

IPhO 1990

Problemas teóricos y soluciones · Groninga, Países Bajos · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipro/1990/

Problema 1: Difracción de rayos X por un cristal

Deseamos estudiar la difracción de rayos X por una red cristalina cúbica. Para ello, comenzamos con la difracción de una onda plana y monocromática que incide perpendicularmente sobre una rejilla bidimensional formada por $N_1 \times N_2$ rendijas con separaciones d_1 y d_2 . El patrón de difracción se observa en una pantalla situada a una distancia L de la rejilla. La pantalla es paralela a la rejilla y L es mucho mayor que d_1 y d_2 .

a - Determine las posiciones y las anchuras de los máximos principales en la pantalla. La anchura se define como la distancia entre los mínimos situados a ambos lados de cada máximo.

Consideramos ahora un cristal cúbico, con parámetro de red a y dimensiones $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$. N_1 es mucho menor que N_0 . El cristal se coloca en un haz paralelo de rayos X dirigido a lo largo del eje z , con un ángulo Θ (véase la Fig. 1). El patrón de difracción se observa de nuevo en una pantalla situada a gran distancia del cristal.

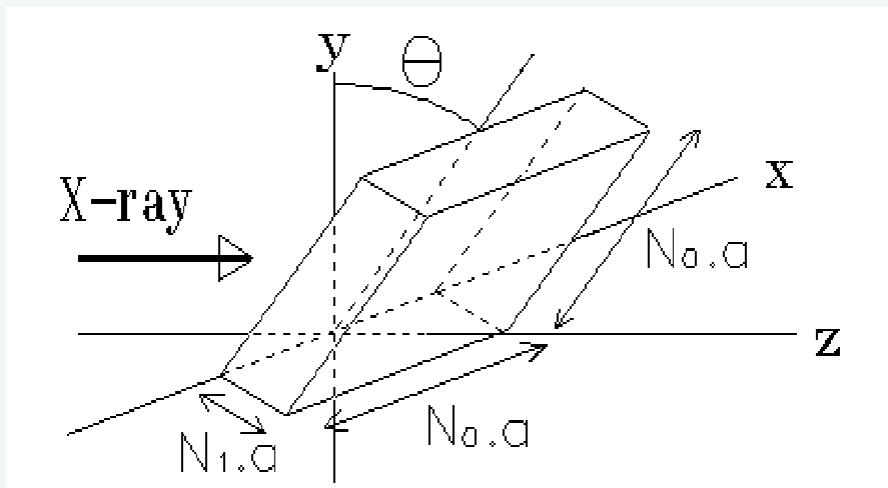


Figura 1 Difracción de un haz paralelo de rayos X dirigido a lo largo del eje z . El ángulo entre el cristal y el eje y es Θ .

b - Calcule la posición y la anchura de los máximos en función del ángulo Θ (para valores pequeños de Θ).

- ¿Qué consecuencias tiene, en particular, el hecho de que $N_1 \ll N_0$?

El patrón de difracción también puede deducirse mediante la teoría de Bragg, en la que se supone que los rayos X se reflejan en los planos atómicos de la red. El patrón de difracción surge entonces de la interferencia entre estos rayos reflejados.

c - Demuestre que esta denominada reflexión de Bragg conduce a las mismas condiciones para los máximos que las obtenidas en b.

En algunas mediciones se emplea el denominado método del polvo. Un haz de rayos X es dispersado por un polvo formado por muchísimos cristales pequeños. (Naturalmente, las dimensiones de los cristales son mucho mayores que el parámetro de red, a .)

La dispersión de rayos X de longitud de onda 0.15 nm por cloruro de potasio [KCl] (que tiene una red cúbica, véase la Fig. 2) da lugar a círculos oscuros concéntricos en una placa fotográfica. La distancia entre los cristales y la placa es de 0.10 m , y el radio del círculo más pequeño es de 0.053 m (véase la Fig. 3). Los iones K^+ y Cl^- tienen casi el mismo tamaño y pueden tratarse como centros dispersores idénticos.

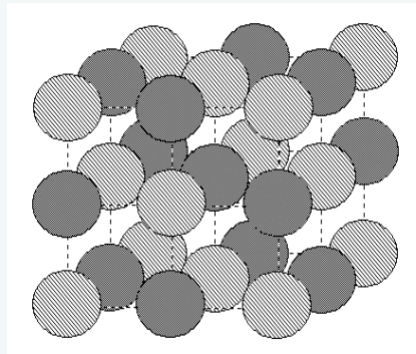


Figura 2. La red cúbica del cloruro de potasio, en la que los iones K^+ y Cl^- tienen casi el mismo tamaño.

