

IPhO 1990

Theorieaufgaben und Lösungen · Groningen, Niederlande · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1990/

Aufgabe 1: Röntgenbeugung an einem Kristall

Wir wollen die Beugung von Röntgenstrahlung an einem kubischen Kristallgitter untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst die Beugung einer ebenen, monochromatischen Welle, die senkrecht auf ein zweidimensionales Gitter fällt, das aus $N_1 \times N_2$ Spalten mit den Abständen d_1 und d_2 besteht. Das Beugungsbild wird auf einem Schirm im Abstand L vom Gitter beobachtet. Der Schirm ist parallel zum Gitter, und L ist wesentlich größer als d_1 und d_2 .

a - Bestimmen Sie die Positionen und Breiten der Hauptmaxima auf dem Schirm. Die Breite ist als Abstand zwischen den Minima auf beiden Seiten eines Maximums definiert.

Wir betrachten nun einen kubischen Kristall mit der Gitterkonstanten a und den Abmessungen $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$. N_1 ist wesentlich kleiner als N_0 . Der Kristall wird unter einem Winkel Θ in ein paralleles Röntgenstrahlenbündel entlang der z-Achse gebracht (siehe Abb. 1). Das Beugungsbild wird wiederum auf einem Schirm in großer Entfernung vom Kristall beobachtet.

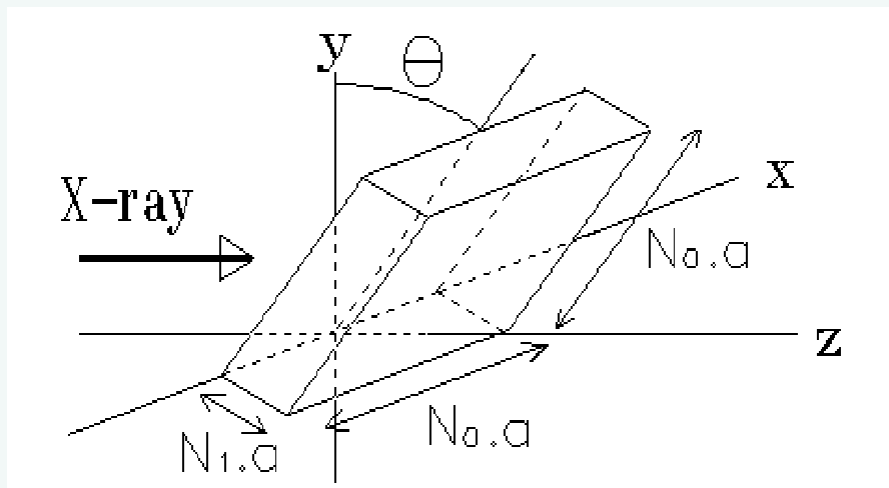


Abbildung 1 Beugung eines parallelen Röntgenstrahlenbündels entlang der z-Achse. Der Winkel zwischen dem Kristall und der y-Achse beträgt Θ .

b - Berechnen Sie die Positionen und Breiten der Maxima als Funktion des Winkels Θ (für kleine Θ).

- Welche Folgen hat insbesondere die Tatsache, dass $N_1 \ll N_0$ gilt?

Das Beugungsbild lässt sich auch mithilfe der Braggschen Theorie herleiten, in der angenommen wird, dass die Röntgenstrahlen an den Netzebenen des Gitters reflektiert werden. Das Beugungsbild entsteht dann durch die Interferenz dieser reflektierten Strahlen miteinander.

c - Zeigen Sie, dass diese sogenannte Bragg-Reflexion dieselben Bedingungen für die Maxima liefert wie die von Ihnen in b gefundenen.

Bei einigen Messungen wird die sogenannte Pulvermethode verwendet. Ein Röntgenstrahlenbündel wird an einem Pulver aus sehr vielen kleinen Kristallen gestreut. (Natürlich sind die Abmessungen der Kristalle wesentlich größer als die Gitterkonstante a .)

Die Streuung von Röntgenstrahlung der Wellenlänge 0.15 nm an Kaliumchlorid [KCl] (das ein kubisches Gitter besitzt, siehe Abb. 2) erzeugt konzentrische dunkle Kreise auf einer Fotoplate. Der Abstand zwischen den Kristallen und der Platte beträgt 0.10 m , und der Radius des kleinsten Kreises beträgt 0.053 m (siehe Abb. 3). K^+ - und Cl^- -Ionen sind nahezu gleich groß und können als identische Streuzentren behandelt werden.

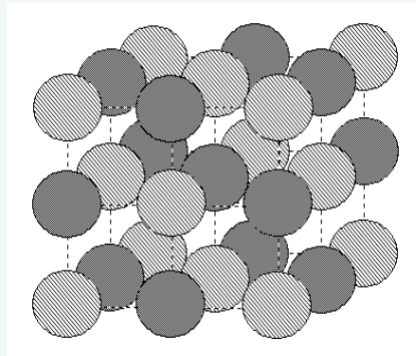


Abbildung 2. Das kubische Gitter von Kaliumchlorid, in dem die K^+ - und Cl^- -Ionen nahezu gleich groß sind.

