

IPhO 1990

Теоретические задачи и решения · Гронинген, Нидерланды · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1990/

Задача 1: Дифракция рентгеновских лучей на кристалле

Мы хотим исследовать дифракцию рентгеновских лучей на кубической кристаллической решётке. Для этого начнём с дифракции плоской монохроматической волны, падающей перпендикулярно на двумерную решётку, состоящую из $N_1 \times N_2$ щелей с расстояниями между ними d_1 и d_2 . Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии L от решётки. Экран параллелен решётке, а L много больше d_1 и d_2 .

а - Определите положения и ширины главных максимумов на экране. Ширина определяется как расстояние между минимумами по обе стороны от максимума.

Рассмотрим теперь кубический кристалл с периодом решётки a и размерами $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$. N_1 много меньше N_0 . Кристалл помещён в параллельный пучок рентгеновских лучей, направленный вдоль оси z , под углом Θ (см. рис. 1). Дифракционная картина вновь наблюдается на экране, расположенном на большом расстоянии от кристалла.

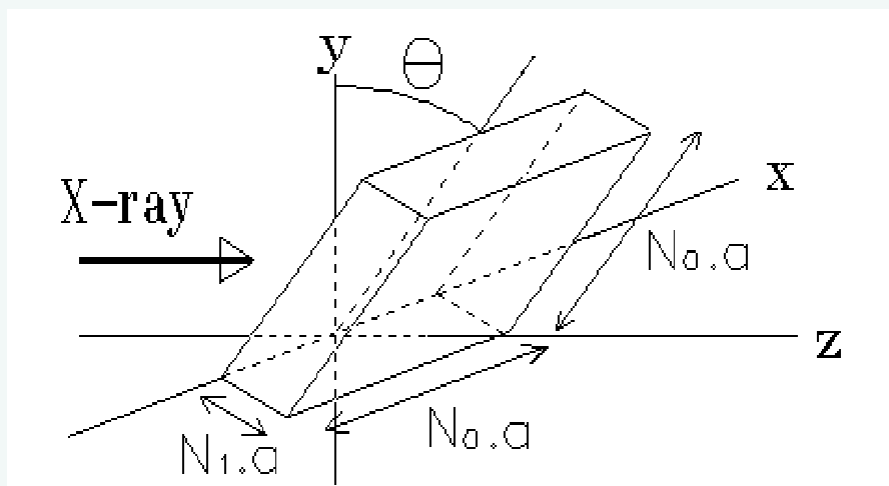


Рисунок 1 Дифракция параллельного пучка рентгеновских лучей, направленного вдоль оси z . Угол между кристаллом и осью y равен Θ .

б - Рассчитайте положения и ширины максимумов в зависимости от угла Θ (при малых Θ).

- В частности, к каким последствиям приводит то, что $N_1 \ll N_0$?

Дифракционную картину можно также получить с помощью теории Брэгга, в которой предполагается, что рентгеновские лучи отражаются от атомных плоскостей решётки. Дифракционная картина при этом возникает вследствие интерференции этих отражённых

лучей друг с другом.

с - Покажите, что это так называемое брэгговское отражение приводит к тем же условиям максимумов, которые вы нашли в b.

В некоторых измерениях применяется так называемый метод порошка. Пучок рентгеновских лучей рассеивается на порошке, состоящем из очень большого числа мелких кристаллов. (Разумеется, размеры кристаллов много больше периода решётки a .) Рассеяние рентгеновских лучей с длиной волны 0.15 nm на хлориде калия $[\text{KCl}]$ (имеющем кубическую решётку, см. рис. 2) приводит к появлению концентрических тёмных окружностей на фотопластинке. Расстояние между кристаллами и пластинкой равно 0.10 m , а радиус наименьшей окружности составляет 0.053 m (см. рис. 3). Ионы K^+ и Cl^- имеют почти одинаковые размеры, и их можно рассматривать как одинаковые рассеивающие центры.

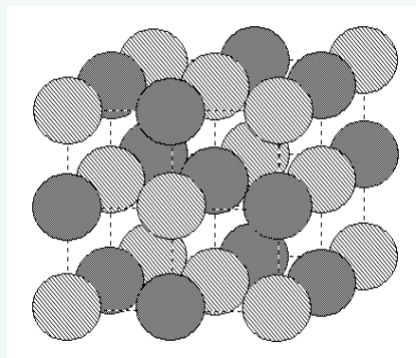


Рисунок 2. Кубическая решётка хлорида калия, в которой ионы K^+ и Cl^- имеют почти одинаковые размеры.