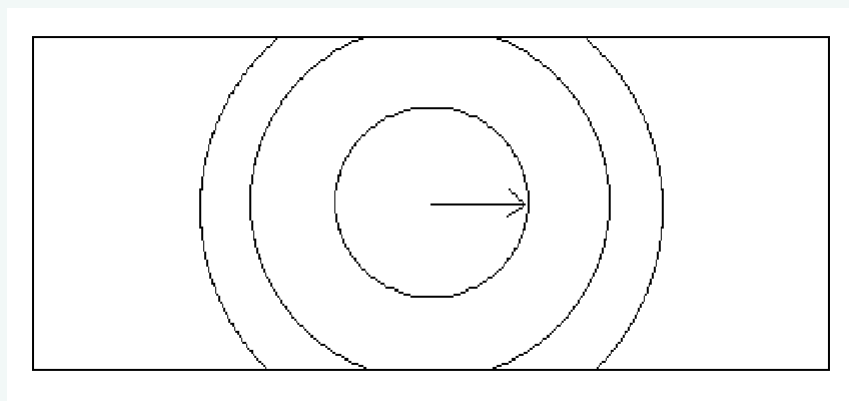


Figura 3. La dispersión de rayos X por un polvo de cristales de KCl da lugar a círculos oscuros concéntricos en una placa fotográfica.

d - Calcule la distancia entre dos iones K vecinos en el cristal.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea λ la longitud de onda. Las coordenadas X, Y de la pantalla se miden desde el haz no desviado; para el cristal, L denota la distancia entre el cristal y la pantalla.

- **a.** Para enteros m, n , definamos

$$u_m = \frac{m\lambda}{d_1}, \quad v_n = \frac{n\lambda}{d_2}.$$

Los máximos principales se encuentran en

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

Sus anchuras completas entre los primeros ceros, expresadas en cosenos directores, son

$$\Delta u = \frac{2\lambda}{N_1 d_1}, \quad \Delta v = \frac{2\lambda}{N_2 d_2}.$$

Para ángulos de difracción pequeños, estas expresiones se convierten en

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2}, \quad W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

- **b.** Escribamos $r = \lambda/a$, y sean h, k, ℓ índices enteros de difracción. Definamos

$$B = k \sin \Theta + \ell \cos \Theta, \quad C = k \cos \Theta - \ell \sin \Theta.$$

Los máximos de interferencia plenamente constructiva satisfacen

$$2B + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0$$

y aparecen en

$$(X, Y) = \frac{Lr(h, C)}{1 + rB}.$$

Para valores pequeños de Θ , se utilizan $B \simeq k\Theta + \ell$ y $C \simeq k - \ell\Theta$.

Para la difracción hacia delante con ángulos de dispersión pequeños, las manchas nítidas tienen

$$(X, Y) \simeq Lr(h, k), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

Su factor de interferencia debido al espesor es máximo cuando

$$-k\Theta - \frac{\lambda}{2a}(h^2 + k^2) = \ell,$$

con ceros adyacentes cuando el miembro izquierdo es igual a $\ell \pm 1/N_1$. Por tanto, $N_1 \ll N_0$ da lugar a manchas estrechas con una condición de excitación mucho más amplia. Para $k \neq 0$, la anchura completa correspondiente en el ángulo de inclinación es aproximadamente

$$\Delta\Theta = \frac{2}{N_1 |k|}.$$

- **c.** La condición de Bragg

$$2d \sin \theta_B = p\lambda$$

es equivalente a las condiciones de interferencia de la red de **b**. En particular, la reflexión en planos perpendiculares al eje largo inclinado del cristal da

$$2a \sin \Theta = p\lambda, \quad X = 0, \quad Y = -L \tan(2\Theta)$$

para la orientación elegida más adelante.

- **d.** La distancia entre los iones de potasio vecinos más próximos es

$$d_{K-K} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.44 \text{ nm.}$$

Solución

Utilizamos dispersión coherente y elástica en la aproximación de campo lejano, o de Fraunhofer. Las rendijas y los sitios de la red se tratan como emisores idénticos; se omite su envolvente individual de difracción.

Un resultado útil para N emisores equiespaciados con diferencia de fase $2\pi t$ es

$$F_N(t) = \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j t} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\pi t)}{\sin^2(\pi t)}.$$

Para un valor entero $t = m$, el valor límite es N^2 : todas las contribuciones están en fase. Para $N > 1$, los ceros más próximos son

$$t = m \pm \frac{1}{N}.$$

a. Difracción por la rejilla bidimensional

Tomemos los ejes de la rejilla a lo largo de x, y , con la onda incidente dirigida a lo largo de z . Un rayo saliente tiene el vector unitario de dirección

$$\mathbf{s} = (u, v, w), \quad w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0.$$

La fase incidente es la misma en todas las rendijas. Las diferencias de camino de los rayos salientes entre rendijas adyacentes son $d_1 u$ y $d_2 v$. Por tanto,

$$I(u, v) \propto F_{N_1} \left(\frac{d_1 u}{\lambda} \right) F_{N_2} \left(\frac{d_2 v}{\lambda} \right).$$

Ambos factores alcanzan sus máximos principales cuando

$$d_1 u = m\lambda, \quad d_2 v = n\lambda.$$

Solo los órdenes que satisfacen $u_m^2 + v_n^2 < 1$ alcanzan una pantalla situada en el semiespacio delantero.