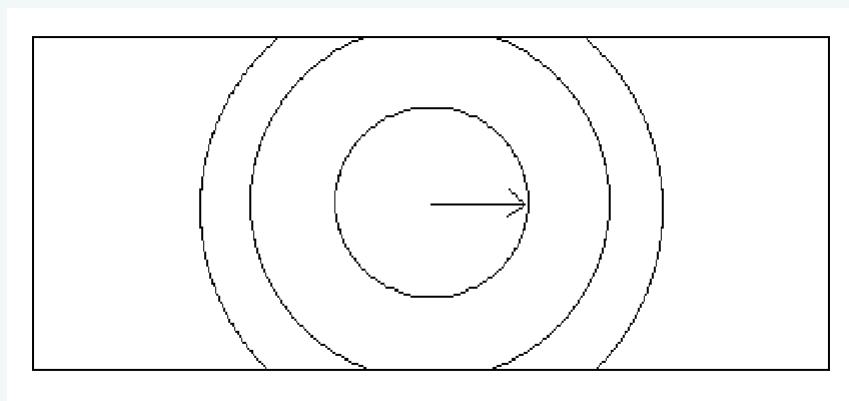


Abbildung 3. Die Streuung von Röntgenstrahlung an einem Pulver aus KCl-Kristallen erzeugt konzentrische dunkle Kreise auf einer Fotoplate.

d - Berechnen Sie den Abstand zwischen zwei benachbarten K-Ionen im Kristall.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Mit λ bezeichnen wir die Wellenlänge. Die Schirmkoordinaten X, Y werden vom unabgelenkten Strahl aus gemessen; beim Kristall bezeichnet L den Abstand zwischen Kristall und Schirm.

- **a.** Für ganze Zahlen m, n setzen wir

$$u_m = \frac{m\lambda}{d_1}, \quad v_n = \frac{n\lambda}{d_2}.$$

Die Hauptmaxima liegen bei

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

Ihre vollen Breiten zwischen den ersten Nullstellen betragen in Richtungskosinus

$$\Delta u = \frac{2\lambda}{N_1 d_1}, \quad \Delta v = \frac{2\lambda}{N_2 d_2}.$$

Für kleine Beugungswinkel ergibt sich daraus

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2}, \quad W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

- **b.** Wir schreiben $r = \lambda/a$, und h, k, ℓ seien ganzzahlige Beugungsindizes. Wir definieren

$$B = k \sin \Theta + \ell \cos \Theta, \quad C = k \cos \Theta - \ell \sin \Theta.$$

Maxima mit vollständig konstruktiver Interferenz erfüllen

$$2B + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0$$

und erscheinen bei

$$(X, Y) = \frac{Lr(h, C)}{1 + rB}.$$

Für kleine Θ verwenden wir $B \simeq k\Theta + \ell$ und $C \simeq k - \ell\Theta$.

Bei Vorwärtsbeugung unter kleinen Streuwinkeln haben die scharfen Reflexe die Positionen und Breiten

$$(X, Y) \simeq Lr(h, k), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

Ihr durch die Dicke bestimmter Interferenzfaktor ist maximal, wenn

$$-k\Theta - \frac{\lambda}{2a}(h^2 + k^2) = \ell,$$

wobei die benachbarten Nullstellen dort liegen, wo die linke Seite gleich $\ell \pm 1/N_1$ ist. Somit führt $N_1 \ll N_0$ zu schmalen Reflexen mit einer wesentlich breiteren Anregungsbedingung. Für $k \neq 0$ beträgt die entsprechende volle Breite bezüglich des Neigungswinkels näherungsweise

$$\Delta\Theta = \frac{2}{N_1 |k|}.$$

- **c.** Die Braggsche Bedingung

$$2d \sin \theta_B = p\lambda$$

ist äquivalent zu den Gitterinterferenzbedingungen aus **b.** Insbesondere ergibt die Reflexion an Ebenen senkrecht zur geneigten langen Kristallachse

$$2a \sin \Theta = p\lambda, \quad X = 0, \quad Y = -L \tan(2\Theta)$$

für die unten gewählte Orientierung.

- **d.** Der Abstand zwischen nächstbenachbarten Kaliumionen beträgt

$$d_{K-K} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.44 \text{ nm.}$$

Lösung

Wir verwenden kohärente, elastische Streuung in der Fernfeld- oder Fraunhofer-Näherung. Die Spalte und Gitterplätze werden als identische Strahler behandelt; die Beugungseinhüllende der einzelnen Strahler wird weggelassen.

Ein nützliches Ergebnis für N äquidistante Strahler mit der Phasendifferenz $2\pi t$ lautet

$$F_N(t) = \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j t} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\pi t)}{\sin^2(\pi t)}.$$

Bei einem ganzzahligen $t = m$ beträgt der Grenzwert N^2 : Alle Beiträge sind phasengleich. Für $N > 1$ liegen die nächstgelegenen Nullstellen bei

$$t = m \pm \frac{1}{N}.$$

a. Beugung am zweidimensionalen Gitter

Wir legen die Gitterachsen entlang x, y , wobei die einfallende Welle entlang z läuft. Ein auslaufender Strahl hat den Einheitsrichtungsvektor

$$\mathbf{s} = (u, v, w), \quad w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0.$$

Die Phase der einfallenden Welle ist an jedem Spalt gleich. Die Gangunterschiede der auslaufenden Wellen zwischen benachbarten Spalten betragen $d_1 u$ und $d_2 v$. Daher gilt

$$I(u, v) \propto F_{N_1} \left(\frac{d_1 u}{\lambda} \right) F_{N_2} \left(\frac{d_2 v}{\lambda} \right).$$

Beide Faktoren erreichen ihre Hauptmaxima, wenn

$$d_1 u = m\lambda, \quad d_2 v = n\lambda.$$

Nur Ordnungen, die $u_m^2 + v_n^2 < 1$ erfüllen, erreichen einen Schirm im vorwärts gerichteten Halbraum.

