} = 0.31085 \text{ nm}.$$

İyon türleri, basit kübik örgünün her eksen boyunca dönüşümlü olarak sıralanır. Bu nedenle en yakın iki potasyum iyonu, kenar uzunluğu b olan bir küpün yüz köşegeninin uçlarında bulunur; buradan

$$d_{K-K} = \sqrt{2} b = \sqrt{2}(0.31085 \text{ nm}) = 0.43961 \text{ nm}.$$

elde edilir. İki anlamlı basamakla,

$$d_{K-K} = 0.44 \text{ nm} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

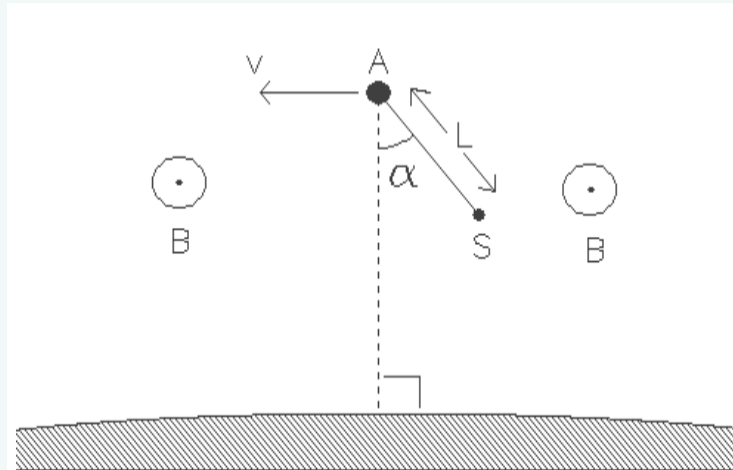
Soru 2: Dünya'nın manyetosferinde elektrik deneyleri

Mayıs 1991'de Atlantis uzay aracı Dünya çevresinde bir yörüngeye yerleştirilecektir. Bu yörünge dairesel olduğunu ve Dünya'nın ekvator düzleminde bulunduğunu varsayacağız.

Önceden belirlenmiş bir anda uzay aracı, uzunluğu L olan iletken bir çubuğa bağlı S uydusunu serbest bırakacaktır. Çubuğun rijit olduğunu, kütesinin ihmal edilebilir olduğunu ve elektriksel bir yalıtkanla kaplı olduğunu varsayıyoruz. Ayrıca tüm sürtünmeleri ihmal ediyoruz. Çubuğun Atlantis ile Dünya'nın merkezini birleştiren doğruyla yaptığı açı α olsun. (Bkz. Şekil 1).

S de ekvator düzleminde bulunmaktadır.

Uydunun kütesinin Atlantis'in kütesinden çok küçük olduğunu ve L 'nin yörünge yarıçapından çok küçük olduğunu varsayın.



Şekil 1 Dünya çevresindeki bir yörüngede, bir uydu (S) ile birlikte Atlantis uzay aracı (A). Yörünge Dünya'nın ekvator düzleminde. Manyetik alan (B) şekil düzlemine diktir ve okuyucuya doğru yönelmiştir.

α_1 - α 'nın hangi değerinde (veya değerlerinde) uzay aracı ve uydunun düzeninin (Dünya'ya göre) değişmeden kaldığını türetin. Başka bir deyişle, α 'nın hangi değerinde (veya değerlerinde) α sabit kalır?

α_2 - Her bir durum için dengenin kararlılığını tartışın.

Belirli bir anda çubuğun kararlı konumundan küçük bir açı kadar saptığını varsayın. Sistem bir sarkaç gibi salınmaya başlayacaktır.

b - Salınım periyodunu, sistemin Dünya çevresindeki dolanım periyodu cinsinden ifade edin.

Şekil 1'de Dünya'nın manyetik alanı şekil düzlemine diktir ve okuyucuya doğru yönelmiştir. Çubuğun yörüngesel hızı nedeniyle uçları arasında bir potansiyel farkı oluşur. Ortam (manyetosfer), elektrik iletkenliği çok iyi olan seyrek, iyonlaşmış bir gazdır. İyonlaşmış gazla temas, A'daki (Atlantis) ve S'deki (uydu) elektrotlar aracılığıyla sağlanır. Hareketin bir sonucu olarak çubuktan I akımı geçer.

c_1 - Akım çubuktan hangi yönde geçer? ($\alpha = 0$ alın.)