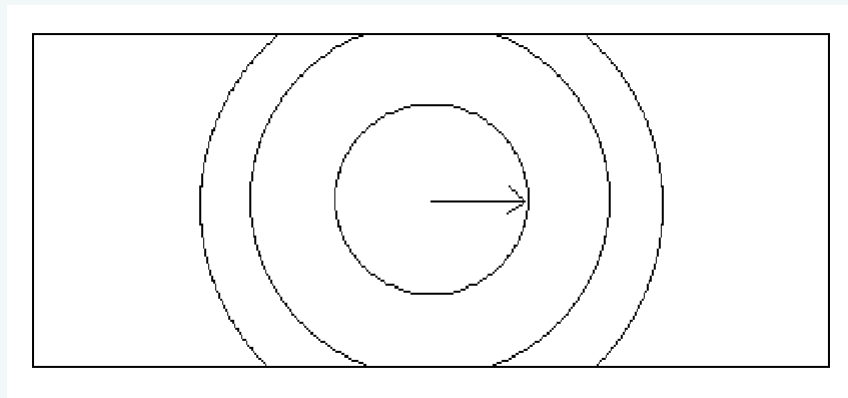


Рисунок 3. Рассеяние рентгеновских лучей на порошке кристаллов KCl приводит к появлению концентрических тёмных окружностей на фотопластинке.

d - Рассчитайте расстояние между двумя ближайшими ионами K в кристалле.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Обозначим длину волны через λ . Координаты на экране X, Y отсчитываются от неотклонённого пучка; для кристалла L обозначает расстояние от кристалла до экрана.

- **a.** Для целых m, n положим

$$u_m = \frac{m\lambda}{d_1}, \quad v_n = \frac{n\lambda}{d_2}.$$

Главные максимумы находятся в точках

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

Их полные ширины между первыми нулями, выраженные через направляющие косинусы, равны

$$\Delta u = \frac{2\lambda}{N_1 d_1}, \quad \Delta v = \frac{2\lambda}{N_2 d_2}.$$

При малых углах дифракции эти выражения принимают вид

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2}, \quad W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

- **b.** Положим $r = \lambda/a$, и пусть h, k, ℓ — целочисленные индексы дифракции. Определим

$$B = k \sin \Theta + \ell \cos \Theta, \quad C = k \cos \Theta - \ell \sin \Theta.$$

Максимумы полного конструктивного сложения удовлетворяют условию

$$2B + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0$$

и наблюдаются в точках

$$(X, Y) = \frac{Lr(h, C)}{1 + rB}.$$

При малых Θ следует использовать $B \simeq k\Theta + \ell$ и $C \simeq k - \ell\Theta$.

При дифракции вперёд под малыми углами рассеяния узкие пятна имеют положения и ширины

$$(X, Y) \simeq Lr(h, k), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

Их интерференционный множитель, обусловленный толщиной, максимален при

$$-k\Theta - \frac{\lambda}{2a}(h^2 + k^2) = \ell,$$

а соседние нули достигаются, когда левая часть равна $\ell \pm 1/N_1$. Таким образом, $N_1 \ll N_0$ приводит к узким пятнам при гораздо более широком диапазоне выполнения условия их возбуждения. При $k \neq 0$ соответствующая полная ширина по углу наклона приближённо равна

$$\Delta\Theta = \frac{2}{N_1 |k|}.$$

- **с.** Условие Брэгга

$$2d \sin \theta_B = p\lambda$$

эквивалентно условиям интерференции на решётке из **б**. В частности, отражение от плоскостей, перпендикулярных наклонённой длинной оси кристалла, даёт

$$2a \sin \Theta = p\lambda, \quad X = 0, \quad Y = -L \tan(2\Theta)$$

для выбранной ниже ориентации.

- **д.** Расстояние между ближайшими соседними ионами калия равно

$$d_{\text{К-К}} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ м} = 0.44 \text{ нм.}$$

Решение

Будем рассматривать когерентное упругое рассеяние в приближении дальней зоны, или приближении Фраунгофера. Щели и узлы решётки считаются одинаковыми излучателями; дифракционная огибающая отдельного излучателя не учитывается.

Для N равноотстоящих излучателей с разностью фаз $2\pi t$ полезно следующее выражение:

$$F_N(t) = \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j t} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\pi t)}{\sin^2(\pi t)}.$$

При целом $t = m$ предельное значение равно N^2 : все вклады синфазны. При $N > 1$ ближайшие нули находятся в точках

$$t = m \pm \frac{1}{N}.$$

а. Дифракция на двумерной решётке

Направим оси решётки вдоль x, y , а падающую волну — вдоль z . Единичный вектор направления выходящего луча имеет вид

$$\mathbf{s} = (u, v, w), \quad w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0.$$

Фаза падающей волны одинакова на всех щелях. Разности хода выходящих лучей от соседних щелей равны $d_1 u$ и $d_2 v$. Следовательно,

$$I(u, v) \propto F_{N_1} \left(\frac{d_1 u}{\lambda} \right) F_{N_2} \left(\frac{d_2 v}{\lambda} \right).$$

Оба множителя достигают своих главных максимумов при

$$d_1 u = m\lambda, \quad d_2 v = n\lambda.$$

Экрана в переднем полупространстве достигают лишь порядки, удовлетворяющие условию $u_m^2 + v_n^2 < 1$.