Un rayo de dirección $\mathbf{s}$ corta el plano $z = L$ en

$$X = L \frac{u}{w}, \quad Y = L \frac{v}{w}.$$

Por lo tanto,

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

Los límites correspondientes a los ceros más próximos son

$$u = u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, \quad v = v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}.$$

Estas ecuaciones, junto con la transformación a coordenadas de la pantalla anterior, especifican los límites de los primeros ceros sin recurrir a una aproximación de ángulos pequeños.

Por ejemplo, definamos

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{L(u, v)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

Los dos pares de puntos correspondientes a los primeros ceros a lo largo de las coordenadas naturales de la rejilla son

$$\mathbf{R}\left(u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, v_n\right), \quad \mathbf{R}\left(u_m, v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}\right).$$

Sus respectivas separaciones dan las anchuras correspondientes en la pantalla.

Para ángulos de difracción pequeños, $u, v \ll 1$, de modo que $X \simeq Lu$, $Y \simeq Lv$. Así,

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2},$$

y

$$\boxed{W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.}$$

b. Difracción por el cristal finito inclinado

Elijamos los vectores unitarios del cristal

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}} \cos \Theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \Theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \Theta.$$

Las dos dimensiones largas están orientadas a lo largo de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; la dimensión delgada está orientada a lo largo de $\mathbf{e}_3$. Con esta elección, un Θ positivo corresponde a una inclinación del eje largo del cristal desde $+y$ hacia $+z$.

Los vectores de onda incidente y saliente son

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}_f = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}.$$

Definamos el vector de dispersión

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

A diferencia de la rejilla de $\mathbf{a}$, los átomos situados a distintas profundidades también tienen fases incidentes distintas. El vector $\mathbf{q}$ tiene en cuenta tanto la propagación incidente como la saliente. Definamos

$$p_i = \frac{a}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{a}{\lambda} s_x, \\
p_2 &= \frac{a}{\lambda} [s_y \cos \Theta + (s_z - 1) \sin \Theta], \\
p_3 &= \frac{a}{\lambda} [-s_y \sin \Theta + (s_z - 1) \cos \Theta].
\end{aligned}$$

El patrón completo de interferencia de la red finita es, por tanto,

$$I(\mathbf{s}) \propto F_{N_0}(p_1) F_{N_0}(p_2) F_{N_1}(p_3).$$

Un máximo de interferencia plenamente constructiva requiere

$$p_1 = h, \quad p_2 = k, \quad p_3 = \ell,$$

donde h, k, ℓ son enteros. Equivalentemente,

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3).$$

Escribiendo $r = \lambda/a$, la dirección saliente es

$$\begin{aligned}
s_x &= rh, \\
s_y &= r(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta), \\
s_z &= 1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta).
\end{aligned}$$

La dispersión elástica requiere $|\mathbf{s}| = 1$. Al sustituir se obtiene

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

Para cualquier orden permitido hacia delante, su posición en la pantalla es

$$X = \frac{Lrh}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}, \quad Y = \frac{Lr(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}.$$

Estas fórmulas conservan la geometría exacta del rayo saliente. Para una inclinación pequeña del cristal,

$$2(k\Theta + \ell) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) \simeq 0,$$

y

$$X \simeq \frac{Lrh}{1 + r(\ell + k\Theta)}, \quad Y \simeq \frac{Lr(k - \ell\Theta)}{1 + r(\ell + k\Theta)}.$$

Los primeros ceros que rodean un máximo de interferencia plenamente constructiva se encuentran en

$$p_1 = h \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_2 = k \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_3 = \ell \pm \frac{1}{N_1}.$$

Por tanto, las anchuras completas en las componentes del vector de dispersión son

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \frac{4\pi}{N_0 a}, \quad \Delta q_3 = \frac{4\pi}{N_1 a}.$$

Como $N_1 \ll N_0$, los dos primeros factores forman picos estrechos, mientras que el tercer factor proporciona una envolvente relativamente amplia. En consecuencia, una mancha nítida puede seguir siendo visible incluso cuando p_3 no es exactamente un entero.

Para completar el análisis, la posición de una mancha de este tipo puede obtenerse sin exigir una interferencia constructiva tridimensional exacta. Hagamos $p_1 = h$, $p_2 = k$. En la rama correspondiente a la propagación hacia delante,

$$\zeta_{hk}(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - r^2 h^2 - (\sin \Theta + rk)^2} - \cos \Theta}{r}$$

es el valor resultante de p_3 . Su posición es

$$\mathcal{R}_\Theta(h, k) = \frac{Lr(h, k \cos \Theta - \zeta_{hk} \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \zeta_{hk} \cos \Theta)}.$$

Su intensidad contiene el factor $F_{N_1}(\zeta_{hk})$. Los picos de interferencia plenamente constructiva se producen cuando ζ_{hk} es un entero.

