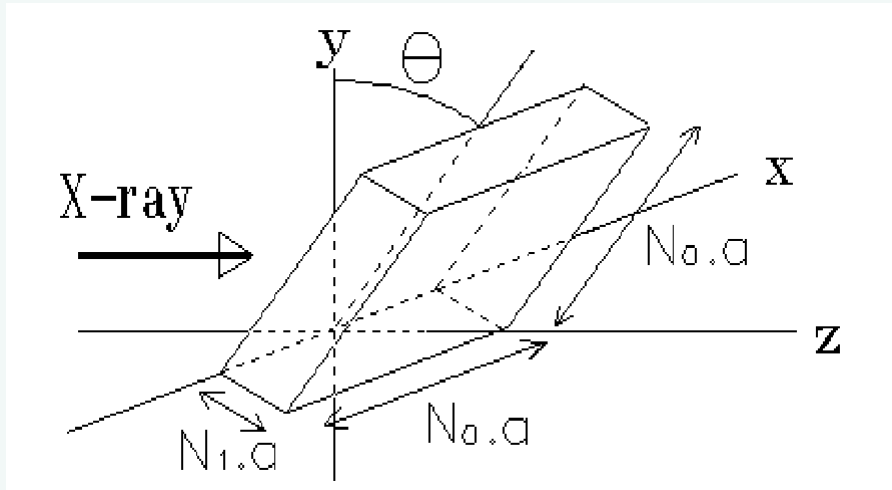


المسألة 1: حيود الأشعة السينية عن بلورة

نرغب في دراسة حيود الأشعة السينية بواسطة شبكة بلورية مكعبة. ولهذا نبدأ بحيود موجة مستوية أحادية اللون تسقط عمودياً على شبكة ثنائية الأبعاد تتكون من $N_1 \times N_2$ شقاً، تفصل بينها المسافتان d_1 و d_2 . يُرصد نمط الحيود على شاشة تبعد مسافة L عن الشبكة. الشاشة موازية للشبكة، و L أكبر بكثير من d_1 و d_2 .

a - حدد مواضع القمم الرئيسية وعروضها على الشاشة. يُعرّف العرض بأنه المسافة بين نقطتي الحد الأدنى الواقعتين على جانبي القمة.

ننظر الآن في بلورة مكعبة ثابت شبكتها a ، وأبعادها $N_1 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a$. إن N_1 أصغر بكثير من N_0 . توضع البلورة في حزمة متوازية من الأشعة السينية تسير على امتداد المحور z ، بزاوية Θ (انظر الشكل 1). ويُرصد نمط الحيود مرة أخرى على شاشة تقع على مسافة كبيرة من البلورة.



الشكل 1 حيود حزمة متوازية من الأشعة السينية تسير على امتداد المحور z . الزاوية بين البلورة والمحور y هي Θ .

b - احسب مواضع القمم وعروضها بدلالة الزاوية Θ (لقيم Θ الصغيرة).

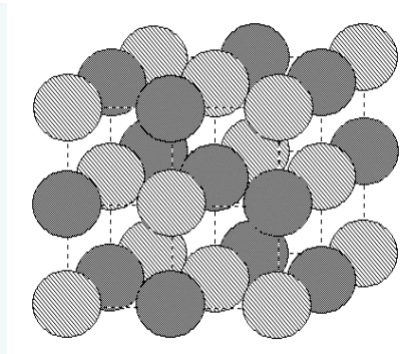
- ما النتائج المترتبة، على وجه الخصوص، على كون $N_1 \ll N_0$ ؟

يمكن أيضاً اشتقاق نمط الحيود باستخدام نظرية براغ، التي يُفترض فيها أن الأشعة السينية تنعكس عن مستويات ذرية في الشبكة. وينشأ نمط الحيود عندئذ من تداخل هذه الأشعة المنعكسة بعضها مع بعض.

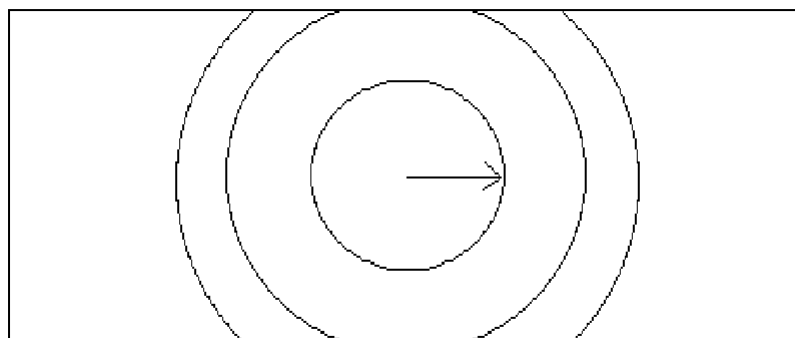
c - بين أن ما يُسمّى انعكاس براغ هذا يعطي شروط القمم نفسها التي وجدتتها في b.

تُستخدم في بعض القياسات ما يُسمّى طريقة المسحوق. تشتتت حزمة من الأشعة السينية بواسطة مسحوق يتكون من عدد كبير جداً من البلورات الصغيرة. (وبالطبع تكون أبعاد البلورات أكبر بكثير من ثابت الشبكة، a).

ينتج عن تشتت أشعة سينية طولها الموجي 0.15 nm بواسطة كلوريد البوتاسيوم $[\text{KCl}]$ (الذي له شبكة مكعبة، انظر الشكل 2) دوائر داكنة متحدة المركز على لوح فوتوغرافي. تبلغ المسافة بين البلورات واللوح 0.10 m ، ويبلغ نصف قطر أصغر دائرة 0.053 m (انظر الشكل 3). لأيونات K^+ و Cl^- الحجم نفسه تقريباً، ويمكن معاملتها بوصفها مراكز تشتت متماثلة.