Ein Strahl in Richtung $\mathbf{s}$ schneidet die Ebene $z = L$ bei

$$X = L \frac{u}{w}, \quad Y = L \frac{v}{w}.$$

Daher gilt

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

Die nächstgelegenen Nullstellenlinien sind

$$u = u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, \quad v = v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}.$$

Diese Gleichungen legen zusammen mit der obigen Abbildung auf den Schirm die Begrenzungen durch die ersten Nullstellen ohne Kleinwinkelnäherung fest.

Wir definieren beispielsweise

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{L(u, v)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

Die beiden Paare von Punkten der ersten Nullstellen entlang der natürlichen Gitterkoordinaten sind

$$\mathbf{R}\left(u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, v_n\right), \quad \mathbf{R}\left(u_m, v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}\right).$$

Ihre jeweiligen Abstände ergeben die entsprechenden Breiten auf dem Schirm.

Für kleine Beugungswinkel gilt $u, v \ll 1$, also $X \simeq Lu, Y \simeq Lv$. Somit gilt

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2},$$

und

$$W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

b. Beugung am geneigten endlichen Kristall

Wir wählen die Einheitsvektoren des Kristalls als

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}} \cos \Theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \Theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \Theta.$$

Die beiden langen Abmessungen liegen entlang $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; die geringe Dicke liegt entlang $\mathbf{e}_3$. Dabei entspricht ein positives Θ einer Neigung der langen Kristallachse von $+y$ in Richtung $+z$.

Die einfallenden und auslaufenden Wellenvektoren sind

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}_f = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}.$$

Wir definieren den Streuvektor

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

Anders als beim Gitter in **a** haben Atome in unterschiedlichen Tiefen auch unterschiedliche Phasen der einfallenden Welle. Sowohl die einfallende als auch die auslaufende Ausbreitung wird durch $\mathbf{q}$ berücksichtigt. Wir definieren

$$p_i = \frac{a}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Explizit gilt

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{a}{\lambda} s_x, \\
p_2 &= \frac{a}{\lambda} [s_y \cos \Theta + (s_z - 1) \sin \Theta], \\
p_3 &= \frac{a}{\lambda} [-s_y \sin \Theta + (s_z - 1) \cos \Theta].
\end{aligned}$$

Das vollständige Interferenzbild des endlichen Gitters ist daher

$$I(\mathbf{s}) \propto F_{N_0}(p_1) F_{N_0}(p_2) F_{N_1}(p_3).$$

Ein Maximum mit vollständig konstruktiver Interferenz erfordert

$$p_1 = h, \quad p_2 = k, \quad p_3 = \ell,$$

wobei h, k, ℓ ganze Zahlen sind. Gleichwertig dazu gilt

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3).$$

Mit $r = \lambda/a$ lautet die auslaufende Richtung

$$\begin{aligned}
s_x &= rh, \\
s_y &= r(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta), \\
s_z &= 1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta).
\end{aligned}$$

Elastische Streuung erfordert $|\mathbf{s}| = 1$. Einsetzen ergibt

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

Für jede zulässige Vorwärtsordnung ist die Position auf dem Schirm

$$X = \frac{Lrh}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}, \quad Y = \frac{Lr(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}.$$

Diese Formeln berücksichtigen die exakte Geometrie des auslaufenden Strahls. Für eine kleine Kristallneigung gilt

$$2(k\Theta + \ell) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) \simeq 0,$$

und

$$X \simeq \frac{Lrh}{1 + r(\ell + k\Theta)}, \quad Y \simeq \frac{Lr(k - \ell\Theta)}{1 + r(\ell + k\Theta)}.$$

Die ersten Nullstellen um ein Maximum mit vollständig konstruktiver Interferenz liegen auf

$$p_1 = h \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_2 = k \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_3 = \ell \pm \frac{1}{N_1}.$$

Somit betragen die vollen Breiten in den Komponenten des Streuvektors

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \frac{4\pi}{N_0 a}, \quad \Delta q_3 = \frac{4\pi}{N_1 a}.$$

Da $N_1 \ll N_0$, bilden die ersten beiden Faktoren schmale Maxima, während der dritte Faktor eine vergleichsweise breite Einhüllende liefert. Daher kann ein scharfer Reflex sichtbar bleiben, auch wenn p_3 nicht genau ganzzahlig ist.

Der Vollständigkeit halber lässt sich die Position eines solchen Reflexes bestimmen, ohne exakt konstruktive dreidimensionale Interferenz zu fordern. Wir setzen $p_1 = h$, $p_2 = k$. Auf dem vorwärts gerichteten Zweig ist

$$\zeta_{hk}(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - r^2 h^2 - (\sin \Theta + rk)^2} - \cos \Theta}{r}$$

der resultierende Wert von p_3 . Seine Position ist

$$\mathcal{R}_\Theta(h, k) = \frac{Lr(h, k \cos \Theta - \zeta_{hk} \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \zeta_{hk} \cos \Theta)}.$$

Seine Intensität enthält den Faktor $F_{N_1}(\zeta_{hk})$. Maxima mit vollständig konstruktiver Interferenz treten auf, wenn ζ_{hk} ganzzahlig ist.