Para una mancha bien excitada, los dos pares de puntos correspondientes a los primeros ceros se obtienen a partir de esta transformación mediante

$$h \longrightarrow h \pm \frac{1}{N_0}, \quad \text{o} \quad k \longrightarrow k \pm \frac{1}{N_0}.$$

Sus separaciones dan las anchuras en la pantalla, incluida la dependencia respecto de Θ .

La forma para ángulos pequeños permite ver con especial claridad las consecuencias físicas. Pongamos

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{Y}{L}, \quad \mathbf{s} \simeq \left(\alpha, \beta, 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

Para valores pequeños de Θ, α, β ,

$$p_1 \simeq \frac{\alpha}{r}, \quad p_2 \simeq \frac{\beta}{r}, \quad p_3 \simeq -\frac{\Theta\beta + (\alpha^2 + \beta^2)/2}{r}.$$

El término angular cuadrático debe conservarse en p_3 , ya que constituye el término dominante de la diferencia de camino longitudinal.

Por tanto, los picos transversales estrechos se producen en

$$\alpha_h \simeq hr, \quad \beta_k \simeq kr,$$

con anchuras completas

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\beta \simeq \frac{2r}{N_0}.$$

Así,

$$(X, Y) \simeq \left(\frac{h\lambda L}{a}, \frac{k\lambda L}{a} \right), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

En estas posiciones,

$$p_3 \simeq -k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2).$$

Por tanto, se produce un máximo de la envolvente debida al espesor cuando

$$-k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2) = \ell,$$

y sus ceros adyacentes se encuentran en $\ell \pm 1/N_1$.

Para el orden central del espesor $\ell = 0$, las manchas más intensas satisfacen

$$h^2 + \left(k + \frac{\Theta}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Theta}{r}\right)^2.$$

El espesor finito ensancha esta circunferencia hasta convertirla en una banda de manchas de la red con excitación apreciable.

Para $k \neq 0$, al variar la inclinación, p_3 cambia a razón de

$$\frac{dp_3}{d\Theta} \simeq -k.$$

La anchura completa entre los primeros ceros en el ángulo de inclinación es, por tanto,

$$\Delta\Theta \simeq \frac{2}{N_1|k|}.$$

Las dos dimensiones grandes determinan las anchuras reducidas de las manchas. La dimensión delgada da lugar a una envolvente de interferencia más amplia y a un intervalo más amplio de orientaciones del cristal para las que una mancha presenta una excitación apreciable.

c. Equivalencia con la reflexión de Bragg

Consideremos una familia de planos atómicos con índices enteros coprimos (H, K, M) . Su normal unitaria y su separación son

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}.$$

Sea θ_B el ángulo rasante entre el haz incidente y estos planos. Los rayos reflejados en planos consecutivos tienen una diferencia de camino

$$2d \sin \theta_B.$$

La interferencia constructiva requiere

$$2d \sin \theta_B = p\lambda, \quad p = 1, 2, \dots$$

La reflexión especular solo cambia la componente del vector de onda perpendicular a los planos. Por tanto, $\mathbf{q}$ es perpendicular a ellos y tiene módulo

$$|\mathbf{q}| = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_B.$$

Utilizando la condición de Bragg,

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\pi p}{d}.$$

Con una elección adecuada del sentido de la normal,

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi p}{a} (H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3).$$

Al establecer

$$(h, k, \ell) = p(H, K, M)$$

se obtiene exactamente

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3),$$

las tres condiciones de interferencia de la red deducidas en **b**. Al imponer que las longitudes de onda incidente y saliente sean iguales, se obtiene entonces la misma condición

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + \frac{\lambda}{a}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

Como ejemplo directo, tomemos planos perpendiculares a $\mathbf{e}_2$. Su separación es a , y su ángulo rasante es Θ . La ley de Bragg da

$$2a \sin \Theta = p\lambda.$$

En **b**, elijamos $h = 0$, $k = -p$, $\ell = 0$. La condición se convierte en

$$-2p \sin \Theta + \frac{\lambda}{a}p^2 = 0,$$

que es idéntica. El rayo saliente es

$$\mathbf{s} = (0, -\sin 2\Theta, \cos 2\Theta),$$

de modo que

$$X = 0, \quad Y = -L \tan 2\Theta.$$

d. Distancia entre iones de potasio vecinos más próximos

Cuando K^+ y Cl^- dispersan de forma idéntica, la disposición iónica alternada actúa como una red cúbica simple de centros dispersores idénticos.