الشكل 2. الشبكة المكعبة لكلوريد البوتاسيوم، التي تكون فيها أحجام أيونات K^+ و Cl^- متساوية تقريباً.



الشكل 3. ينتج عن تشتت الأشعة السينية بواسطة مسحوق من بلورات KCl دوائر داكنة متحدة المركز على لوح فوتوغرافي.

d - احسب المسافة بين أيوني K متجاورين في البلورة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليكن λ رمزاً للطول الموجي. يُقاس إحداثيا الشاشة X, Y انطلاقاً من الحزمة غير المنحرفة؛ وفي حالة البلورة، ترمز L إلى المسافة بين البلورة والشاشة.

• a. لعددين صحيحين m, n ، نضع

$$u_m = \frac{m\lambda}{d_1}, \quad v_n = \frac{n\lambda}{d_2}.$$

تقع القمم الرئيسية عند

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

وتكون عروضها الكاملة بين أول انعدامين للشدة، بدلالة جيوب تمام الاتجاه، هي

$$\Delta u = \frac{2\lambda}{N_1 d_1}, \quad \Delta v = \frac{2\lambda}{N_2 d_2}.$$

عند زوايا الحيود الصغيرة، تصبح هذه العلاقات

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2}, \quad W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.$$

• **b.** نكتب $r = \lambda/a$ ، ولتكن h, k, ℓ مؤشرات حيود صحيحة. نعرّف

$$B = k \sin \Theta + \ell \cos \Theta, \quad C = k \cos \Theta - \ell \sin \Theta.$$

تحقق قمم التداخل البناء التام الشرط

$$2B + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0$$

وتظهر عند

$$(X, Y) = \frac{Lr(h, C)}{1 + rB}.$$

عندما تكون Θ صغيرة، نستخدم $B \simeq k\Theta + \ell$ و $C \simeq k - \ell\Theta$.

في الحيود الأمامي عند زوايا تشتت صغيرة، تكون البقع الحادة موصوفة بالعلاقات

$$(X, Y) \simeq Lr(h, k), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

ويبلغ عامل التداخل الناتج عن السُمك قيمته العظمى عندما

$$-k\Theta - \frac{\lambda}{2a}(h^2 + k^2) = \ell,$$

وتحدث نقطتا الانعدام المجاورتان عندما يساوي الطرف الأيسر $\ell \pm 1/N_1$. ومن ثم فإن $N_1 \ll N_0$ يؤدي إلى بقع ضيقة ذات نطاق أوسع بكثير لتحقيق شرط إثارتها. وعندما $k \neq 0$ ، يكون العرض الكامل المقابل في زاوية الميل تقريباً

$$\Delta\Theta = \frac{2}{N_1|k|}.$$

• **c.** يكافئ شرط براغ

$$2d \sin \theta_B = p\lambda$$

شروط التداخل الشبكي في **b.** وعلى وجه الخصوص، يعطي الانعكاس عن المستويات العمودية على محور البلورة الطويل المائل

$$2a \sin \Theta = p\lambda, \quad X = 0, \quad Y = -L \tan(2\Theta)$$

للاتجاه المختار أدناه.

• **d.** المسافة بين أقرب أيوني بوتاسيوم متجاورين هي

$$d_{K-K} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.44 \text{ nm}.$$

الحل

نستخدم التشتت المترابط المرن في تقريب المجال البعيد، أو تقريب فراونهوفر. ونعامل الشقوق ومواقع الشبكة بوصفها مصادر إشعاع متماثلة؛ ونهمل غلاف الحيود الخاص بكل منها على حدة.

من النتائج المفيدة لمجموعة من N مصادر إشعاع متساوية التباعد، فرق الطور بين المتجاور منها $2\pi t$ ، العلاقة

$$F_N(t) = \left| \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i j t} \right|^2 = \frac{\sin^2(N\pi t)}{\sin^2(\pi t)}.$$

عند قيمة صحيحة $t = m$ ، تكون القيمة الحدية N^2 : فجميع المساهمات متفقة في الطور. وعندما $N > 1$ ، تكون أقرب نقطتي انعدام عند

$$t = m \pm \frac{1}{N}.$$

a. الحيود بواسطة الشبكة ثنائية الأبعاد

نأخذ محوري الشبكة على امتداد x, y ، والموجة الساقطة على امتداد z . ويكون متجه وحدة اتجاه الشعاع الخارج

$$\mathbf{s} = (u, v, w), \quad w = \sqrt{1 - u^2 - v^2} > 0.$$

طور الموجة الساقطة واحد عند جميع الشقوق. وفروقا المسار الخارج بين الشقوق المتجاورة هما $d_1 u$ و $d_2 v$. ومن ثم

$$I(u, v) \propto F_{N_1} \left(\frac{d_1 u}{\lambda} \right) F_{N_2} \left(\frac{d_2 v}{\lambda} \right).$$

يبلغ كلا العاملين قمته الرئيسية عندما

$$d_1 u = m\lambda, \quad d_2 v = n\lambda.$$

ولا تصل إلى شاشة في نصف الفضاء الأمامي إلا الرتب التي تحقق $u_m^2 + v_n^2 < 1$.

يتقاطع شعاع اتجاهه $\mathbf{s}$ مع المستوى $z = L$ عند

$$X = L \frac{u}{w}, \quad Y = L \frac{v}{w}.$$

ولذلك

$$(X_{mn}, Y_{mn}) = \frac{L(u_m, v_n)}{\sqrt{1 - u_m^2 - v_n^2}}.$$

حدود أقرب انعدام للشدة هي

$$u = u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, \quad v = v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2}.$$

تحدد هذه المعادلات، مع التحويل إلى إحداثيات الشاشة الوارد أعلاه، حدود أول انعدام للشدة من دون تقريب الزوايا الصغيرة.