Луч с направлением $\mathbf{s}$ пересекает плоскость $z = L$ в точке

$$X = L \frac{u}{w}, \quad Y = L \frac{v}{w}.$$

Поэтому

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

Границы, соответствующие ближайшим нулям, задаются уравнениями

$$u = u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, \quad v = v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}.$$

Эти уравнения вместе с приведённым выше отображением на экран определяют границы первых нулей без приближения малых углов.

Например, определим

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{L(u, v)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

Две пары точек первых нулей вдоль естественных координат решётки имеют вид

$$\mathbf{R}\left(u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, v_n\right), \quad \mathbf{R}\left(u_m, v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}\right).$$

Расстояния между точками каждой пары дают соответствующие ширины на экране.

При малых углах дифракции $u, v \ll 1$, так что $X \simeq Lu, Y \simeq Lv$. Поэтому

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2},$$

а также

$$W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

b. Дифракция на наклонённом кристалле конечных размеров

Выберем единичные векторы кристалла

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}} \cos \Theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \Theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \Theta.$$

Два больших размера направлены вдоль $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; малый размер — вдоль $\mathbf{e}_3$. При таком выборе положительный угол Θ соответствует наклону длинной оси кристалла от $+y$ к $+z$.

Волновые векторы падающей и выходящей волн равны

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}_f = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}.$$

Определим вектор рассеяния

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

В отличие от решётки в $\mathbf{a}$, у атомов на разных глубинах различаются также фазы падающей волны. Вектор $\mathbf{q}$ учитывает распространение как падающей, так и выходящей волны. Определим

$$p_i = \frac{a}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i.$$

В явном виде

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{a}{\lambda} s_x, \\
p_2 &= \frac{a}{\lambda} [s_y \cos \Theta + (s_z - 1) \sin \Theta], \\
p_3 &= \frac{a}{\lambda} [-s_y \sin \Theta + (s_z - 1) \cos \Theta].
\end{aligned}$$

Таким образом, полная интерференционная картина для конечной решётки задаётся выражением

$$I(\mathbf{s}) \propto F_{N_0}(p_1) F_{N_0}(p_2) F_{N_1}(p_3).$$

Для максимума полного конструктивного сложения требуется

$$p_1 = h, \quad p_2 = k, \quad p_3 = \ell,$$

где h, k, ℓ — целые числа. Эквивалентная запись:

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3).$$

Обозначая $r = \lambda/a$, получаем направление выходящего луча:

$$\begin{aligned}
s_x &= rh, \\
s_y &= r(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta), \\
s_z &= 1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta).
\end{aligned}$$

Упругое рассеяние требует $|\mathbf{s}| = 1$. Подстановка даёт

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

Для любого разрешённого порядка, направленного вперёд, положение на экране равно

$$X = \frac{Lrh}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}, \quad Y = \frac{Lr(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}.$$

Эти формулы сохраняют точную геометрию выходящего луча. При малом наклоне кристалла

$$2(k\Theta + \ell) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) \simeq 0,$$

и

$$X \simeq \frac{Lrh}{1 + r(\ell + k\Theta)}, \quad Y \simeq \frac{Lr(k - \ell\Theta)}{1 + r(\ell + k\Theta)}.$$

Первые нули, окружающие максимум полного конструктивного сложения, лежат на поверхностях

$$p_1 = h \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_2 = k \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_3 = \ell \pm \frac{1}{N_1}.$$

Следовательно, полные ширины по компонентам вектора рассеяния равны

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \frac{4\pi}{N_0 a}, \quad \Delta q_3 = \frac{4\pi}{N_1 a}.$$

Поскольку $N_1 \ll N_0$, первые два множителя образуют узкие пики, а третий задаёт относительно широкую огибающую. Поэтому узкое пятно может оставаться видимым, даже когда p_3 не является в точности целым числом.