Sea b la separación K-Cl entre vecinos más próximos. El parámetro de la red cúbica simple efectiva es b . Su mayor separación entre planos reflectantes es b , de modo que el menor ángulo de difracción no nulo procede de la reflexión de primer orden con

$$2b \sin \theta_B = \lambda.$$

Las orientaciones aleatorias de los cristales producen un cono de rayos dispersados con un ángulo de dispersión $2\theta_B$. Por tanto, una placa fotográfica perpendicular registra un anillo de radio

$$R = L \tan(2\theta_B).$$

Utilizando los datos proporcionados,

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{0.053}{0.10}\right) = 27.9236^\circ,$$

y, por consiguiente,

$$\theta_B = 13.9618^\circ.$$

Aquí no es necesaria ninguna aproximación de ángulos pequeños.

Así,

$$b = \frac{0.15 \text{ nm}}{2 \sin 13.9618^\circ} = 0.31085 \text{ nm}.$$

Las especies se alternan a lo largo de cada eje de la red cúbica simple. Por tanto, dos iones de potasio vecinos más próximos se encuentran en los extremos de la diagonal de una cara de un cubo de lado b , lo que da

$$d_{\text{K-K}} = \sqrt{2}b = \sqrt{2}(0.31085 \text{ nm}) = 0.43961 \text{ nm}.$$

Con dos cifras significativas,

$$d_{K-K} = 0.44 \text{ nm} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Experimentos eléctricos en la magnetosfera de la Tierra

En mayo de 1991, la nave espacial Atlantis se pondrá en órbita alrededor de la Tierra. Supondremos que esta órbita será circular y que estará situada en el plano ecuatorial terrestre.

En un momento predeterminado, la nave espacial liberará un satélite S , unido a una varilla conductora de longitud L . Suponemos que la varilla es rígida, tiene una masa despreciable y está recubierta de un aislante eléctrico. También despreciamos todo rozamiento. Sea α el ángulo que forma la varilla con la línea que une el Atlantis con el centro de la Tierra (véase la Fig. 1).

S también se encuentra en el plano ecuatorial.

Suponga que la masa del satélite es mucho menor que la del Atlantis y que L es mucho menor que el radio de la órbita.

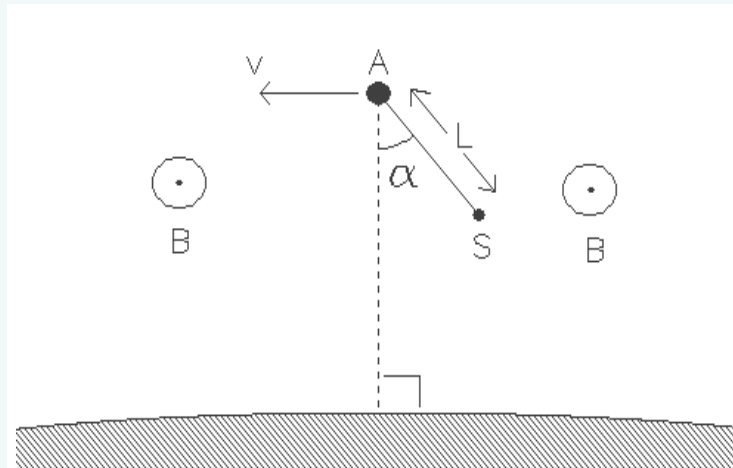


Figura 1 La nave espacial Atlantis (A) con un satélite (S) en una órbita alrededor de la Tierra. La órbita está situada en el plano ecuatorial terrestre. El campo magnético (B) es perpendicular al dibujo y está dirigido hacia el lector.

a_1 - Deduzca para qué valor(es) de α permanece invariable la configuración de la nave espacial y el satélite (con respecto a la Tierra). En otras palabras, ¿para qué valor(es) de α es constante α ?

a_2 - Analice la estabilidad del equilibrio en cada caso.

Suponga que, en un momento dado, la varilla se desvía de la configuración estable un ángulo pequeño. El sistema comenzará a oscilar como un péndulo.

b - Exprese el período de oscilación en función del período de revolución del sistema alrededor de la Tierra.

En la Fig. 1, el campo magnético terrestre es perpendicular al dibujo y está dirigido hacia el lector. Debido a la velocidad orbital de la varilla, aparece una diferencia de potencial entre sus extremos. El medio circundante (la magnetosfera) es un gas enrarecido e ionizado con una conductividad

eléctrica muy elevada. El contacto con el gas ionizado se establece mediante electrodos en A (el Atlantis) y S (el satélite). Como consecuencia del movimiento, circula por la varilla una corriente I .

c_1 - ¿En qué sentido circula la corriente por la varilla? (Tome $\alpha = 0$)

Datos:

- período de la órbita	$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$
- longitud de la varilla	$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$
- intensidad del campo magnético terrestre a la altura del satélite	$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
- masa del transbordador Atlantis	$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$

A continuación, se incorpora al circuito una fuente de corriente situada en el interior del transbordador, que mantiene una corriente continua neta de 0.1 A en el sentido opuesto.

c_2 - ¿Durante cuánto tiempo debe mantenerse esta corriente para modificar la altitud de la órbita en 10 m?