Veriler:

- yörünge periyodu	$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$
- çubuğun uzunluğu	$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$
- uydunun bulunduğu yükseklikte Dünya'nın manyetik alanının büyüklüğü	$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
- Atlantis mekiğinin kütlesi	$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$

Ardından, mekiğin içindeki bir akım kaynağı devreye dahil edilerek ters yönde 0.1 A büyüklüğünde net bir doğru akım sağlanır.

c_2 - Yörüngenin yüksekliğini 10 m değiştirmek için bu akım ne kadar süreyle sürdürülmelidir?

α 'nın sıfır olarak kaldığını varsayın. Manyetosferdeki akımların tüm katkılarını ihmal edin.

- Yükseklik azalır mı, artar mı?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **a_1 :** Çubuk **radyal veya teğetsel** olmalıdır. L/R 'nin başat mertebesinde yönlü açılar

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- **a_2 :** Radyal denge konumları, $\alpha = 0, \pi$, **kararlıdır**. Teğetsel denge konumları, $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$, **kararsızdır**.
- **b :** Küçük salınımların periyodu

$$T_{\text{swing}} = \frac{T}{\sqrt{3}} \simeq 3.1 \times 10^3 \text{ s}.$$

- **c_1 :** Konvansiyonel akım **S uydusundan Atlantis A'ya doğru** akar.
- **c_2 :** Yükseklik **artar** ve dairesel yörünge yaklaşımında gereken süre

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT} \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

Çözüm

a_1 — Denge yönelimleri

Atlantis'in yörünge yarıçapı R , $\mu = GM_E$ ve

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

olsun. Atlantis dairesel bir yörüngede hareket ettiğinden,

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3}.$$

Uydunun kütesinin çok daha küçük olması, Atlantis'in hareketi üzerindeki etkisini ihmal etmemize olanak tanır.

Merkezi Atlantis'te olan ve yörüngeyle birlikte dönen bir referans sistemi kullanalım. $\mathbf{e}_x$ Dünya'nın merkezine doğru, $\mathbf{e}_y$ ise Şekil 1'de sağa doğru yönelsin. Uydunun Atlantis'e göre yer değiştirmesi

$$\boldsymbol{\rho} = L \cos \alpha \mathbf{e}_x + L \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

Genel bir küçük $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ yer değiştirmesi için Dünya'nın kütle çekim alanını L/R 'de birinci mertebeye kadar açarsak

$$\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_A = \frac{\mu}{R^3} (2x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

Ek merkezkaç ivmesi

$$\Omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y).$$

Dolayısıyla bunların toplamı

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = 3\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

Çubuğa dik, α 'nın artış yönündeki birim vektör

$$\mathbf{e}_\alpha = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y.$$

Çubuğun uyguladığı kuvvet çubuk boyunca etkir. Bağlı hız $L\dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ çubuğa dik olduğundan, Coriolis kuvveti de çubuk boyunca etkir. Bu kuvvetlerin hiçbirisi teğetsel hareket denkleminde katkıda bulunmaz.

Sonuç olarak,

$$L\ddot{\alpha} = \mathbf{a}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -3\Omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha,$$

veya

$$\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Açının sabit olması için

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

olmalıdır; dolayısıyla

$$\alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Böylece çubuk ya radyal ya da teğetseldir. Bu açılar, belirtilen $L \ll R$ yaklaşımı kullanılarak elde edilmiştir.

a₂ — Kararlılık

$$\alpha = \alpha_0 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

yazalım; burada α_0 bir denge açısıdır. Hareket denklemini doğrusallaştırırsak

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \cos(2\alpha_0) \delta = 0.$$

Radyal konumlar, $\alpha_0 = 0, \pi$, için

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2\delta = 0.$$

İvme çubuğu dengeye doğru geri döndürür; dolayısıyla her iki radyal konum da **kararlıdır**.