Для полноты положение такого пятна можно получить, не требуя точного выполнения условия трёхмерной конструктивной интерференции. Положим $p_1 = h$, $p_2 = k$. На ветви, соответствующей распространению вперёд,

$$\zeta_{hk}(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - r^2 h^2 - (\sin \Theta + rk)^2} - \cos \Theta}{r}$$

есть получающееся значение p_3 . Положение пятна равно

$$\mathcal{R}_\Theta(h, k) = \frac{Lr(h, k \cos \Theta - \zeta_{hk} \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \zeta_{hk} \cos \Theta)}.$$

Его интенсивность содержит множитель $F_{N_1}(\zeta_{hk})$. Пики полного конструктивного сложения возникают, когда ζ_{hk} — целое число.

Для интенсивно возбуждённого пятна две пары точек первых нулей получаются из этого отображения заменами

$$h \longrightarrow h \pm \frac{1}{N_0}, \quad \text{или} \quad k \longrightarrow k \pm \frac{1}{N_0}.$$

Расстояния между ними дают ширины на экране с учётом зависимости от Θ .

Форма выражений в приближении малых углов особенно ясно показывает физические следствия. Положим

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{Y}{L}, \quad \mathbf{s} \simeq \left(\alpha, \beta, 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

При малых Θ, α, β

$$p_1 \simeq \frac{\alpha}{r}, \quad p_2 \simeq \frac{\beta}{r}, \quad p_3 \simeq -\frac{\Theta\beta + (\alpha^2 + \beta^2)/2}{r}.$$

Квадратичный по углам член необходимо сохранить в p_3 , поскольку он даёт главный вклад в продольную разность хода.

Поэтому узкие поперечные пики возникают при

$$\alpha_h \simeq hr, \quad \beta_k \simeq kr,$$

и имеют полные ширины

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\beta \simeq \frac{2r}{N_0}.$$

Следовательно,

$$(X, Y) \simeq \left(\frac{h\lambda L}{a}, \frac{k\lambda L}{a} \right), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

В этих точках

$$p_3 \simeq -k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2).$$

Таким образом, максимум огибающей, обусловленной толщиной, возникает при

$$-k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2) = \ell,$$

а соседние с ним нули достигаются при $\ell \pm 1/N_1$.

Для центрального порядка интерференции по толщине $\ell = 0$ наиболее интенсивные пятна удовлетворяют условию

$$h^2 + \left(k + \frac{\Theta}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Theta}{r}\right)^2.$$

Конечная толщина расширяет эту окружность до полосы заметно возбуждённых дифракционных пятен решётки.

При $k \neq 0$ изменение наклона меняет p_3 со скоростью

$$\frac{dp_3}{d\Theta} \simeq -k.$$

Поэтому полная ширина между первыми нулями по углу наклона равна

$$\Delta\Theta \simeq \frac{2}{N_1|k|}.$$

Два больших размера определяют малые ширины пятен. Малый размер даёт более широкую интерференционную огибающую и более широкий диапазон ориентаций кристалла, при которых пятно заметно возбуждается.

с. Эквивалентность брэгговскому отражению

Рассмотрим семейство атомных плоскостей с взаимно простыми целочисленными индексами (H, K, M) . Их единичная нормаль и межплоскостное расстояние равны

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}.$$

Пусть θ_B — угол скольжения между падающим пучком и этими плоскостями. Лучи, отражённые от последовательных плоскостей, имеют разность хода

$$2d \sin \theta_B.$$

Для конструктивной интерференции требуется

$$2d \sin \theta_B = p\lambda, \quad p = 1, 2, \dots$$

При зеркальном отражении изменяется только компонента волнового вектора, перпендикулярная плоскостям. Поэтому $\mathbf{q}$ перпендикулярен им, а его модуль равен

$$|\mathbf{q}| = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_B.$$

Используя условие Брэгга, получаем

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\pi p}{d}.$$

При подходящем выборе направления нормали

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi p}{a} (H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3).$$

Полагая

$$(h, k, \ell) = p(H, K, M)$$

получаем в точности

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a}(h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3),$$

то есть три условия интерференции на решётке, выведенные в **b**. Требование равенства длин волн падающего и выходящего излучения затем даёт то же условие

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + \frac{\lambda}{a}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

В качестве непосредственного примера возьмём плоскости, перпендикулярные $\mathbf{e}_2$. Расстояние между ними равно a , а угол скольжения равен Θ . Закон Брэгга даёт

$$2a \sin \Theta = p\lambda.$$

В **b** выберем $h = 0$, $k = -p$, $\ell = 0$. Условие принимает вид

$$-2p \sin \Theta + \frac{\lambda}{a}p^2 = 0,$$

что совпадает с предыдущим условием. Выходящий луч имеет направление

$$\mathbf{s} = (0, -\sin 2\Theta, \cos 2\Theta),$$

так что

$$X = 0, \quad Y = -L \tan 2\Theta.$$

d. Расстояние между ближайшими ионами калия

Если K^+ и Cl^- рассеивают одинаково, структура с чередующимися ионами действует как простая кубическая решётка одинаковых рассеивающих центров.