على سبيل المثال، نعرّف

$$\mathbf{R}(u, v) = \frac{L(u, v)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

زوجا نقاط أول انعدام للشدة على امتداد الإحداثيات الطبيعية للشبكة هما

$$\mathbf{R} \left(u_m \pm \frac{\lambda}{N_1 d_1}, v_n \right), \quad \mathbf{R} \left(u_m, v_n \pm \frac{\lambda}{N_2 d_2} \right).$$

وتعطي المسافة بين نقطتي كل زوج العرض المقابل على الشاشة.

عند زوايا الحيود الصغيرة، يكون $u, v \ll 1$ ، ومن ثم $X \simeq Lu$ و $Y \simeq Lv$. وهكذا

$$X_m \simeq \frac{m\lambda L}{d_1}, \quad Y_n \simeq \frac{n\lambda L}{d_2},$$

و

$$\boxed{W_X \simeq \frac{2\lambda L}{N_1 d_1}, \quad W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_2 d_2}.}$$

b. الحيود بواسطة البلورة المائلة ذات الأبعاد المحدودة

نختار متجهات الوحدة البلورية

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{y}} \cos \Theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\hat{\mathbf{y}} \sin \Theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \Theta.$$

يمتد البعدان الطويلان على امتداد $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ؛ ويمتد البعد الرقيق على امتداد $\mathbf{e}_3$. وبهذا الاختيار تكون Θ الموجبة ميلاً لمحور البلورة الطويل من y نحو z .

متجهها الموجة الساقطة والموجة الخارجة هما

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}_f = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}.$$

نعرّف متجه التشتت

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

بخلاف الشبكة في $\mathbf{a}$ ، تختلف أطوار الموجة الساقطة أيضاً عند الذرات الواقعة على أعماق مختلفة. ويأخذ $\mathbf{q}$ في الحسبان كلاً من الانتشار الساقط والانتشار الخارج. نعرّف

$$p_i = \frac{a}{2\pi} \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_i.$$

وبصورة صريحة،

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a}{\lambda} s_x, \\ p_2 &= \frac{a}{\lambda} [s_y \cos \Theta + (s_z - 1) \sin \Theta], \\ p_3 &= \frac{a}{\lambda} [-s_y \sin \Theta + (s_z - 1) \cos \Theta]. \end{aligned}$$

ومن ثم يكون نمط التداخل الكامل للشبكة المحدودة

$$I(\mathbf{s}) \propto F_{N_0}(p_1) F_{N_0}(p_2) F_{N_1}(p_3).$$

تتطلب قمة التداخل البناء التام أن يكون

$$p_1 = h, \quad p_2 = k, \quad p_3 = \ell,$$

حيث h, k, ℓ أعداد صحيحة. وبصورة مكافئة،

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a} (h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3).$$

بكتابة $r = \lambda/a$ ، يكون اتجاه الشعاع الخارج

$$\begin{aligned} s_x &= rh, \\ s_y &= r(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta), \\ s_z &= 1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta). \end{aligned}$$

يتطلب التشتت المرن أن يكون $|\mathbf{s}| = 1$. وبالتعويض نحصل على

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

لكل رتبة أمامية مسموحة، يكون موضعها على الشاشة

$$X = \frac{Lrh}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}, \quad Y = \frac{Lr(k \cos \Theta - \ell \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta)}.$$

تحافظ هذه الصيغ على الوصف الهندسي الدقيق للشعاع الخارج. وعندما يكون ميل البلورة صغيراً،

$$2(k\Theta + \ell) + r(h^2 + k^2 + \ell^2) \simeq 0,$$

و

$$X \simeq \frac{Lrh}{1 + r(\ell + k\Theta)}, \quad Y \simeq \frac{Lr(k - \ell\Theta)}{1 + r(\ell + k\Theta)}.$$

تقع أولى نقاط انعدام الشدة المحيطة بقمة التداخل البناء التام على

$$p_1 = h \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_2 = k \pm \frac{1}{N_0}, \quad p_3 = \ell \pm \frac{1}{N_1}.$$

ومن ثم تكون العروض الكاملة بدلالة مركبات متجه التشتت

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \frac{4\pi}{N_0 a}, \quad \Delta q_3 = \frac{4\pi}{N_1 a}.$$

لأن $N_1 \ll N_0$ ، يشكّل العاملان الأولان قمماً ضيقة، بينما يعطي العامل الثالث غلافاً عريضاً نسبياً. ولذلك يمكن أن تظل بقعة حادة مرئية حتى عندما لا تكون p_3 عدداً صحيحاً تماماً.

واستكمالاً للعرض، يمكن الحصول على موضع مثل هذه البقعة من دون اشتراط تداخل بناء تام في الأبعاد الثلاثة. نضع $p_1 = h$, $p_2 = k$ على الفرع الأمامي، تكون

$$\zeta_{hk}(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - r^2 h^2 - (\sin \Theta + rk)^2} - \cos \Theta}{r}$$

هي القيمة الناتجة لـ p_3 . ويكون موضع البقعة

$$\mathcal{R}_\Theta(h, k) = \frac{Lr(h, k \cos \Theta - \zeta_{hk} \sin \Theta)}{1 + r(k \sin \Theta + \zeta_{hk} \cos \Theta)}.$$

تتضمن شدتها العامل $F_{N_1}(\zeta_{hk})$. وتحدث قمم التداخل البناء التام عندما تكون ζ_{hk} عدداً صحيحاً.

لبقعة مثارة بقوة، يُحصل على زوجي نقاط أول انعدام للشدة من هذا التحويل بإجراء

$$h \longrightarrow h \pm \frac{1}{N_0}, \quad \text{أو} \quad k \longrightarrow k \pm \frac{1}{N_0}.$$

وتعطي المسافات بين هذه النقاط عروض البقعة على الشاشة، بما في ذلك اعتمادها على Θ .