Suponga que α permanece igual a cero. Desprecie todas las contribuciones de las corrientes en la magnetosfera.

- ¿Disminuye o aumenta la altitud?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a₁**: La varilla debe ser **radial o tangencial**. Al orden dominante en L/R , los ángulos orientados son

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- **a₂**: Los equilibrios radiales, $\alpha = 0, \pi$, son **estables**. Los equilibrios tangenciales, $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$, son **inestables**.
- **b**: El período de las pequeñas oscilaciones es

$$T_{\text{swing}} = \frac{T}{\sqrt{3}} \simeq 3.1 \times 10^3 \text{ s}.$$

- **c₁**: La corriente convencional circula **desde el satélite S hacia el Atlantis A**.
- **c₂**: La altitud **aumenta**, y el tiempo necesario, en la aproximación de órbita circular, es

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT} \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

Solución

a₁ — Orientaciones de equilibrio

Sea R el radio orbital del Atlantis, $\mu = GM_{\text{E}}$, y

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Como el Atlantis sigue una órbita circular,

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3}.$$

La masa mucho menor del satélite permite despreciar su efecto sobre el movimiento del Atlantis.

Utilicemos un sistema de referencia centrado en el Atlantis y que gira con la órbita. Sea $\mathbf{e}_x$ un vector dirigido hacia el centro de la Tierra y $\mathbf{e}_y$ un vector dirigido hacia la derecha en la Fig. 1. El desplazamiento del satélite respecto al Atlantis es

$$\boldsymbol{\rho} = L \cos \alpha \mathbf{e}_x + L \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

Para un desplazamiento pequeño general $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, el desarrollo del campo gravitatorio terrestre a primer orden en L/R da

$$\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_A = \frac{\mu}{R^3} (2x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

La aceleración centrífuga adicional es

$$\Omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y).$$

Por tanto, su suma es

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = 3\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

El vector unitario perpendicular a la varilla, en el sentido de aumento de α , es

$$\mathbf{e}_\alpha = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y.$$

La fuerza de la varilla actúa a lo largo de esta. La fuerza de Coriolis también actúa a lo largo de la varilla, porque la velocidad relativa $L\dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ es perpendicular a ella. Ninguna de las dos contribuye a la ecuación tangencial.

En consecuencia,

$$L\ddot{\alpha} = \mathbf{a}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -3\Omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha,$$

o bien

$$\boxed{\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0}.$$

Para que el ángulo sea constante, se requiere

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

por lo que

$$\boxed{\alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}}.$$

Así pues, la varilla es radial o tangencial. Estos ángulos se obtienen utilizando la aproximación indicada $L \ll R$.

a₂ — Estabilidad

Escribamos

$$\alpha = \alpha_0 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

donde α_0 es un ángulo de equilibrio. Al linealizar la ecuación de movimiento se obtiene

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \cos(2\alpha_0) \delta = 0.$$

Para las configuraciones radiales, $\alpha_0 = 0, \pi$,

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \delta = 0.$$

La aceleración hace que la varilla vuelva hacia el equilibrio, por lo que ambas configuraciones radiales son **estables**.

Para las configuraciones tangenciales, $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$,

$$\ddot{\delta} - 3\Omega^2 \delta = 0.$$

Esta ecuación admite un desplazamiento que crece exponencialmente,

$$\delta \propto e^{\sqrt{3}\Omega t},$$

por lo que ambas configuraciones tangenciales son **inestables**.

b — Período de las pequeñas oscilaciones

Cerca de cualquiera de los dos equilibrios estables, la ecuación obtenida anteriormente es la de un movimiento armónico simple:

$$\ddot{\delta} + \omega_{\text{swing}}^2 \delta = 0, \quad \omega_{\text{swing}} = \sqrt{3}\Omega.$$

Por tanto,

$$T_{\text{swing}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}}.$$

Utilizando el período orbital dado,

$$T_{\text{swing}} = \frac{5.4 \times 10^3}{\sqrt{3}} \text{ s} \simeq \boxed{3.1 \times 10^3 \text{ s}}.$$

c₁ — Sentido de la corriente inducida

La fuerza magnética sobre una carga positiva que se mueve con la varilla es

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

En la Fig. 1, $\mathbf{v}$ apunta hacia la izquierda y $\mathbf{B}$ sale del plano de la página. Por tanto, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ apunta hacia arriba.

Para $\alpha = 0$, S está situado debajo de A. Por tanto, la fuerza electromotriz de movimiento impulsa las cargas positivas a lo largo de la varilla desde S hacia A:

$$\boxed{\text{La corriente convencional circula de S a A.}}$$

c₂ — Tiempo necesario y sentido del cambio de altitud

La fuente de corriente invierte el sentido de la corriente, de modo que esta circula de A a S, hacia abajo en la figura. La fuerza magnética sobre la varilla es

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B},$$

donde $\boldsymbol{\ell}$ apunta en el sentido de la corriente. El producto vectorial de un vector dirigido hacia abajo por otro que sale del plano de la página apunta hacia la izquierda, en el sentido de la velocidad orbital.

