

IPhO 1989

理论题与解答 · 波兰华沙 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1989/

题目 1：两种互不相溶液体的沸腾

考虑两种互不相溶的液体 A 和 B。它们的饱和蒸气压 p_i ($i = A$ 或 B) 可以用下式很好地近似描述：

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{\alpha_i}{T} + \beta_i, \quad i = A \text{ 或 } B,$$

其中， p_0 表示标准大气压， T 为蒸气的绝对温度， α_i 和 β_i ($i = A$ 或 B) 为取决于液体种类的常数。（符号 $\ln$ 表示自然对数，即以 $e = 2.7182818\dots$ 为底的对数。）

表 1.1 给出了液体 A 和 B 在温度为 40°C 和 90°C 时的比值 p_i/p_0 。

表 1.1

$t [^\circ\text{C}]$	$p_i/p_0, i = A$	$p_i/p_0, i = B$
40	0.284	0.07278
90	1.476	0.6918

这些数值的误差可以忽略不计。

A. 求液体 A 和 B 在压强 p_0 下的沸点。

B. 将液体 A 和 B 倒入一个容器，形成了图 1.1 所示的分层结构。在液体 B 的表面覆盖了一薄层不挥发的液体 C，液体 C 与液体 A、B 均互不相溶，从而阻止液体 B 从其上表面自由蒸发。液体 A 和 B 在气相中的分子质量之比为：

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

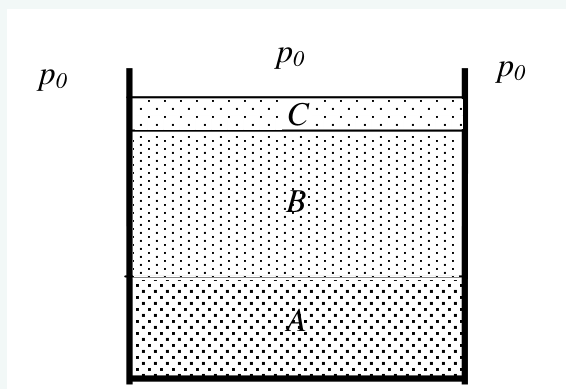


图 1.1

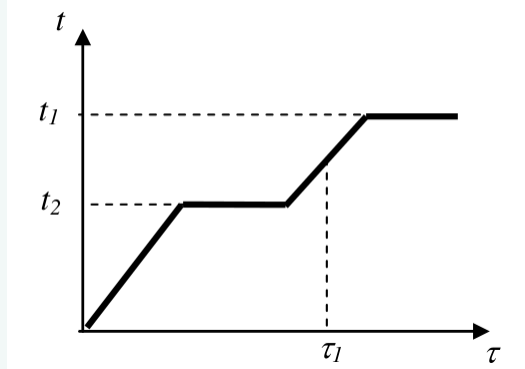


图 1.2

液体 A 和 B 的初始质量相同，均为 $m = 100\text{g}$ 。容器中各液层的高度和各液体的密度都足够小，可以认为容器内任意一点的压强实际上都等于标准大气压 p_0 。

对容器内的液体系统缓慢、连续且均匀地加热。观察到液体温度 t 随时间 τ 的变化如图 1.2 的示意图所示。

求图中水平段对应的温度 t_1 和 t_2 ，以及 τ_1 时刻液体 A 和 B 的质量。温度应四舍五入到整数度（以 $^{\circ}\text{C}$ 为单位），液体质量应精确到 0.1 克。

说明： 假设液体的蒸气可以很好地近似认为：

- (1) 遵循道尔顿分压定律，即混合气体的压强等于组成该混合物的各气体分压之和；并且
- (2) 在压强不超过相应饱和蒸气压的范围内，可以视为理想气体。

题目译自官方英文原文。

答案

- A. 标准沸点为

$$t_A = 76.8^{\circ}\text{C}, \quad t_B = 99.7^{\circ}\text{C}$$

(分别约为 77°C 和 100°C) 。

- B. 按题目要求的精度，

$$t_1 = 100^{\circ}\text{C}, \quad t_2 = 67^{\circ}\text{C},$$

$$m_A(\tau_1) = 0.0 \text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5 \text{ g}.$$

解答

A. 标准沸点

对于纯液体，当其饱和蒸气压等于外界压强时，就会发生沸腾。因此，在压强 p_0 下，

$$p_i(T_{b,i}) = p_0 \implies 0 = \frac{\alpha_i}{T_{b,i}} + \beta_i,$$

所以

$$T_{b,i} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

为确定这些常数，令

$$T_L = 313.15 \text{ K}, \quad T_H = 363.15 \text{ K},$$

并用 $r_{i,L}$ 和 $r_{i,H}$ 表示表中对应的压强比。将两个蒸气压方程相减，得到

$$\alpha_i = \frac{\ln r_{i,H} - \ln r_{i,L}}{T_H^{-1} - T_L^{-1}}, \quad \beta_i = \ln r_{i,L} - \frac{\alpha_i}{T_L}.$$