Обозначим через b расстояние между ближайшими соседними ионами K–Cl. Период эффективной простой кубической решётки равен b . Наибольшее расстояние между её отражающими плоскостями равно b , поэтому наименьший ненулевой угол дифракции соответствует отражению первого порядка, для которого

$$2b \sin \theta_B = \lambda.$$

Случайные ориентации кристаллов создают конус рассеянных лучей с углом рассеяния $2\theta_B$. Поэтому перпендикулярная пучку фотопластинка регистрирует кольцо радиуса

$$R = L \tan(2\theta_B).$$

Используя приведённые данные, получаем

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{0.053}{0.10}\right) = 27.9236^\circ,$$

откуда

$$\theta_B = 13.9618^\circ.$$

Приближение малых углов здесь не требуется.

Таким образом,

$$b = \frac{0.15 \text{ nm}}{2 \sin 13.9618^\circ} = 0.31085 \text{ nm}.$$

Вдоль каждой оси простой кубической решётки ионы двух видов чередуются. Поэтому два ближайших иона калия находятся на концах диагонали грани куба со стороной b , что даёт

$$d_{\text{K-K}} = \sqrt{2}b = \sqrt{2}(0.31085 \text{ nm}) = 0.43961 \text{ nm}.$$

С двумя значащими цифрами

$$d_{\text{К-К}} = 0.44 \text{ nm} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Электрические эксперименты в магнитосфере Земли

В мае 1991 года космический корабль «Атлантис» будет выведен на орбиту вокруг Земли. Будем считать, что эта орбита круговая и лежит в экваториальной плоскости Земли.

В некоторый заранее заданный момент космический корабль выпустит спутник S, прикрепленный к проводящему стержню длиной L . Предположим, что стержень жёсткий, имеет пренебрежимо малую массу и покрыт электроизоляционным материалом. Будем также пренебрегать всяким трением. Обозначим через α угол между стержнем и прямой, соединяющей «Атлантис» с центром Земли (см. рис. 1).

Спутник S также находится в экваториальной плоскости.

Считайте, что масса спутника намного меньше массы «Атлантиса», а L намного меньше радиуса орбиты.

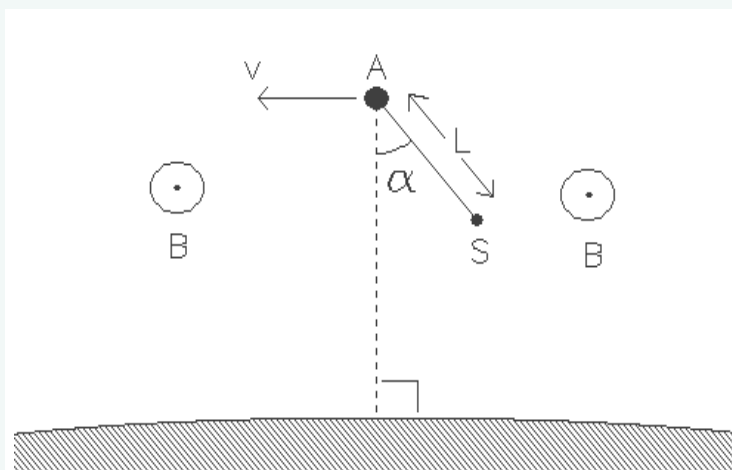


Рисунок 1. Космический корабль «Атлантис» (A) со спутником (S) на орбите вокруг Земли. Орбита лежит в экваториальной плоскости Земли. Магнитное поле (B) перпендикулярно плоскости рисунка и направлено к читателю.

a_1 - Определите, при каких значениях α конфигурация космического корабля и спутника остаётся неизменной (относительно Земли)? Иными словами, при каких значениях α угол α остаётся постоянным?

a_2 - Исследуйте устойчивость равновесия в каждом случае.

Предположим, что в некоторый момент стержень отклоняется от устойчивого положения на малый угол. Система начнёт колебаться подобно маятнику.

b - Выразите период колебаний через период обращения системы вокруг Земли.

На рис. 1 магнитное поле Земли перпендикулярно плоскости рисунка и направлено к читателю. Вследствие движения стержня по орбите между его концами возникает разность потенциалов. Окружающая среда (магнитосфера) представляет собой разреженный ионизованный газ с очень высокой электропроводностью. Контакт с ионизованным газом осуществляется с помощью электродов в А («Атлантиде») и S (спутнике). В результате движения по стержню протекает ток I .

c_1 - В каком направлении течёт ток по стержню? (Примите $\alpha = 0$)

Данные:

- период обращения по орбите	$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$
- длина стержня	$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$
- магнитная индукция поля Земли на высоте спутника	$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
- масса шаттла «Атлантида»	$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$

Затем в цепь включают находящийся внутри шаттла источник тока, который поддерживает результирующий постоянный ток силой 0.1 А в противоположном направлении.

c_2 - Как долго необходимо поддерживать этот ток, чтобы изменить высоту орбиты на 10 м?