Für einen stark angeregten Reflex erhält man die beiden Paare von Punkten der ersten Nullstellen aus dieser Abbildung durch

$$h \longrightarrow h \pm \frac{1}{N_0}, \quad \text{oder} \quad k \longrightarrow k \pm \frac{1}{N_0}.$$

Ihre Abstände ergeben die Breiten auf dem Schirm einschließlich der Abhängigkeit von Θ .

Die Kleinwinkelform macht die physikalischen Folgen besonders deutlich. Wir setzen

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{Y}{L}, \quad \mathbf{s} \simeq \left(\alpha, \beta, 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

Für kleine Θ, α, β gilt

$$p_1 \simeq \frac{\alpha}{r}, \quad p_2 \simeq \frac{\beta}{r}, \quad p_3 \simeq -\frac{\Theta\beta + (\alpha^2 + \beta^2)/2}{r}.$$

Der quadratische Winkelterm muss in p_3 beibehalten werden, da er den führenden longitudinalen Gangunterschied darstellt.

Die schmalen transversalen Maxima treten daher bei

$$\alpha_h \simeq hr, \quad \beta_k \simeq kr,$$

mit den vollen Breiten

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\beta \simeq \frac{2r}{N_0}.$$

Somit gilt

$$(X, Y) \simeq \left(\frac{h\lambda L}{a}, \frac{k\lambda L}{a} \right), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

An diesen Positionen gilt

$$p_3 \simeq -k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2).$$

Somit tritt ein Maximum der durch die Dicke bestimmten Einhüllenden auf, wenn

$$-k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2) = \ell,$$

und seine benachbarten Nullstellen liegen bei $\ell \pm 1/N_1$.

Für die zentrale Dickenordnung $\ell = 0$ erfüllen die stärksten Reflexe

$$h^2 + \left(k + \frac{\Theta}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Theta}{r}\right)^2.$$

Die endliche Dicke verbreitert diesen Kreis zu einem Band merklich angeregter Gitterreflexe.

Für $k \neq 0$ ändert eine Variation des Neigungswinkels p_3 mit der Rate

$$\frac{dp_3}{d\Theta} \simeq -k.$$

Die volle Breite zwischen den ersten Nullstellen bezüglich des Neigungswinkels beträgt daher

$$\Delta\Theta \simeq \frac{2}{N_1|k|}.$$

Die beiden großen Abmessungen bestimmen die geringen Reflexbreiten. Die geringe Dicke führt zu einer breiteren Interferenzeinhüllenden und einem breiteren Bereich von Kristallorientierungen, in dem ein Reflex merklich angeregt wird.

c. Äquivalenz mit der Bragg-Reflexion

Wir betrachten eine Schar von Netzebenen mit teilerfremden ganzzahligen Indizes (H, K, M) . Ihr Einheitsnormalenvektor und ihr Abstand sind

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}.$$

Es sei θ_B der Glanzwinkel zwischen dem einfallenden Strahl und diesen Ebenen. An aufeinanderfolgenden Ebenen reflektierte Strahlen haben den Gangunterschied

$$2d \sin \theta_B.$$

Konstruktive Interferenz erfordert

$$2d \sin \theta_B = p\lambda, \quad p = 1, 2, \dots$$

Spiegelnde Reflexion ändert nur die Komponente des Wellenvektors senkrecht zu den Ebenen. Daher steht $\mathbf{q}$ senkrecht auf ihnen und hat den Betrag

$$|\mathbf{q}| = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_B.$$

Mit der Braggschen Bedingung gilt

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\pi p}{d}.$$

Bei geeigneter Wahl der Normalenrichtung gilt

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi p}{a} (H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3).$$

Die Setzung

$$(h, k, \ell) = p(H, K, M)$$

ergibt genau

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3),$$

also die drei in **b** hergeleiteten Gitterinterferenzbedingungen. Die Forderung nach gleichen einfallenden und auslaufenden Wellenlängen ergibt dann dieselbe Bedingung

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + \frac{\lambda}{a}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

Als direktes Beispiel betrachten wir Ebenen senkrecht zu $\mathbf{e}_2$. Ihr Abstand beträgt a , und ihr Glanzwinkel ist Θ . Das Braggsche Gesetz ergibt

$$2a \sin \Theta = p\lambda.$$

In **b** wählen wir $h = 0$, $k = -p$, $\ell = 0$. Die Bedingung wird zu

$$-2p \sin \Theta + \frac{\lambda}{a}p^2 = 0,$$

was dieselbe Bedingung ist. Der auslaufende Strahl hat die Richtung

$$\mathbf{s} = (0, -\sin 2\Theta, \cos 2\Theta),$$

also gilt

$$X = 0, \quad Y = -L \tan 2\Theta.$$

d. Abstand nächstbenachbarter Kaliumionen

Wenn K^+ und Cl^- identisch streuen, wirkt die abwechselnde Ionenanordnung wie ein einfach kubisches Gitter identischer Streuzentren.

Mit b bezeichnen wir den Abstand zwischen nächstbenachbarten K- und Cl-Ionen. Die effektive Gitterkonstante des einfach kubischen Gitters beträgt b . Sein größter Abstand reflektierender Netzebenen ist b , sodass der kleinste von null verschiedene Beugungswinkel von einer Reflexion erster Ordnung herrührt, für die gilt

$$2b \sin \theta_B = \lambda.$$

Zufällige Kristallorientierungen erzeugen einen Kegel gestreuter Strahlen mit dem Streuwinkel $2\theta_B$. Eine senkrecht zum einfallenden Strahl stehende Fotoplatte zeichnet daher einen Ring mit folgendem Radius auf:

$$R = L \tan(2\theta_B).$$

Mit den gegebenen Daten gilt

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{0.053}{0.10}\right) = 27.9236^\circ,$$

und somit

$$\theta_B = 13.9618^\circ.$$

Hier ist keine Kleinwinkelnäherung erforderlich.