تجعل صيغة الزوايا الصغيرة النتائج الفيزيائية واضحة على نحو خاص. نضع

$$\alpha = \frac{X}{L}, \quad \beta = \frac{Y}{L}, \quad \mathbf{s} \simeq \left(\alpha, \beta, 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right).$$

للقيم الصغيرة من Θ, α, β .

$$p_1 \simeq \frac{\alpha}{r}, \quad p_2 \simeq \frac{\beta}{r}, \quad p_3 \simeq -\frac{\Theta\beta + (\alpha^2 + \beta^2)/2}{r}.$$

يجب الإبقاء على الحد الزاوي التربيعي في p_3 ، لأنه يمثل الحد الرئيس في فرق المسار الطولي.

ومن ثم تقع القمم العرضية الضيقة عند

$$\alpha_h \simeq hr, \quad \beta_k \simeq kr,$$

بعروض كاملة

$$\Delta\alpha \simeq \Delta\beta \simeq \frac{2r}{N_0}.$$

وعليه

$$(X, Y) \simeq \left(\frac{h\lambda L}{a}, \frac{k\lambda L}{a} \right), \quad W_X \simeq W_Y \simeq \frac{2\lambda L}{N_0 a}.$$

عند هذه المواضع،

$$p_3 \simeq -k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2).$$

لذلك تحدث قمة غلاف السُّمك عندما

$$-k\Theta - \frac{r}{2}(h^2 + k^2) = \ell,$$

وتقع نقطتا الانعدام المجاورتان لها عند $\ell \pm 1/N_1$.

بالنسبة إلى رتبة السُّمك المركزية $\ell = 0$ ، تحقق أشد البقع العلاقة

$$h^2 + \left(k + \frac{\Theta}{r}\right)^2 = \left(\frac{\Theta}{r}\right)^2.$$

يوسّع السُّمك المحدود هذه الدائرة إلى شريط من بقع الشبكة المثارة بدرجة ملحوظة.

عندما $k \neq 0$ ، يؤدي تغيير الميل إلى تغيير p_3 بالمعدل

$$\frac{dp_3}{d\Theta} \simeq -k.$$

ومن ثم يكون العرض الكامل بين أول انعدامين للشدة بدلالة زاوية الميل

$$\Delta\Theta \simeq \frac{2}{N_1|k|}.$$

يحدد البعدان الكبيران عروض البقع الضيقة. ويعطي البعد الرقيق غلاف تداخل أوسع ونطاقاً أوسع لاتجاهات البلورة التي تُثار فيها البقعة بدرجة ملحوظة.

c. التكافؤ مع انعكاس براغ

لننظر في عائلة من المستويات الذرية ذات مؤشرات صحيحة (H, K, M) لا قاسم مشتركاً لها أكبر من الواحد. متجه الوحدة العمودي عليها والمسافة الفاصلة بينها هما

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}, \quad d = \frac{a}{\sqrt{H^2 + K^2 + M^2}}.$$

لتكن θ_B زاوية الانزلاق بين الحزمة الساقطة وهذه المستويات. يكون فرق المسار بين الأشعة المنعكسة عن مستويات متتالية

$$2d \sin \theta_B.$$

يتطلب التداخل البناء أن يكون

$$2d \sin \theta_B = p\lambda, \quad p = 1, 2, \dots$$

لا يغيّر الانعكاس المرأوي إلا مركبة متجه الموجة العمودية على المستويات. ولذلك يكون $\mathbf{q}$ عمودياً عليها، ومقداره

$$|\mathbf{q}| = 2\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta_B.$$

وباستخدام شرط براغ،

$$|\mathbf{q}| = \frac{2\pi p}{d}.$$

وباختيار مناسب لاتجاه العمودي،

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi p}{a}(H\mathbf{e}_1 + K\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3).$$

بوضع

$$(h, k, \ell) = p(H, K, M)$$

نحصل تماماً على

$$\mathbf{q} = \frac{2\pi}{a}(h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_3),$$

وهي شروط التداخل الشبكي الثلاثة المشتقة في **b**. وبفرض تساوي الطولين الموجيين الساقط والخارج، نحصل عندئذ على الشرط نفسه

$$2(k \sin \Theta + \ell \cos \Theta) + \frac{\lambda}{a}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 0.$$

كمثال مباشر، نأخذ مستويات عمودية على $\mathbf{e}_2$. المسافة الفاصلة بينها هي a ، وزاوية الانزلاق هي Θ . يعطي قانون براغ

$$2a \sin \Theta = p\lambda.$$

في $\mathbf{b}$ ، نختار $h = 0$, $k = -p$, $\ell = 0$. فيصبح الشرط

$$-2p \sin \Theta + \frac{\lambda}{a}p^2 = 0,$$

وهو مطابق له. ويكون اتجاه الشعاع الخارج

$$\mathbf{s} = (0, -\sin 2\Theta, \cos 2\Theta),$$

ومن ثم

$$X = 0, \quad Y = -L \tan 2\Theta.$$

d. المسافة بين أقرب أيوني بوتاسيوم متجاورين

عندما تشتت أيونات K^+ و Cl^- الأشعة بالطريقة نفسها، يؤدي الترتيب الأيوني المتناوب دور شبكة مكعبة بسيطة من مراكز تشتت متماثلة.