Считайте, что α остаётся равным нулю. Пренебрегайте всеми воздействиями токов в магнитосфере.

- Уменьшается или увеличивается высота орбиты?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a_1 :** Стержень должен быть направлен **радиально или по касательной**. В ведущем порядке по L/R ориентированные углы равны

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- **a_2 :** Радиальные положения равновесия, $\alpha = 0, \pi$, **устойчивы**. Касательные положения равновесия, $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$, **неустойчивы**.
- **b :** Период малых колебаний равен

$$T_{\text{swing}} = \frac{T}{\sqrt{3}} \simeq 3.1 \times 10^3 \text{ s}.$$

- **c_1 :** Ток в условно принятом направлении течёт **от спутника S к «Атлантиде» A**.
- **c_2 :** Высота **увеличивается**, а необходимое время в приближении круговой орбиты равно

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT} \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

Решение

$\mathbf{a}_1$ — Равновесные ориентации

Пусть R — радиус орбиты «Атлантика», $\mu = GM_E$, а

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Поскольку «Атлантика» движется по круговой орбите,

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3}.$$

Значительно меньшая масса спутника позволяет пренебречь его влиянием на движение «Атлантика».

Воспользуемся системой отсчёта с началом на «Атлантика», вращающейся вместе с его движением по орбите. Пусть $\mathbf{e}_x$ направлен к центру Земли, а $\mathbf{e}_y$ — вправо на рис. 1. Радиус-вектор спутника относительно «Атлантика» равен

$$\boldsymbol{\rho} = L \cos \alpha \mathbf{e}_x + L \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

Для произвольного малого смещения $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ разложение гравитационного поля Земли до первого порядка по L/R даёт

$$\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_A = \frac{\mu}{R^3} (2x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

Дополнительное центробежное ускорение равно

$$\Omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y).$$

Следовательно, их сумма равна

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = 3\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

Единичный вектор, перпендикулярный стержню и направленный в сторону увеличения α , имеет вид

$$\mathbf{e}_\alpha = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y.$$

Сила со стороны стержня направлена вдоль него. Сила Кориолиса также направлена вдоль стержня, поскольку относительная скорость $L\dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ перпендикулярна ему. Ни одна из этих сил не даёт вклада в уравнение движения в касательном направлении.

Следовательно,

$$L\ddot{\alpha} = \mathbf{a}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -3\Omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha,$$

или

$$\boxed{\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0}.$$

Для постоянства угла необходимо, чтобы

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$\boxed{\alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}}.$$

Таким образом, стержень направлен либо радиально, либо по касательной. Эти значения углов получены в указанном приближении $L \ll R$.

а₂ — Устойчивость

Запишем

$$\alpha = \alpha_0 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

где α_0 — равновесное значение угла. Линеаризация уравнения движения даёт

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \cos(2\alpha_0) \delta = 0.$$

Для радиальных конфигураций, $\alpha_0 = 0, \pi$,

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \delta = 0.$$

Ускорение возвращает стержень к положению равновесия, поэтому обе радиальные конфигурации **устойчивы**.

Для касательных конфигураций, $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$,

$$\ddot{\delta} - 3\Omega^2 \delta = 0.$$

Это уравнение допускает экспоненциально растущее отклонение,

$$\delta \propto e^{\sqrt{3}\Omega t},$$

поэтому обе касательные конфигурации **неустойчивы**.

б — Период малых колебаний

Вблизи каждого из устойчивых положений равновесия полученное выше уравнение является уравнением гармонических колебаний:

$$\ddot{\delta} + \omega_{\text{swing}}^2 \delta = 0, \quad \omega_{\text{swing}} = \sqrt{3}\Omega.$$

Отсюда

$$T_{\text{swing}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя заданный период обращения по орбите, получаем

$$T_{\text{swing}} = \frac{5.4 \times 10^3}{\sqrt{3}} \text{ s} \simeq \boxed{3.1 \times 10^3 \text{ s}}.$$

с₁ — Направление индукционного тока

Магнитная сила, действующая на положительный заряд, движущийся вместе со стержнем, равна

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

На рис. 1 вектор $\mathbf{v}$ направлен влево, а $\mathbf{B}$ — из плоскости рисунка к читателю. Поэтому $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ направлен вверх.