Somit gilt

$$b = \frac{0.15 \text{ nm}}{2 \sin 13.9618^\circ} = 0.31085 \text{ nm}.$$

Die Ionensorten wechseln sich entlang jeder Achse des einfach kubischen Gitters ab. Zwei nächstbenachbarte Kaliumionen liegen daher an den Enden einer Flächendiagonalen eines Würfels der Kantenlänge b , woraus folgt

$$d_{\text{K-K}} = \sqrt{2}b = \sqrt{2}(0.31085 \text{ nm}) = 0.43961 \text{ nm}.$$

Auf zwei signifikante Stellen gerundet ergibt sich

$$d_{K-K} = 0.44 \text{ nm} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m.}$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Elektrische Experimente in der Magnetosphäre der Erde

Im Mai 1991 wird das Raumschiff Atlantis in eine Umlaufbahn um die Erde gebracht werden. Wir nehmen an, dass diese Umlaufbahn kreisförmig ist und in der Äquatorebene der Erde liegt.

Zu einem vorher festgelegten Zeitpunkt wird das Raumschiff einen Satelliten S aussetzen, der an einem leitenden Stab der Länge L befestigt ist. Wir nehmen an, dass der Stab starr ist, eine vernachlässigbare Masse hat und mit einem elektrischen Isolator überzogen ist. Außerdem vernachlässigen wir jegliche Reibung. Es sei α der Winkel, den der Stab mit der Verbindungslinie zwischen Atlantis und dem Erdmittelpunkt bildet. (Siehe Abb. 1.)

S befindet sich ebenfalls in der Äquatorebene.

Nehmen Sie an, dass die Masse des Satelliten viel kleiner als die der Atlantis ist und dass L viel kleiner als der Radius der Umlaufbahn ist.

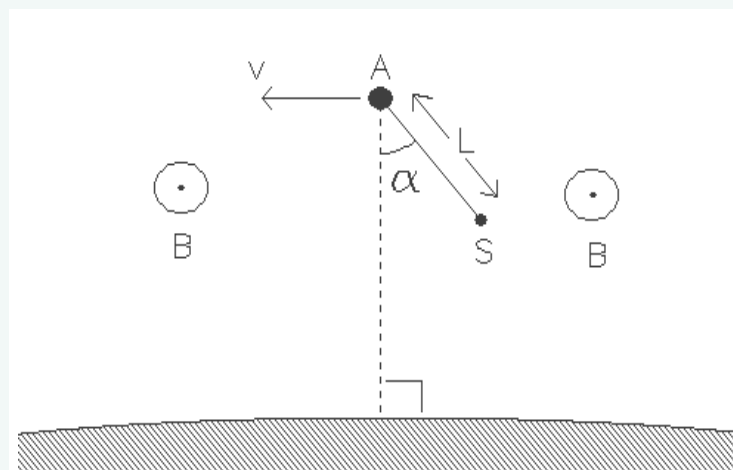


Abbildung 1 Das Raumschiff Atlantis (A) mit einem Satelliten (S) auf einer Umlaufbahn um die Erde. Die Umlaufbahn liegt in der Äquatorebene der Erde. Das Magnetfeld (B) steht senkrecht zur Zeichenebene und ist auf den Leser zu gerichtet.

a₁ - Leiten Sie her, für welche Werte von α die Anordnung von Raumschiff und Satellit (bezüglich der Erde) unverändert bleibt. Mit anderen Worten: Für welche Werte von α ist α konstant?

a₂ - Untersuchen Sie für jeden Fall die Stabilität des Gleichgewichts.

Nehmen Sie an, dass der Stab zu einem bestimmten Zeitpunkt um einen kleinen Winkel von der stabilen Anordnung abweicht. Das System beginnt dann wie ein Pendel zu schwingen.

b - Drücken Sie die Schwingungsdauer durch die Umlaufdauer des Systems um die Erde aus.

In Abb. 1 steht das Magnetfeld der Erde senkrecht zur Zeichenebene und ist auf den Leser zu gerichtet. Aufgrund der Bahngeschwindigkeit des Stabes entsteht zwischen seinen Enden eine Potentialdifferenz. Die Umgebung (die Magnetosphäre) ist ein verdünntes, ionisiertes Gas mit sehr

guter elektrischer Leitfähigkeit. Der Kontakt mit dem ionisierten Gas wird durch Elektroden in A (Atlantis) und S (Satellit) hergestellt. Infolge der Bewegung fließt ein Strom I durch den Stab.

c₁ - In welche Richtung fließt der Strom durch den Stab? (Setzen Sie $\alpha = 0$.)

Gegebene Werte:

- Umlaufdauer	$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$
- Länge des Stabes	$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$
- magnetische Flussdichte der Erde in der Höhe des Satelliten	$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$
- Masse der Raumfähre Atlantis	$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$

Nun wird eine Stromquelle im Inneren der Raumfähre in den Stromkreis eingefügt, die einen resultierenden Gleichstrom von 0.1 A in entgegengesetzter Richtung aufrechterhält.

c₂ - Wie lange muss dieser Strom aufrechterhalten werden, um die Höhe der Umlaufbahn um 10 m zu verändern?