لتكن b المسافة بين أقرب جارَين من $\text{K}-\text{Cl}$. ثابت الشبكة المكعبة البسيطة الفعالة هو b . وأكبر مسافة فاصلة بين مستوياتها العاكسة هي b ، ولذلك تنتج أصغر زاوية حيود غير صفيرية عن انعكاس من الرتبة الأولى يحقق

$$2b \sin \theta_B = \lambda.$$

تنتج الاتجاهات العشوائية للبلورات مخروطاً من الأشعة المشتتة بزاوية تشتت $2\theta_B$. ولذلك يسجل لوح فوتوغرافي عمودي حلقة نصف قطرها

$$R = L \tan(2\theta_B).$$

وباستخدام المعطيات،

$$2\theta_B = \arctan\left(\frac{0.053}{0.10}\right) = 27.9236^\circ,$$

ومن ثم

$$\theta_B = 13.9618^\circ.$$

لا حاجة هنا إلى تقريب الزوايا الصغيرة.

وهكذا

$$b = \frac{0.15 \text{ nm}}{2 \sin 13.9618^\circ} = 0.31085 \text{ nm}.$$

يتناوب نوعا الأيونات على امتداد كل محور من محاور الشبكة المكعبة البسيطة. ولذلك يقع أقرب أيوني بوتاسيوم عند طرفي قطر وجه مكعب طول ضلعه b ، فنحصل على

$$d_{\text{K-K}} = \sqrt{2}b = \sqrt{2}(0.31085 \text{ nm}) = 0.43961 \text{ nm}.$$

وبالتقريب إلى رقمين معنويين،

$$d_{\text{K-K}} = 0.44 \text{ nm} = 4.4 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

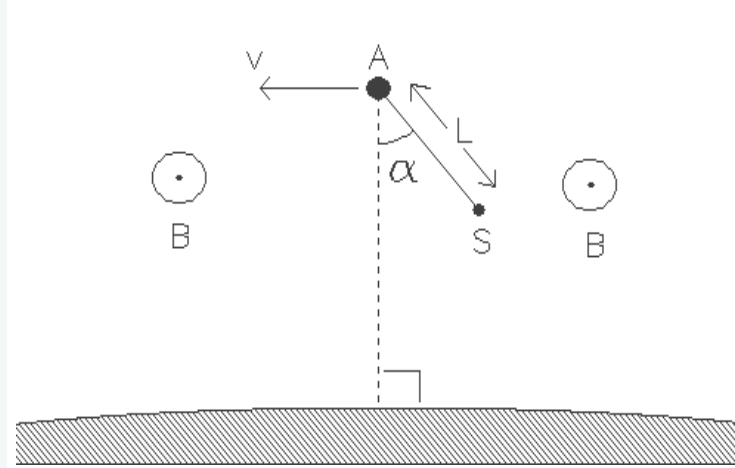
المسألة 2: تجارب كهربائية في الغلاف المغناطيسي للأرض

في مايو 1991، ستوضع المركبة الفضائية أتلاتنيس في مدار حول الأرض. سنفترض أن هذا المدار دائري وأنه يقع في المستوى الاستوائي للأرض.

في لحظة محددة مسبقاً، ستطلق المركبة الفضائية قمراً صناعياً S ، موصولاً بقضيب موصل طوله L . نفترض أن القضيب صلب، وكتلته مهملة، ومغطى بعازل كهربائي. ونهمل أيضاً جميع أشكال الاحتكاك. لتكن الزاوية α التي يصنعها القضيب مع الخط الواصل بين أتلانتس ومركز الأرض. (انظر الشكل 1).

يقع S أيضاً في المستوى الاستوائي.

افترض أن كتلة القمر الصناعي أصغر بكثير من كتلة أتلانتس، وأن L أصغر بكثير من نصف قطر المدار.



الشكل 1 المركبة الفضائية أتلانتس (A) مع قمر صناعي (S) في مدار حول الأرض. يقع المدار في المستوى الاستوائي للأرض. المجال المغناطيسي (B) عمودي على مستوى الرسم ومتجه نحو القارئ.

a₁ - استنتج عند أي قيمة أو قيم للزاوية α يبقى وضع المركبة الفضائية والقمر الصناعي دون تغير (بالنسبة إلى الأرض)؟ وبعبارة أخرى، عند أي قيمة أو قيم للزاوية α تظل α ثابتة؟

a₂ - ناقش استقرار الاتزان في كل حالة.

افترض أن القضيب ينحرف في لحظة معينة عن الوضع المستقر بزاوية صغيرة. سيبدأ النظام بالتأرجح مثل البندول.

b - عبّر عن زمن دورة التأرجح بدلالة زمن دورة النظام حول الأرض.

في الشكل 1، يكون المجال المغناطيسي للأرض عمودياً على مستوى الرسم ومتجهاً نحو القارئ. وبسبب السرعة المدارية للقضيب، ينشأ فرق جهد بين طرفيه. والوسط المحيط (الغلاف المغناطيسي) غاز مخلخل متأين ذو موصلية كهربائية جيدة جداً. يتحقق التلامس مع الغاز المتأين بواسطة قطبين كهربائيين في A (أتلانتس) و S (القمر الصناعي). ونتيجة للحركة، يسري تيار I عبر القضيب.

c₁ - في أي اتجاه يسري التيار عبر القضيب؟ (خذ $\alpha = 0$)

المعطيات:

$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$	- زمن الدورة المدارية
$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$	- طول القضيب
$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$	- شدة المجال المغناطيسي للأرض عند ارتفاع القمر الصناعي
$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$	- كتلة المكوك أتلانتس

بعد ذلك، يُدرج في الدارة مصدر تيار داخل المكوك، يحافظ على تيار مستمر صافٍ مقداره 0.1 أمبير في الاتجاه المعاكس.

c₂ - ما المدة التي يجب خلالها الإبقاء على هذا التيار لتغيير ارتفاع المدار بمقدار 10 أمتار؟

افترض أن α تظل صفراً. أهمل جميع إسهامات التيارات في الغلاف المغناطيسي.