Teğetsel konumlar, $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$, için

$$\ddot{\delta} - 3\Omega^2\delta = 0.$$

Bu denklem, üstel olarak büyüyen bir yer değiştirme çözümüne sahiptir:

$$\delta \propto e^{\sqrt{3}\Omega t},$$

dolayısıyla her iki teğetsel konum da **kararsızdır**.

b — Küçük salınımların periyodu

Her iki kararlı denge konumunun yakınında, yukarıda bulunan denklem basit harmonik hareket denklemdir:

$$\ddot{\delta} + \omega_{\text{swing}}^2\delta = 0, \quad \omega_{\text{swing}} = \sqrt{3}\Omega.$$

Buradan

$$T_{\text{swing}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}}.$$

Verilen yörünge periyodunu kullanırsak

$$T_{\text{swing}} = \frac{5.4 \times 10^3}{\sqrt{3}} \text{ s} \simeq \boxed{3.1 \times 10^3 \text{ s}}.$$

c₁ — İndüklenen akımın yönü

Çubukla birlikte hareket eden pozitif bir yüke etkiyen manyetik kuvvet

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Şekil 1'de $\mathbf{v}$ sola, $\mathbf{B}$ ise sayfa düzleminden dışarıya yönelmiştir. Dolayısıyla $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ yukarıya yönelmiştir.

$\alpha = 0$ için S, A'nın altında bulunur. Bu nedenle hareketten kaynaklanan elektromotor kuvvet, pozitif yükleri çubuk boyunca S'den A'ya doğru sürükler:

$$\boxed{\text{Konvansiyonel akım S'den A'ya doğru akar.}}$$

c₂ — Gereken süre ve yükseklik değişiminin yönü

Akım kaynağı akımın yönünü tersine çevirir; böylece akım A'dan S'ye, şekilde aşağıya doğru akar.

Çubuğa etkiyen manyetik kuvvet

$$\mathbf{F} = I\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B},$$

şeklindedir; burada $\boldsymbol{\ell}$ akım yönünde uzanır. Aşağı yön ile sayfa düzleminden dışarı yönün vektörel çarpımı, yörüngesel hız yönünde sola yönelir.

Çubuk alana dik olduğundan,

$$F = IBL = (0.1)(5.0 \times 10^{-5})(2.0 \times 10^4) = \boxed{0.10 \text{ N}}.$$

İleri yöndeki bu kuvvet yörüngeye enerji sağlar.

Zayıf itki kuvvetinin, yaklaşık olarak dairesel olan bir yörüngede yavaş bir değişim oluşturduğunu kabul edelim. Yörüngede dolanan toplam kütle, yaklaşık olarak verilen mekik kütlesi m 'dir. Dairesel bir yörünge için

$$v^2 = \frac{\mu}{R},$$

ve toplam mekanik enerji

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{R} = -\frac{\mu m}{2R}.$$

Manyetik kuvvet Fv gücünü sağladığından,

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{\mu m}{2R^2} \frac{dR}{dt}.$$

$v = \Omega R$ ve $\mu = \Omega^2 R^3$ yerine konulduğunda,

$$F\Omega R = \frac{m\Omega^2 R}{2} \frac{dR}{dt},$$

buradan

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{2F}{m\Omega} = \frac{FT}{\pi m}}.$$

Yükseklik değişimi, yörünge yarıçapının değişimine eşittir. Yalnızca 10 m'lik bir yükselme boyunca B , F ve T 'yi sabit kabul edebiliriz. Böylece

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{FT} = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT}.$$

Sayısal olarak,

$$t = \frac{\pi(1.0 \times 10^5)(10)}{(0.10)(5.4 \times 10^3)} \text{ s} = 5.82 \times 10^3 \text{ s}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{t \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 97 \text{ min} \simeq 1.6 \text{ h}}.$$

Kuvvet yörünge enerjisini artırdığından, E daha az negatif olur ve R artar:

$$\boxed{\text{Yükseklikteki artış 10 m.}}$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Dönen nötron yıldızı

Bir 'milisaniye pulsarı', evrende bir ila birkaç milisaniyelik periyotlarla çok kısa atımlar yayan bir ışınım kaynağıdır. Bu ışınımın dalga boyları radyo dalgaları aralığındadır; uygun bir radyo alıcısı kullanarak atımlar ayrı ayrı algılanabilir ve böylece periyot büyük bir hassasiyetle ölçülebilir.