Nehmen Sie an, dass α null bleibt. Vernachlässigen Sie alle Beiträge von Strömen in der Magnetosphäre.

- Nimmt die Höhe ab oder zu?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a₁:** Der Stab muss **radial oder tangential** ausgerichtet sein. In führender Ordnung in L/R sind die gerichteten Winkel

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- **a₂:** Die radialen Gleichgewichtslagen $\alpha = 0, \pi$ sind **stabil**. Die tangentialen Gleichgewichtslagen $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ sind **instabil**.
- **b:** Die Schwingungsdauer bei kleinen Auslenkungen ist

$$T_{\text{swing}} = \frac{T}{\sqrt{3}} \simeq 3.1 \times 10^3 \text{ s}.$$

- **c₁:** Der Strom fließt in technischer Stromrichtung **vom Satelliten S zur Atlantis A**.
- **c₂:** Die Höhe **nimmt zu**, und die erforderliche Zeit beträgt in der Näherung einer Kreisbahn

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT} \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

Lösung

a₁ — Gleichgewichtsausrichtungen

Es seien R der Bahnradius der Atlantis, $\mu = GM_E$ und

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Da Atlantis einer Kreisbahn folgt, gilt

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3}.$$

Wegen der viel kleineren Masse des Satelliten können wir seinen Einfluss auf die Bewegung der Atlantis vernachlässigen.

Wir verwenden ein Bezugssystem mit Ursprung in Atlantis, das mit der Umlaufbewegung rotiert. Dabei zeige $\mathbf{e}_x$ zum Erdmittelpunkt und $\mathbf{e}_y$ in Abb. 1 nach rechts. Der Ortsvektor des Satelliten relativ zur Atlantis ist

$$\boldsymbol{\rho} = L \cos \alpha \mathbf{e}_x + L \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

Für eine allgemeine kleine Verschiebung $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ ergibt die Entwicklung des Gravitationsfeldes der Erde bis zur ersten Ordnung in L/R

$$\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_A = \frac{\mu}{R^3} (2x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

Die zusätzliche Zentrifugalbeschleunigung ist

$$\Omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y).$$

Ihre Summe ist daher

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = 3\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

Der Einheitsvektor senkrecht zum Stab in Richtung zunehmenden α ist

$$\mathbf{e}_\alpha = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y.$$

Die vom Stab ausgeübte Kraft wirkt entlang des Stabes. Auch die Corioliskraft wirkt entlang des Stabes, da die Relativgeschwindigkeit $L\dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ senkrecht zu ihm steht. Keine der beiden Kräfte trägt zur tangentialen Bewegungsgleichung bei.

Folglich gilt

$$L\ddot{\alpha} = \mathbf{a}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -3\Omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha,$$

oder

$$\boxed{\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0}.$$

Ein konstanter Winkel erfordert

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

also

$$\boxed{\alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}}.$$

Der Stab ist somit entweder radial oder tangential ausgerichtet. Diese Winkel gelten in der angegebenen Näherung $L \ll R$.

a₂ — Stabilität

Wir setzen

$$\alpha = \alpha_0 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

wobei α_0 ein Gleichgewichtswinkel ist. Die Linearisierung der Bewegungsgleichung ergibt

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \cos(2\alpha_0) \delta = 0.$$

Für die radialen Anordnungen $\alpha_0 = 0, \pi$ gilt

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \delta = 0.$$

Die Beschleunigung führt den Stab zur Gleichgewichtslage zurück, daher sind beide radialen Anordnungen **stabil**.

Für die tangentialen Anordnungen $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$ gilt

$$\ddot{\delta} - 3\Omega^2 \delta = 0.$$

Diese Gleichung lässt eine exponentiell anwachsende Auslenkung zu,

$$\delta \propto e^{\sqrt{3}\Omega t},$$

also sind beide tangentialen Anordnungen **instabil**.

b — Schwingungsdauer kleiner Schwingungen

In der Nähe jeder der beiden stabilen Gleichgewichtslagen ist die oben gefundene Gleichung die einer harmonischen Schwingung:

$$\ddot{\delta} + \omega_{\text{swing}}^2 \delta = 0, \quad \omega_{\text{swing}} = \sqrt{3}\Omega.$$

Daher gilt

$$T_{\text{swing}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}}.$$

Mit der gegebenen Umlaufdauer ergibt sich

$$T_{\text{swing}} = \frac{5.4 \times 10^3}{\sqrt{3}} \text{ s} \simeq \boxed{3.1 \times 10^3 \text{ s}}.$$

c₁ — Richtung des induzierten Stroms

Die magnetische Kraft auf eine positive Ladung, die sich mit dem Stab bewegt, ist

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

In Abb. 1 zeigt $\mathbf{v}$ nach links und $\mathbf{B}$ aus der Zeichenebene heraus. Daher zeigt $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ nach oben.

Für $\alpha = 0$ liegt S unterhalb von A. Die Bewegungsinduktionsspannung treibt daher positive Ladungen entlang des Stabes von S nach A:

Der Strom fließt in technischer Stromrichtung von S nach A.

c₂ — Erforderliche Zeit und Richtung der Höhenänderung

Die Stromquelle kehrt den Strom um, sodass er von A nach S fließt, in der Abbildung nach unten. Die magnetische Kraft auf den Stab ist

$$\mathbf{F} = I \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B},$$

wobei $\boldsymbol{\ell}$ in Stromrichtung zeigt. Das Kreuzprodukt eines nach unten gerichteten Vektors mit einem aus der Zeichenebene heraus gerichteten Vektor zeigt nach links, in Richtung der Bahngeschwindigkeit.