• هل ينخفض الارتفاع أم يزداد؟

الإجابات

- **a₁**: يجب أن يكون القضيب شعاعياً أو مماسياً. إلى الرتبة الرئيسية في L/R ، تكون الزوايا الموجهة

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

- **a₂**: وضع الاتزان الشعاعيان، $\alpha = 0, \pi$ ، مستقران. ووضع الاتزان المماسيان، $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$ ، غير مستقرين.
- **b**: زمن دورة الاهتزازات الصغيرة هو

$$T_{\text{swing}} = \frac{T}{\sqrt{3}} \simeq 3.1 \times 10^3 \text{ s}.$$

- **c₁**: يسري التيار الاصطلاحي من القمر الصناعي **S** إلى أتلانتس **A**.
- **c₂**: يزداد الارتفاع، والزمن اللازم، في تقريب المدار الدائري، هو

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT} \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

الحل

a₁ — اتجاهات الاتزان

ليكن R نصف قطر مدار أتلانتس، ولتكن $\mu = GM_E$ ، و

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

بما أن أتلانتس تتبع مداراً دائرياً، فإن

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{R^3}.$$

تتيح لنا كتلة القمر الصناعي الأصغر بكثير إهمال تأثيره في حركة أتلانتس.

نستخدم إطاراً مرجعياً مركزه أتلانتس ويدور مع المدار. ليكن $\mathbf{e}_x$ متجهاً نحو مركز الأرض، وليكن $\mathbf{e}_y$ متجهاً إلى اليمين في الشكل 1. إزاحة القمر الصناعي عن أتلانتس هي

$$\boldsymbol{\rho} = L \cos \alpha \mathbf{e}_x + L \sin \alpha \mathbf{e}_y.$$

لإزاحة صغيرة عامة $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ ، يعطي نشر مجال الجاذبية الأرضية إلى الرتبة الأولى في L/R

$$\mathbf{g}_S - \mathbf{g}_A = \frac{\mu}{R^3} (2x \mathbf{e}_x - y \mathbf{e}_y).$$

التسارع الإضافي الناتج عن القوة الطاردة المركزية هو

$$\Omega^2 (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y).$$

ومن ثم فإن مجموعهما هو

$$\mathbf{a}_{\text{eff}} = 3\Omega^2 x \mathbf{e}_x.$$

متجه الوحدة العمودي على القضيب، في اتجاه تزايد α ، هو

$$\mathbf{e}_\alpha = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y.$$

تؤثر قوة القضيب على امتداد القضيب. وتؤثر قوة كوريوليس أيضًا على امتداد القضيب، لأن السرعة النسبية $L\dot{\alpha}\mathbf{e}_\alpha$ عمودية عليه. ولا تسهم أي منهما في معادلة الحركة المماسية.

وبالتالي،

$$L\ddot{\alpha} = \mathbf{a}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -3\Omega^2 L \sin \alpha \cos \alpha,$$

أو

$$\boxed{\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0}.$$

يتطلب ثبات الزاوية أن يكون

$$\sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

إذن

$$\boxed{\alpha = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}}.$$

وعليه يكون القضيب إما شعاعياً وإما مماسياً. تعتمد هذه الزوايا على التقريب المذكور $L \ll R$.

a₂ — الاستقرار

نكتب

$$\alpha = \alpha_0 + \delta, \quad |\delta| \ll 1,$$

حيث α_0 زاوية اتزان. وبأخذ التقريب الخطي لمعادلة الحركة نحصل على

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \cos(2\alpha_0) \delta = 0.$$

للوضعين الشعاعيين، $\alpha_0 = 0, \pi$,

$$\ddot{\delta} + 3\Omega^2 \delta = 0.$$

يعيد التسارع القضيب نحو الاتزان، لذا فإن كلا الوضعين الشعاعيين **مستقر**.

للوضعين المماسيين، $\alpha_0 = \pi/2, 3\pi/2$,

$$\ddot{\delta} - 3\Omega^2 \delta = 0.$$

تقبل هذه المعادلة إزاحة تنمو أسياً،

$$\delta \propto e^{\sqrt{3}\Omega t},$$

لذا فإن كلا الوضعين المماسيين **غير مستقر**.

b — زمن دورة الاهتزازات الصغيرة

بالقرب من أي من وضعي الاتزان المستقرين، تكون المعادلة التي وجدناها أعلاه معادلة حركة توافقية بسيطة:

$$\ddot{\delta} + \omega_{\text{swing}}^2 \delta = 0, \quad \omega_{\text{swing}} = \sqrt{3}\Omega.$$

ومن ثم

$$\boxed{T_{\text{swing}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}}}.$$

باستخدام زمن الدورة المدارية المعطى،

$$T_{\text{swing}} = \frac{5.4 \times 10^3}{\sqrt{3}} \text{ s} \simeq \boxed{3.1 \times 10^3 \text{ s}}.$$

c₁ — اتجاه التيار المستحث

القوة المغناطيسية المؤثرة في شحنة موجبة تتحرك مع القضيب هي

$$\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

في الشكل 1، تتجه $\mathbf{v}$ إلى اليسار وتتجه $\mathbf{B}$ إلى خارج الصفحة. لذلك يتجه $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ إلى الأعلى.

عندما تكون $\alpha = 0$ ، يقع S أسفل A. ومن ثم تدفع القوة الدافعة الكهربائية الحركية الموجبة على طول القضيب من S نحو A:

$$\boxed{\text{A. إلى S يسري التيار الاصطلاحي من}}$$

c₂ — الزمن اللازم واتجاه تغير الارتفاع

يعكس مصدر التيار اتجاه التيار، فيسري من A إلى S، أي إلى الأسفل في الشكل. القوة المغناطيسية المؤثرة في القضيب هي

$$\mathbf{F} = I \ell \times \mathbf{B},$$

حيث يتجه ℓ في اتجاه التيار. ويشير حاصل الضرب الاتجاهي لاتجاه إلى الأسفل في اتجاه إلى خارج الصفحة إلى اليسار، أي في اتجاه السرعة المدارية.