Bu radyo atımları, nötron yıldızı adı verilen özel bir yıldız türünün yüzeyinden kaynaklanır. Bu yıldızlar çok kompakttır: kütleleri Güneş'in kütlesiyle aynı büyüklük mertebesinde, ancak yarıçapları yalnızca birkaç on kilometredir. Çok hızlı dönerler. Hızlı dönmesi nedeniyle bir nötron

yıldızı hafifçe basıktır (kutuplardan basık). Yüzeyin dönme ekseninden geçen kesitinin, eksenleri hemen hemen eşit bir elips olduğunu varsayın. Kutupsal yarıçap r_p , ekvatorial yarıçap ise r_e olsun; basıklık katsayısını şöyle tanımlayalım:

$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}$$

Aşağıdaki özelliklere sahip bir nötron yıldızını ele alın:

kütlesi	$2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg,}$
ortalama yarıçapı	$1.0 \cdot 10^4 \text{ m,}$
ve dönme periyodu	$2.0 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

a - Kütleçekim sabitinin $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ olduğunu kullanarak basıklık katsayısını hesaplayın.

Uzun vadede (yıllar boyunca), enerji kaybı nedeniyle yıldızın dönmesi yavaşlar ve bu da basıklığın azalmasına yol açar. Ancak yıldızın, sıvı bir iç bölge üzerinde yüzen katı bir kabuğu vardır. Katı kabuk, denge şekline sürekli olarak uyum sağlamaya direnç gösterir. Bunun yerine, kabuğun şeklinin dengeye doğru aniden değiştiği yıldız depremleri meydana gelir. Böyle bir yıldız depremi sırasında ve sonrasında açısal hızın Şekil 1'e göre değiştiği gözlenir.

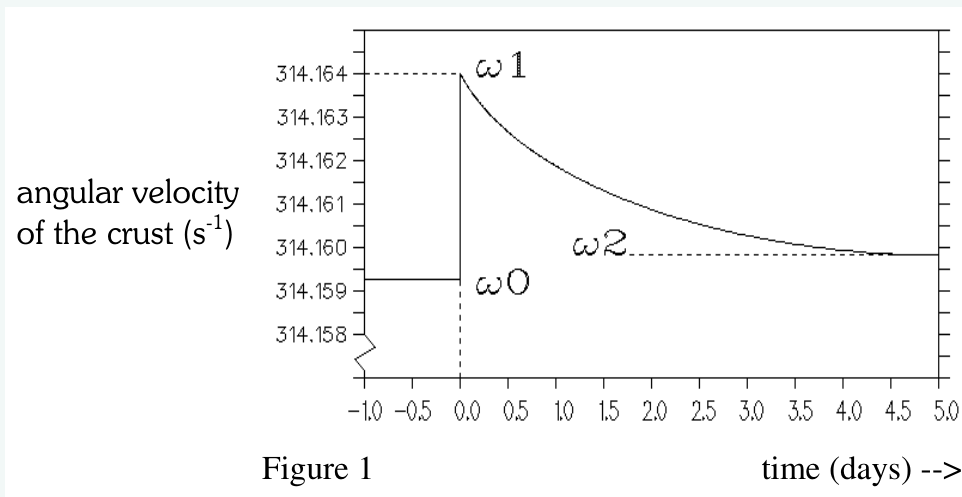


Figure 1

time (days) -->

Bir nötron yıldızının kabuğunun şeklindeki ani bir değişiklik, açısal hızda ani bir değişikliğe yol açar.

b - Şekil 1'deki verileri kullanarak sıvı iç bölgenin ortalama yarıçapını hesaplayın. Kabuk ile iç bölgenin yoğunluklarının aynı olduğu yaklaşımını yapın. (İç bölgenin şekil değişimini göz ardı edin.)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a.** Küresel kütleçekim alanı yaklaşımında,

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}$$

(boyutsuz).

- **b.** Sıvı iç bölgenin ortalama yarıçapı yaklaşık olarak

$$r_{\text{liquid}} \simeq 9.7 \times 10^3 \text{ m} = 9.7 \text{ km}.$$

Çözüm

a. Basıklık katsayısı

M , R ve T sırasıyla kütleyi, ortalama yarıçapı ve dönme periyodunu gösterebilir. Açısal hız şöyledir:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0 \times 10^{-2}} \simeq 314.16 \text{ s}^{-1}.$$

Denge şeklini bulmak için yıldızı dönen bir akışkan olarak modelleyelim ve kütleçekim potansiyelini küresel $-GM/r$ ifadesiyle yaklaşık olarak hesaplayalım. Yıldızla birlikte dönen referans sisteminde birim kütle başına etkin potansiyel şöyledir:

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2,$$

burada s , dönme eksenine olan uzaklıktır.