Da der Stab senkrecht zum Feld steht, gilt

$$F = IBL = (0.1)(5.0 \times 10^{-5})(2.0 \times 10^4) = \boxed{0.10 \text{ N}}.$$

Diese vorwärts gerichtete Kraft führt der Bahnbewegung Energie zu.

Wir betrachten den schwachen Schub als Ursache einer allmählichen Änderung einer nahezu kreisförmigen Umlaufbahn. Die gesamte umlaufende Masse entspricht näherungsweise der gegebenen Masse m der Raumfähre. Für eine Kreisbahn gilt

$$v^2 = \frac{\mu}{R},$$

und die gesamte mechanische Energie ist

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{R} = -\frac{\mu m}{2R}.$$

Die magnetische Kraft führt die Leistung Fv zu, also gilt

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{\mu m}{2R^2} \frac{dR}{dt}.$$

Durch Einsetzen von $v = \Omega R$ und $\mu = \Omega^2 R^3$ ergibt sich

$$F\Omega R = \frac{m\Omega^2 R}{2} \frac{dR}{dt},$$

woraus folgt

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{2F}{m\Omega} = \frac{FT}{\pi m}}.$$

Die Höhenänderung ist gleich der Änderung des Bahnradius. Bei einem Anstieg um nur 10 m können wir B , F und T als konstant behandeln. Somit gilt

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{FT} = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT}.$$

Numerisch ergibt sich

$$t = \frac{\pi(1.0 \times 10^5)(10)}{(0.10)(5.4 \times 10^3)} \text{ s} = 5.82 \times 10^3 \text{ s}.$$

Damit gilt

$$\boxed{t \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 97 \text{ min} \simeq 1.6 \text{ h}}.$$

Da die Kraft der Bahnbewegung Energie zuführt, wird E weniger negativ und R nimmt zu:

$$\boxed{\text{Die Höhe steigt um 10 m.}}$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Der rotierende Neutronenstern

Ein „Millisekundenpulsar“ ist eine Strahlungsquelle im Universum, die sehr kurze Pulse mit einer Periodendauer von einer bis mehreren Millisekunden aussendet. Diese Strahlung liegt im Radiowellenbereich; mit einem geeigneten Radioempfänger lassen sich die einzelnen Pulse nachweisen und dadurch die Periodendauer mit großer Genauigkeit messen.

Diese Radiopulse stammen von der Oberfläche einer besonderen Art von Stern, dem sogenannten Neutronenstern. Diese Sterne sind sehr kompakt: Ihre Masse hat dieselbe Größenordnung wie die der Sonne, ihr Radius beträgt jedoch nur einige zehn Kilometer. Sie rotieren sehr schnell. Aufgrund der schnellen Rotation ist ein Neutronenstern leicht abgeplattet. Nehmen Sie an, dass der Schnitt durch die Oberfläche in einer Ebene durch die Rotationsachse eine Ellipse mit nahezu gleichen Achsen ist. Es seien r_p der Polradius und r_e der Äquatorradius; wir definieren den Abplattungsfaktor durch:

$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}$$

Betrachten Sie einen Neutronenstern mit

einer Masse von	$2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg,}$
einem mittleren Radius von	$1.0 \cdot 10^4 \text{ m,}$
und einer Rotationsperiode von	$2.0 \cdot 10^{-2} \text{ s.}$

a - Berechnen Sie den Abplattungsfaktor, wenn die Gravitationskonstante $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ beträgt.

Auf lange Sicht (über viele Jahre) verlangsamt sich die Rotation des Sterns durch Energieverlust, wodurch die Abplattung abnimmt. Der Stern besitzt jedoch eine feste Kruste, die auf einem flüssigen Inneren schwimmt. Die feste Kruste widersetzt sich einer kontinuierlichen Anpassung an die Gleichgewichtsform. Stattdessen treten Sternbeben auf, bei denen sich die Form der Kruste plötzlich in Richtung der Gleichgewichtsform verändert. Während und nach einem solchen Sternbeben wird eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit gemäß Abbildung 1 beobachtet.

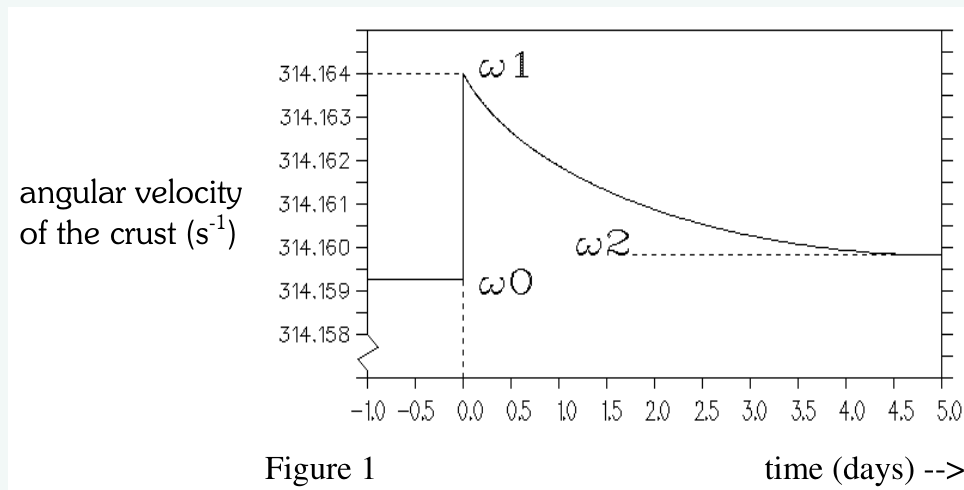


Figure 1

Eine plötzliche Änderung der Form der Kruste eines Neutronensterns führt zu einer plötzlichen Änderung der Winkelgeschwindigkeit.