بما أن القضيب عمودي على المجال، فإن

$$F = IBL = (0.1)(5.0 \times 10^{-5})(2.0 \times 10^4) = \boxed{0.10 \text{ N}}.$$

تزود هذه القوة المتجهة إلى الأمام المدار بالطاقة.

نعتبر أن قوة الدفع الضعيفة تحدث تغيراً تدريجياً في مدار شبه دائري. وتساوي الكتلة الكلية التي تدور في المدار تقريباً كتلة المكوك المعطاة m ، للمدار الدائري،

$$v^2 = \frac{\mu}{R},$$

والطاقة الميكانيكية الكلية هي

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu m}{R} = -\frac{\mu m}{2R}.$$

تزود القوة المغناطيسية النظام بقوة Fv ، لذا

$$Fv = \frac{dE}{dt} = \frac{\mu m}{2R^2} \frac{dR}{dt}.$$

بالتعويض عن $v = \Omega R$ و $\mu = \Omega^2 R^3$ ،

$$F\Omega R = \frac{m\Omega^2 R}{2} \frac{dR}{dt},$$

فنحصل على

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = \frac{2F}{m\Omega} = \frac{FT}{\pi m}}.$$

يساوي التغير في الارتفاع التغير في نصف قطر المدار. وخلال زيادة في الارتفاع مقدارها 10 m فقط، يمكننا اعتبار B و F و T ثابتاً. ومن ثم

$$t = \frac{\pi m \Delta h}{FT} = \frac{\pi m \Delta h}{IBLT}.$$

عددياً،

$$t = \frac{\pi(1.0 \times 10^5)(10)}{(0.10)(5.4 \times 10^3)} \text{ s} = 5.82 \times 10^3 \text{ s}.$$

إن،

$$t \simeq 5.8 \times 10^3 \text{ s} \simeq 97 \text{ min} \simeq 1.6 \text{ h}.$$

لأن القوة تضيف طاقة مدارية، تصبح E أقل سلبية ويزداد R :

$$10 \text{ m. يزداد الارتفاع بمقدار}$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: النجم النيوتروني الدوار

«النجم النابض الملي ثانية» هو مصدر للإشعاع في الكون يصدر نبضات قصيرة جداً بزمان دوري يتراوح بين ملي ثانية واحدة وعدة ملي ثوانٍ. يقع هذا الإشعاع في نطاق الأطوال الموجية الراديوية؛ ويمكن استخدام مستقبل راديوي مناسب لرصد النبضات المنفردة، ومن ثم قياس الزمن الدوري بدقة كبيرة.

تنشأ هذه النبضات الراديوية من سطح نوع معين من النجوم، يُسمّى النجم النيوتروني. هذه النجوم شديدة التراص: فكتلتها من رتبة مقدار كتلة الشمس نفسها، لكن نصف قطرها لا يتجاوز بضعة عشرات من الكيلومترات. وهي تدور بسرعة كبيرة جداً. وبسبب هذا الدوران السريع، يكون النجم النيوتروني مفلطحاً قليلاً. افترض أن المقطع المحوري للسطح قطع ناقص ذو محورين متساويين تقريباً. ليكن r_p نصف القطر القطبي و r_e نصف القطر الاستوائي؛ ولنعرّف معامل التفلطح بالعلاقة:

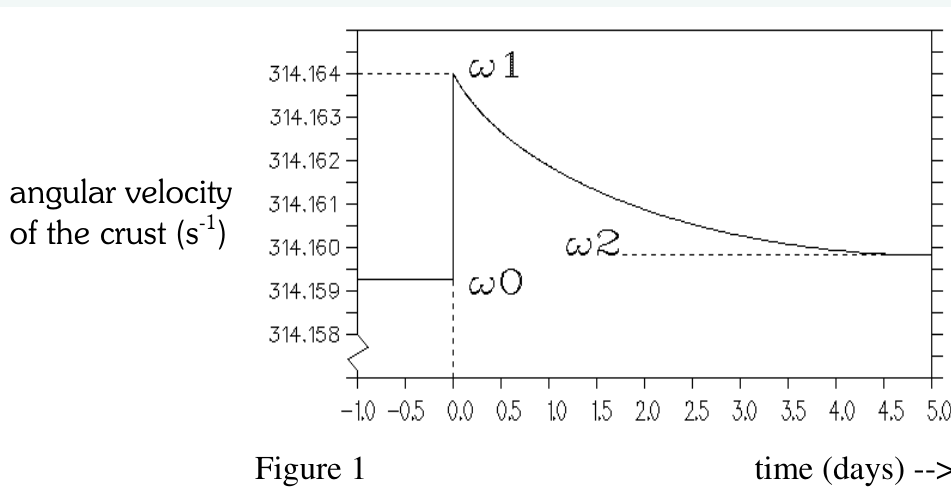
$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}$$

اعتبر نجماً نيوترونياً له

$2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	كتلة مقدارها
$1.0 \cdot 10^4 \text{ m}$	ومتوسط نصف قطر مقداره
$2.0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$	وزمن دوري للدوران مقداره

a - احسب معامل التفلطح، علماً بأن ثابت الجذب العام يساوي $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

على المدى الطويل (على امتداد سنوات عديدة)، يتباطأ دوران النجم بسبب فقدان الطاقة، مما يؤدي إلى انخفاض التفلطح. غير أن للنجم قشرة صلبة تطفو على باطن سائل. وتقاوم القشرة الصلبة التكيف المستمر مع شكل الاتزان. وبدلاً من ذلك، تحدث زلازل نجمية ترافقها تغيرات مفاجئة في شكل القشرة باتجاه الاتزان. وخلال مثل هذا الزلزال النجمي وبعده، تُرصد تغيرات في السرعة الزاوية وفقاً للشكل 1.