Denge yüzeyi bir eşpotansiyel yüzeydir: aksi takdirde madde bu yüzey boyunca akardı. Kutupta $s = 0$, ekvatorunda ise $s = r_e$ olur. Dolayısıyla

$$-\frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

ya da

$$GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2.$$

ϵ tanımını kullanırsak,

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e} = \frac{\epsilon}{r_e},$$

böylece

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

Basıklık küçük olduğundan, bu ifadede r_e yerine ortalama yarıçap R kullanılabilir:

$$\epsilon \simeq \frac{\omega^2 R^3}{2GM} = \frac{2\pi^2 R^3}{GMT^2}.$$

Sayısal olarak,

$$\epsilon \simeq \frac{2\pi^2 (1.0 \times 10^4)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(2.0 \times 10^{-2})^2} = 3.699 \times 10^{-4}.$$

Böylece

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}.$$

Bu, $r_e - r_p \simeq \epsilon R \simeq 3.7 \text{ m}$ değerine karşılık gelir ve yarıçapların hemen hemen eşit olmasıyla tutarlıdır.

b. Sıvı iç bölgenin yarıçapı

Depremden önce kabuk ile sıvı iç bölgenin ω_0 açısal hızıyla birlikte döndüğünü varsayalım. Ani şekil değişimi sırasında kabuğun eylemsizlik momenti azalır. Sıvıya kayda değer miktarda açısal momentum aktarılması için yeterli zaman olmadığından kabuğun açısal hızı ω_1 değerine yükselirken sıvı başlangıçta ω_0 açısal hızında kalır.

Sonraki günlerde iç sürtünme, her ikisi de ω_2 açısal hızıyla dönene kadar kabuktan sıvıya açısal momentum aktarır. Bu süre boyunca dışarıya açısal momentum kaybı, yıllar boyunca gerçekleşen uzun vadeli değişime kıyasla ihmal edilebilir.

I_c kabuğun depremden sonraki eylemsizlik momenti, I_l ise sıvının eylemsizlik momenti olsun. Belirtildiği üzere, sıvının eylemsizlik momenti değişmez. Dengeye dönüş sırasında açısal momentumun korunumu şunu verir:

$$I_c\omega_1 + I_l\omega_0 = (I_c + I_l)\omega_2.$$

Yeniden düzenlersek,

$$I_c(\omega_1 - \omega_2) = I_l(\omega_2 - \omega_0).$$

Sonuç olarak,

$$\boxed{\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0}}.$$

Burada korunması gereken büyüklük açısal momentumdur; dönme kinetik enerjisi dengeye dönüş sırasında disipasyona uğrar.

Eylemsizlik momentlerini yarıçaplarla ilişkilendirmek için küçük basıklığı ihmal edelim ve soruda belirtilen ortak yoğunluk ρ 'yu kullanalım. Yarıçapı r , kalınlığı dr olan küresel bir kabuk için

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm.$$

Böylece yarıçapı a olan homojen bir kürenin eylemsizlik momenti şöyledir:

$$I(a) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} a^5.$$

Sıvının yarıçapını r_l ile gösterirsek,

$$\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{r_l^5}{R^5}.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{r_l = R \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0} \right)^{1/5}}.$$

Grafikten yaklaşık olarak okunan değerler şöyledir:

$$\omega_0 \simeq 314.1593 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 \simeq 314.1640 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 \simeq 314.1599 \text{ s}^{-1}.$$

Bu değerler şunu verir:

$$\left(\frac{r_l}{R} \right)^5 \simeq \frac{0.0041}{0.0047} \simeq 0.872,$$

ve buradan

$$r_l \simeq (1.0 \times 10^4)(0.872)^{1/5} \simeq 9.73 \times 10^3 \text{ m.}$$

Uygun bir hassasiyetle,

$$\boxed{r_l \simeq 9.7 \text{ km.}}$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümünden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.