b - Berechnen Sie anhand der Daten aus Abb. 1 den mittleren Radius des flüssigen Inneren. Nehmen Sie näherungsweise an, dass die Dichten der Kruste und des Inneren gleich sind. (Vernachlässigen Sie die Formänderung des Inneren.)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a.** In der Näherung eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes gilt

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}$$

(dimensionslos).

- **b.** Der mittlere Radius des flüssigen Inneren beträgt näherungsweise

$$r_{\text{liquid}} \simeq 9.7 \times 10^3 \text{ m} = 9.7 \text{ km}.$$

Lösung

a. Abplattungsfaktor

Es seien M , R und T die Masse, der mittlere Radius und die Rotationsperiode. Die Winkelgeschwindigkeit ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0 \times 10^{-2}} \simeq 314.16 \text{ s}^{-1}.$$

Zur Bestimmung der Gleichgewichtsform modellieren wir den Stern als rotierende Flüssigkeit und nähern sein Gravitationspotential durch den kugelsymmetrischen Ausdruck $-GM/r$ an. Im mit dem Stern rotierenden Bezugssystem lautet das effektive Potential pro Masseneinheit

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2,$$

wobei s der Abstand von der Rotationsachse ist.

Die Gleichgewichtsoberfläche ist eine Äquipotentialfläche: Andernfalls würde Materie entlang dieser Oberfläche strömen. Am Pol gilt $s = 0$, am Äquator hingegen $s = r_e$. Daher gilt

$$-\frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

oder

$$GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2.$$

Mit der Definition von ϵ gilt

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e} = \frac{\epsilon}{r_e},$$

sodass

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

Da die Abplattung klein ist, dürfen wir in diesem Ausdruck r_e durch den mittleren Radius R ersetzen:

$$\epsilon \simeq \frac{\omega^2 R^3}{2GM} = \frac{2\pi^2 R^3}{GMT^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\epsilon \simeq \frac{2\pi^2(1.0 \times 10^4)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(2.0 \times 10^{-2})^2} = 3.699 \times 10^{-4}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}}.$$

Dies entspricht $r_e - r_p \simeq \epsilon R \simeq 3.7 \text{ m}$, was mit nahezu gleichen Radien vereinbar ist.

b. Radius des flüssigen Inneren

Wir nehmen an, dass die Kruste und das flüssige Innere vor dem Beben gemeinsam mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotieren. Während der plötzlichen Verformung nimmt das Trägheitsmoment der Kruste ab. Für eine nennenswerte Übertragung von Drehimpuls auf die Flüssigkeit bleibt nicht genügend Zeit, sodass die Kruste auf ω_1 beschleunigt wird, während die Flüssigkeit zunächst bei ω_0 bleibt.

In den folgenden Tagen überträgt die innere Reibung Drehimpuls von der Kruste auf die Flüssigkeit, bis beide mit ω_2 rotieren. Der Drehimpulsverlust nach außen ist während dieses Zeitraums im Vergleich zur langfristigen Entwicklung über Jahre vernachlässigbar.

Es seien I_c das Trägheitsmoment der Kruste nach dem Beben und I_l das der Flüssigkeit. Das Trägheitsmoment der Flüssigkeit bleibt gemäß der Vorgabe unverändert. Aus der Drehimpulserhaltung während der Relaxation folgt

$$I_c\omega_1 + I_l\omega_0 = (I_c + I_l)\omega_2.$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$I_c(\omega_1 - \omega_2) = I_l(\omega_2 - \omega_0).$$

Folglich gilt

$$\boxed{\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0}}.$$

Die benötigte Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls; während der Relaxation wird kinetische Rotationsenergie dissipiert.

Um die Trägheitsmomente mit den Radien in Beziehung zu setzen, vernachlässigen wir die geringe Abplattung und verwenden die in der Aufgabenstellung angegebene gemeinsame Dichte ρ . Für eine Kugelschale mit Radius r und Dicke dr gilt

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm.$$

Damit hat eine homogene Kugel mit Radius a das Trägheitsmoment

$$I(a) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} a^5.$$

Bezeichnen wir den Radius der Flüssigkeit mit r_l , erhalten wir

$$\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{r_l^5}{R^5}.$$

Daher gilt

$$r_l = R \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0} \right)^{1/5}.$$

Aus dem Diagramm lassen sich näherungsweise folgende Werte ablesen:

$$\omega_0 \simeq 314.1593 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 \simeq 314.1640 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 \simeq 314.1599 \text{ s}^{-1}.$$

Diese ergeben

$$\left(\frac{r_l}{R} \right)^5 \simeq \frac{0.0041}{0.0047} \simeq 0.872,$$

und damit

$$r_l \simeq (1.0 \times 10^4)(0.872)^{1/5} \simeq 9.73 \times 10^3 \text{ m}.$$

Mit angemessener Genauigkeit ergibt sich

$$r_l \simeq 9.7 \text{ km}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.