يؤدي تغير مفاجئ في شكل قشرة نجم نيوتروني إلى تغير مفاجئ في السرعة الزاوية.

b - احسب متوسط نصف قطر الباطن السائل باستخدام بيانات الشكل 1. استخدم التقريب القائل إن كثافتي القشرة والباطن متساويتان. (أهمّل التغير في شكل الباطن).
نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **a.** في تقريب مجال الجاذبية الكروي،

$$\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}$$

(بلا أبعاد).

• **b.** متوسط نصف قطر الباطن السائل يساوي تقريباً

$$r_{\text{liquid}} \simeq 9.7 \times 10^3 \text{ m} = 9.7 \text{ km}.$$

الحل

a. معامل التفلطح

لتكن M و R و T رموزاً للكتلة ومتوسط نصف القطر والزمن الدوري للدوران، على الترتيب. السرعة الزاوية هي

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.0 \times 10^{-2}} \simeq 314.16 \text{ s}^{-1}.$$

لتحديد شكل الاتزان، نمثل النجم بمائع دوار ونقرّب جهد جاذبيته بالتعبير الكروي $-GM/r$. في الإطار المرجعي الذي يدور مع النجم، يكون الجهد الفعّال لكل وحدة كتلة

$$\Phi_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 s^2,$$

حيث s هي المسافة من محور الدوران.

سطح الاتزان هو سطح تساوي الجهد؛ وإلا فإن المادة ستتساب على امتداده. عند القطب $s = 0$ ، بينما عند خط الاستواء $s = r_e$. ومن ثم

$$-\frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{r_e} - \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

أو

$$GM \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} \right) = \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2.$$

باستخدام تعريف ϵ ،

$$\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_e} = \frac{r_e - r_p}{r_p r_e} = \frac{\epsilon}{r_e},$$

فنحصل على

$$\epsilon = \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

بما أن التفلطح صغير، يمكننا التعويض عن r_e بمتوسط نصف القطر R في هذا التعبير:

$$\epsilon \simeq \frac{\omega^2 R^3}{2GM} = \frac{2\pi^2 R^3}{GMT^2}.$$

عددياً،

$$\epsilon \simeq \frac{2\pi^2(1.0 \times 10^4)^3}{(6.67 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(2.0 \times 10^{-2})^2} = 3.699 \times 10^{-4}.$$

إذن

$$\boxed{\epsilon \simeq 3.7 \times 10^{-4}}.$$

وهذا يقابل $r_e - r_p \simeq \epsilon R \simeq 3.7 \text{ m}$ وهو ما يتفق مع كون نصف القطر متساويين تقريباً.

b. نصف قطر الباطن السائل

قبل الزلزال، نفترض أن القشرة والباطن السائل يدوران معاً بسرعة زاوية ω_0 . وخلال التشوه المفاجئ، ينخفض عزم قصور القشرة الذاتي. ولا يتوافر وقت كافٍ لانتقال كمية ملحوظة من الزخم الزاوي إلى السائل، لذا تتسارع القشرة لتبلغ سرعتها الزاوية ω_1 ، بينما يبقى السائل في البداية عند ω_0 .

على مدى الأيام التالية، ينقل الاحتكاك الداخلي الزخم الزاوي من القشرة إلى السائل إلى أن يدور كلاهما بسرعة زاوية ω_2 . ويُعدّ فقدان الزخم الزاوي إلى الخارج خلال هذه المدة مهماً بالمقارنة مع التطور البطيء على مدى سنوات.

ليكن I_c عزم القصور الذاتي للقشرة بعد الزلزال و I_l عزم القصور الذاتي للسائل. يبقى عزم القصور الذاتي للسائل دون تغيير، وفقاً لما اشتراطته المسألة. ويعطي انحفاظ الزخم الزاوي أثناء الاسترخاء

$$I_c\omega_1 + I_l\omega_0 = (I_c + I_l)\omega_2.$$

بإعادة الترتيب،

$$I_c(\omega_1 - \omega_2) = I_l(\omega_2 - \omega_0).$$

وبالتالي،

$$\boxed{\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0}}.$$

الكمية المحفوظة المطلوبة هي الزخم الزاوي؛ أما الطاقة الحركية الدورانية فتتبدد أثناء الاسترخاء.

لربط عزوم القصور الذاتي بأنصاف الأقطار، نهمل التفلطح الصغير ونستخدم الكثافة المشتركة ρ المحددة في السؤال. لقشرة كروية نصف قطرها r وسمكها dr ، لدينا

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad dI = \frac{2}{3}r^2 dm.$$

وعليه، فإن عزم القصور الذاتي لكرة متجانسة نصف قطرها a هو

$$I(a) = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^a r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} a^5.$$

إذا رمزنا إلى نصف قطر السائل بـ r_l ، نحصل على

$$\frac{I_l}{I_c + I_l} = \frac{r_l^5}{R^5}.$$

لذلك،

$$\boxed{r_l = R \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_0} \right)^{1/5}}.$$

القراءات التقريبية من الرسم البياني هي

$$\omega_0 \simeq 314.1593 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_1 \simeq 314.1640 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 \simeq 314.1599 \text{ s}^{-1}.$$

وتعطي هذه القيم

$$\left(\frac{r_l}{R} \right)^5 \simeq \frac{0.0041}{0.0047} \simeq 0.872,$$

ومن ثم

$$r_l \simeq (1.0 \times 10^4)(0.872)^{1/5} \simeq 9.73 \times 10^3 \text{ m.}$$

وبالتقريب إلى دقة مناسبة،

$$\boxed{r_l \simeq 9.7 \text{ km}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.