Como la varilla es perpendicular al campo,

$$F = IBL = (0.1)(5.0 \times 10^{-5})(2.0 \times 10^4) = \boxed{0.10 \text{ N}}.$$

Esta fuerza hacia delante aporta energía a la órbita.

Consideremos que el débil empuje produce una variación gradual de una órbita casi circular. La masa total en órbita es aproximadamente la masa dada del transbordador m . Para una órbita circular,

$$v^2 = \frac{\mu}{R},$$

y la energía mecánica total es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{R} = -\frac{\mu m}{2R}.$$

La fuerza magnética suministra una potencia Fv , por lo que

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{\mu m}{2R^2} \frac{dR}{dt}.$$

Sustituyendo $v = \Omega R$ y $\mu = \Omega^2 R^3$,

$$F\Omega R = \frac{m\Omega^2 R}{2} \frac{dR}{dt},$$

se obtiene

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{2F}{m\Omega} = \frac{FT}{\pi m}}.$$

La variación de altitud es igual a la variación del radio orbital. Durante un ascenso de solo 10 m, podemos considerar constantes B , F y T . Así,

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{FT} = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT}.$$

Numéricamente,

$$t = \frac{\pi(1.0 \times 10^5)(10)}{(0.10)(5.4 \times 10^3)} \text{ s} = 5.82 \times 10^3 \text{ s}.$$

Por tanto,

$$\boxed{t \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 97 \text{ min} \simeq 1.6 \text{ h}}.$$

Como la fuerza aumenta la energía orbital, E se hace menos negativa y R aumenta:

La altitud aumenta en 10 m.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: La estrella de neutrones en rotación

Un «púlsar de milisegundos» es una fuente de radiación en el universo que emite pulsos muy breves con un período de uno a varios milisegundos. Esta radiación se encuentra en el intervalo de longitudes de onda de radio; un receptor de radio adecuado permite detectar los pulsos individuales y, de este modo, medir el período con gran precisión.

Estos pulsos de radio se originan en la superficie de un tipo particular de estrella, la denominada estrella de neutrones. Estas estrellas son muy compactas: tienen una masa del mismo orden de magnitud que la del Sol, pero su radio es de tan solo unas decenas de kilómetros. Giran muy rápidamente. Debido a su rápida rotación, una estrella de neutrones está ligeramente achatada (es oblata). Supongamos que la sección axial de su superficie es una elipse con ejes casi iguales. Sean r_p el radio polar y r_e el radio ecuatorial; definamos el factor de achatamiento mediante:

$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}$$

Consideremos una estrella de neutrones con

una masa de	$2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg,}$
un radio medio de	$1.0 \cdot 10^4 \text{ m,}$
y un período de rotación de	$2.0 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

a - Calcule el factor de achatamiento, sabiendo que la constante de gravitación universal es $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

A largo plazo (a lo largo de muchos años), la rotación de la estrella se ralentiza debido a la pérdida de energía, lo que provoca una disminución del achatamiento. Sin embargo, la estrella tiene una corteza sólida que flota sobre un interior líquido. La corteza sólida se resiste a ajustarse de forma continua a la forma de equilibrio. En su lugar, se producen sismos estelares con cambios repentinos en la forma de la corteza hacia el equilibrio. Durante y después de uno de estos sismos estelares, se observa que la velocidad angular cambia según la figura 1.

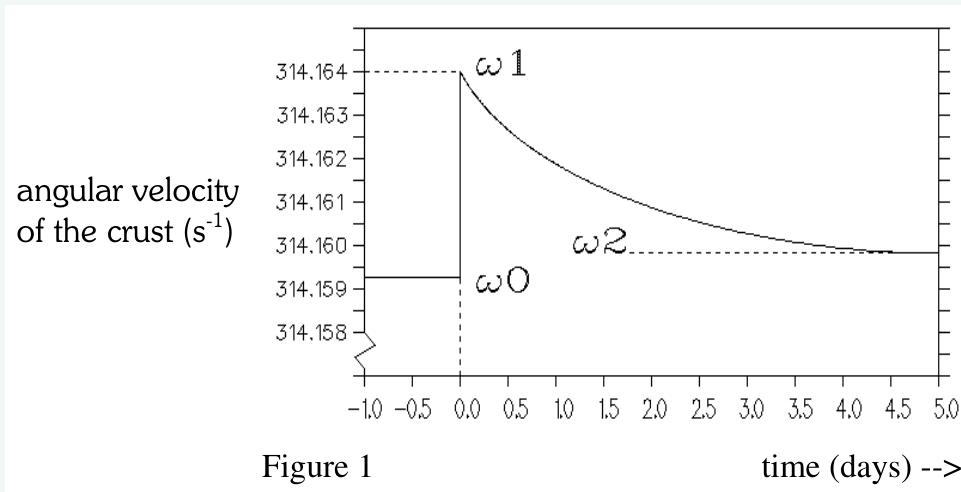


Figure 1

time (days) -->

Un cambio repentino en la forma de la corteza de una estrella de neutrones produce un cambio repentino de la velocidad angular.