При $\alpha = 0$ спутник S находится ниже A. Следовательно, ЭДС движения перемещает положительные заряды вдоль стержня от S к A:

$$\boxed{\text{Ток в условно принятом направлении течёт от S к A.}}$$

c₂ — Необходимое время и направление изменения высоты

Источник тока меняет направление тока на противоположное, так что ток течёт от A к S, вниз на рисунке. Магнитная сила, действующая на стержень, равна

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B},$$

где $\boldsymbol{\ell}$ направлен по току. Векторное произведение вектора, направленного вниз, на вектор, направленный из плоскости рисунка к читателю, направлено влево, вдоль орбитальной скорости.

Поскольку стержень перпендикулярен полю,

$$F = IBL = (0.1)(5.0 \times 10^{-5})(2.0 \times 10^4) = \boxed{0.10 \text{ N}}.$$

Эта направленная вперёд сила увеличивает энергию орбитального движения.

Будем считать, что слабая тяга вызывает постепенное изменение почти круговой орбиты.

Полная масса системы, движущейся по орбите, приблизительно равна заданной массе шаттла m . Для круговой орбиты

$$v^2 = \frac{\mu}{R},$$

а полная механическая энергия равна

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{R} = -\frac{\mu m}{2R}.$$

Мощность магнитной силы равна Fv , поэтому

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{\mu m}{2R^2} \frac{dR}{dt}.$$

Подставляя $v = \Omega R$ и $\mu = \Omega^2 R^3$, получаем

$$F\Omega R = \frac{m\Omega^2 R}{2} \frac{dR}{dt},$$

откуда

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{2F}{m\Omega} = \frac{FT}{\pi m}}.$$

Изменение высоты равно изменению радиуса орбиты. При подъёме всего на 10 m величины B , F и T можно считать постоянными. Таким образом,

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{FT} = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT}.$$

Численно

$$t = \frac{\pi(1.0 \times 10^5)(10)}{(0.10)(5.4 \times 10^3)} \text{ s} = 5.82 \times 10^3 \text{ s}.$$

Следовательно,

$$\boxed{t \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 97 \text{ min} \simeq 1.6 \text{ h}}.$$

Поскольку сила увеличивает энергию орбитального движения, E становится менее отрицательной, а R увеличивается:

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Вращающаяся нейтронная звезда

«Миллисекундный пульсар» — это источник излучения во Вселенной, испускающий очень короткие импульсы с периодом от одной до нескольких миллисекунд. Это излучение относится к радиодиапазону; с помощью подходящего радиоприёмника можно регистрировать отдельные импульсы и тем самым измерять период с высокой точностью.

Эти радиоимпульсы возникают на поверхности звезды особого типа, так называемой нейтронной звезды. Такие звёзды очень компактны: их масса имеет тот же порядок величины, что и масса Солнца, но радиус составляет лишь несколько десятков километров. Они очень быстро вращаются. Из-за быстрого вращения нейтронная звезда слегка сплюснута. Считайте, что осевое сечение её поверхности представляет собой эллипс с почти равными осями. Обозначим полярный радиус через r_p , а экваториальный — через r_e ; определим коэффициент сплюснутости следующим образом:

$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}$$

Рассмотрим нейтронную звезду со следующими параметрами:

масса	$2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$,
средний радиус	$1.0 \cdot 10^4 \text{ m}$,
период вращения	$2.0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

а - Вычислите коэффициент сплюснутости, если гравитационная постоянная равна $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

С течением времени (на протяжении многих лет) вращение звезды замедляется вследствие потери энергии, что приводит к уменьшению сплюснутости. Однако у звезды есть твёрдая кора, плавающая на жидких недрах. Твёрдая кора препятствует непрерывному изменению формы до равновесной. Вместо этого происходят звездотрясения, при которых форма коры скачкообразно изменяется, приближаясь к равновесной. Во время и после такого звездотрясения наблюдается изменение угловой скорости, показанное на рисунке 1.

angular velocity
of the crust (s^{-1})

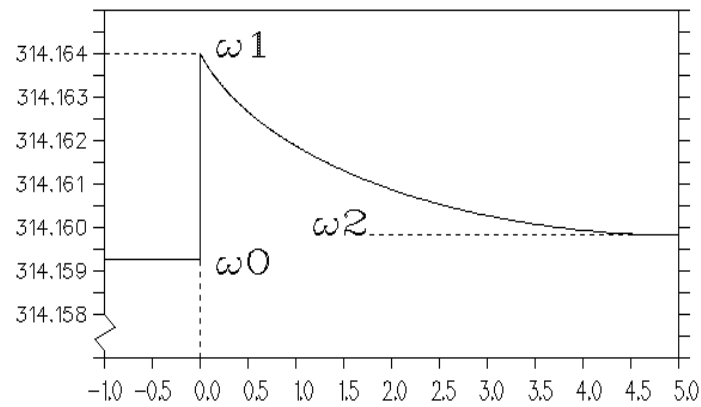


Figure 1

time (days) -->

Внезапное изменение формы коры нейтронной звезды приводит к скачкообразному изменению угловой скорости.

b - Вычислите средний радиус жидкой внутренней части звезды, используя данные рис. 1. Считайте приближённо, что плотности коры и внутренней части одинаковы. (Пренебрегите изменением формы внутренней части.)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- a.** В приближении сферически-симметричного гравитационного поля

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}$$

(безразмерная величина).

- b.** Средний радиус жидкой внутренней части приблизительно равен

$$r_{\text{liquid}} \simeq 9.7 \times 10^3 \text{ m} = 9.7 \text{ km}.$$

Решение

а. Коэффициент сплюснутости

Обозначим через M , R и T массу, средний радиус и период вращения. Угловая скорость равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0 \times 10^{-2}} \simeq 314.16 \text{ s}^{-1}.$$

Для определения равновесной формы будем рассматривать звезду как вращающуюся жидкость и приближённо описывать её гравитационный потенциал выражением для сферически-симметричного поля $-GM/r$. В системе отсчёта, вращающейся вместе со звездой, эффективный потенциал на единицу массы равен

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2,$$

где s — расстояние до оси вращения.

Равновесная поверхность является эквипотенциальной: иначе вещество текло бы вдоль неё. На полюсе $s = 0$, а на экваторе $s = r_e$. Следовательно,

$$-\frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

или

$$GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2.$$

Используя определение ϵ , получаем

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e} = \frac{\epsilon}{r_e},$$

так что

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

Поскольку сплюснутость мала, в этом выражении можно заменить r_e средним радиусом R :

$$\epsilon \simeq \frac{\omega^2 R^3}{2GM} = \frac{2\pi^2 R^3}{GMT^2}.$$

Численно

$$\epsilon \simeq \frac{2\pi^2 (1.0 \times 10^4)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(2.0 \times 10^{-2})^2} = 3.699 \times 10^{-4}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}}.$$

Этому соответствует $r_e - r_p \simeq \epsilon R \simeq 3.7$ м, что согласуется с предположением о почти равных радиусах.

б. Радиус жидкой внутренней части

Предположим, что до звездотрясения кора и жидкая внутренняя часть вращаются совместно с угловой скоростью ω_0 . При внезапной деформации момент инерции коры уменьшается.

Времени для заметной передачи момента импульса жидкости недостаточно, поэтому угловая скорость коры возрастает до ω_1 , тогда как жидкость вначале продолжает вращаться с угловой скоростью ω_0 .

В течение последующих дней внутреннее трение передаёт момент импульса от коры к жидкости, пока обе части не начнут вращаться с угловой скоростью ω_2 . Потерей момента импульса вследствие внешних воздействий на этом промежутке времени можно пренебречь по сравнению с долговременной эволюцией на протяжении многих лет.

Пусть I_c — момент инерции коры после звездотрясения, а I_l — момент инерции жидкости. По условию момент инерции жидкости не изменяется. Из закона сохранения момента импульса в процессе релаксации следует

$$I_c \omega_1 + I_l \omega_0 = (I_c + I_l) \omega_2.$$

Преобразуя это равенство, получаем

$$I_c(\omega_1 - \omega_2) = I_l(\omega_2 - \omega_0).$$

Следовательно,

$$\boxed{\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0}}.$$

Здесь сохраняющейся величиной является момент импульса; кинетическая энергия вращения в процессе релаксации рассеивается.

Чтобы связать моменты инерции с радиусами, пренебрежём малой сплюснутостью и воспользуемся указанной в условии одинаковой плотностью ρ . Для сферического слоя радиуса r и толщины dr имеем

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm.$$

Таким образом, момент инерции однородного шара радиуса a равен

$$I(a) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} a^5.$$

Обозначив радиус жидкой части через r_l , получаем

$$\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{r_l^5}{R^5}.$$

Следовательно,

$$\boxed{r_l = R \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0} \right)^{1/5}}.$$

Приближённые значения, считанные с графика, равны

$$\omega_0 \simeq 314.1593 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 \simeq 314.1640 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 \simeq 314.1599 \text{ s}^{-1}.$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{r_l}{R} \right)^5 \simeq \frac{0.0041}{0.0047} \simeq 0.872,$$

и, следовательно,

$$r_l \simeq (1.0 \times 10^4)(0.872)^{1/5} \simeq 9.73 \times 10^3 \text{ m}.$$

С разумной точностью

$$\boxed{r_l \simeq 9.7 \text{ km}}.$$

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.