b - Calcule el radio medio del interior líquido utilizando los datos de la Fig. 1. Utilice la aproximación de que las densidades de la corteza y del interior son iguales. (Ignore el cambio de forma del interior).

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a. En la aproximación de campo gravitatorio esférico,

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}$$

(adimensional).

- b. El radio medio del interior líquido es aproximadamente

$$r_{\text{liquid}} \simeq 9.7 \times 10^3 \text{ m} = 9.7 \text{ km}.$$

Solución

a. Factor de achatamiento

Sean M , R y T la masa, el radio medio y el período de rotación. La velocidad angular es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0 \times 10^{-2}} \simeq 314.16 \text{ s}^{-1}.$$

Para determinar la forma de equilibrio, modelamos la estrella como un fluido en rotación y aproximamos su potencial gravitatorio mediante la expresión esférica $-GM/r$. En el sistema de referencia que gira con la estrella, el potencial efectivo por unidad de masa es

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2,$$

donde s es la distancia al eje de rotación.

La superficie de equilibrio es equipotencial: de lo contrario, la materia fluiría a lo largo de ella. En el polo, $s = 0$, mientras que en el ecuador, $s = r_e$. Por tanto,

$$-\frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

o bien

$$GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2.$$

Utilizando la definición de ϵ ,

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e} = \frac{\epsilon}{r_e},$$

de modo que

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

Como el achatamiento es pequeño, podemos sustituir r_e por el radio medio R en esta expresión:

$$\epsilon \simeq \frac{\omega^2 R^3}{2GM} = \frac{2\pi^2 R^3}{GMT^2}.$$

Numéricamente,

$$\epsilon \simeq \frac{2\pi^2(1.0 \times 10^4)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(2.0 \times 10^{-2})^2} = 3.699 \times 10^{-4}.$$

Así pues,

$$\boxed{\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}}.$$

Esto corresponde a $r_e - r_p \simeq \epsilon R \simeq 3.7 \text{ m}$, lo que concuerda con que los radios sean casi iguales.

b. Radio del interior líquido

Antes del sismo, suponemos que la corteza y el interior líquido giran juntos con velocidad angular ω_0 . Durante la deformación repentina, el momento de inercia de la corteza disminuye. No hay tiempo suficiente para que se produzca una transferencia apreciable de momento angular al líquido, por lo que la corteza aumenta su velocidad angular hasta ω_1 , mientras que el líquido permanece inicialmente a ω_0 .

Durante los días siguientes, la fricción interna transfiere momento angular de la corteza al líquido hasta que ambos giran a ω_2 . La pérdida de momento angular hacia el exterior es despreciable durante este intervalo en comparación con la evolución secular a lo largo de los años.

Sea I_c el momento de inercia de la corteza después del sismo e I_l el del líquido. El momento de inercia del líquido no cambia, tal como se estipula. La conservación del momento angular durante la relajación da

$$I_c\omega_1 + I_l\omega_0 = (I_c + I_l)\omega_2.$$

Reordenando,

$$I_c(\omega_1 - \omega_2) = I_l(\omega_2 - \omega_0).$$

En consecuencia,

$$\boxed{\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0}}.$$

La magnitud conservada que se requiere es el momento angular; la energía cinética de rotación se disipa durante la relajación.

Para relacionar los momentos de inercia con los radios, despreciamos el pequeño achatamiento y utilizamos la densidad común ρ especificada en el enunciado. Una capa esférica de radio r y espesor dr tiene

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm.$$

Así, una esfera homogénea de radio a tiene

$$I(a) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} a^5.$$

Denotando el radio del líquido por r_l , obtenemos

$$\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{r_l^5}{R^5}.$$

Por tanto,

$$r_l = R \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0} \right)^{1/5}.$$

Las lecturas aproximadas de la gráfica son

$$\omega_0 \simeq 314.1593 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 \simeq 314.1640 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 \simeq 314.1599 \text{ s}^{-1}.$$

Estos valores dan

$$\left(\frac{r_l}{R} \right)^5 \simeq \frac{0.0041}{0.0047} \simeq 0.872,$$

y, por consiguiente,

$$r_l \simeq (1.0 \times 10^4)(0.872)^{1/5} \simeq 9.73 \times 10^3 \text{ m}.$$

Con una precisión razonable,

$$r_l \simeq 9.7 \text{ km}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.