代入所给数据：

液体	α_i (K)	β_i
A	-3748.4907	10.711491
B	-5121.6396	13.734914

因此，

$$T_{b,A} = 349.9504 \text{ K}, \quad T_{b,B} = 372.8920 \text{ K}.$$

换算为摄氏温度，

$$t_A = 76.8^\circ\text{C}, \quad t_B = 99.7^\circ\text{C}.$$

B. 两个平台段及剩余质量

由于加热缓慢，可以利用平衡蒸气压进行准静态分析。根据题设，液体静压造成的压强差可以忽略不计。不挥发的液层 C 阻止了液面的自由蒸发。

在 A-B 界面处，与两种液体都处于平衡的蒸气泡中含有两种液体各自的饱和蒸气。由于两种液体互不相溶，每种液体都在共同的温度下贡献其自身的饱和蒸气压。由道尔顿分压定律得

$$p_{\text{bubble}} = p_A(T) + p_B(T).$$

因此，沸腾从较低平台段的温度 T_2 开始，该温度由下式确定：

$$p_A(T_2) + p_B(T_2) = p_0.$$

利用拟合得到的蒸气压关系式，

$$\exp\left(\frac{\alpha_A}{T_2} + \beta_A\right) + \exp\left(\frac{\alpha_B}{T_2} + \beta_B\right) = 1.$$

数值求解得到

$$T_2 = 340.1208 \text{ K}, \quad t_2 = 66.9708^\circ\text{C}.$$

因此，

$$t_2 = 67^\circ\text{C}.$$

在此温度下，

$$\frac{p_A}{p_0} = 0.7337662, \quad \frac{p_B}{p_0} = 0.2662338.$$

只要两种液体都还存在，它们的饱和蒸气压就只取决于温度，因此沸腾会在这一恒定温度下持续进行。输入的热量用于提供汽化潜热。

为确定哪种液体先耗尽，考虑体积为 V 的逸出混合蒸气。对每种组分应用理想气体状态方程，得到

$$p_A V = n_A R T_2, \quad p_B V = n_B R T_2,$$

从而

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{p_A}{p_B}.$$

分子质量之比也等于摩尔质量之比。因此，以正值表示的蒸发损失质量满足

$$\frac{dm_A^{\text{evap}}}{dm_B^{\text{evap}}} = \frac{\mu_A p_A}{\mu_B p_B} = \gamma \frac{p_A}{p_B}.$$

代入数值得

$$\gamma \frac{p_A}{p_B} = 8 \frac{0.7337662}{0.2662338} = 22.0488.$$

在整个较低平台段，这一比值保持不变。由于初始质量相等，**A 先耗尽**。当 A 的全部 100 g 都已蒸发时，B 损失的质量为

$$\Delta m_B = \frac{100}{22.0488} \text{ g} = 4.5354 \text{ g}.$$

因此，剩余液体的质量为

$$m_A = 0, \quad m_B = 100 - 4.5354 = 95.4646 \text{ g}.$$

A 一旦耗尽，B 单独的蒸气压就不足以使其在 T_2 下沸腾，因为

$$p_B(T_2) = 0.2662338 p_0 < p_0.$$

沸腾停止，温度上升，直到 B 达到其标准沸点。因此，较高平台段的温度为

$$t_1 = t_B = 99.7420^\circ\text{C},$$

四舍五入后得到

$$\boxed{t_1 = 100^\circ\text{C}}.$$

标出的时刻 τ_1 位于两个平台段之间的上升段。在这一阶段，A 已消失，B 尚未重新开始沸腾，而液层 C 阻止了液面的自由蒸发。因此，液体质量仍与较低平台段结束时相同：

$$\boxed{m_A(\tau_1) = 0.0 \text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5 \text{ g}}.$$

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：像刚体一样转动的三个相互吸引的质点

三个不共线的质点 P_1 、 P_2 和 P_3 ，其质量分别为已知的 m_1 、 m_2 和 m_3 ，彼此之间仅通过万有引力相互作用；它们孤立于自由空间中，不与任何其他物体相互作用。用 σ 表示通过这三个质点的质心且垂直于三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面的轴。系统（绕轴 σ ）的角速度 ω 以及各质点间的距离：

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13},$$

应满足什么条件，才能使三角形 $P_1P_2P_3$ 的形状和大小在系统运动过程中保持不变，即在什么条件下，系统会像刚体一样绕轴 σ 转动？

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 2： 三角形必须是等边三角形：

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a > 0.$$

三个质点必须以相同的恒定角速度转动，其大小满足

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}.$$

两个转动方向均可。对于任意正质量，这些条件都是必要且充分的；三个质点的质量不必相等。

解答

题目 2

对质点应用牛顿运动定律和万有引力定律。定义

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

由于没有外力，质心做匀速直线运动。选取质心静止的惯性参考系，并用 $\mathbf{r}_i$ 表示 P_i 相对于质心的位置矢量。于是

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

当系统绕垂直于三角形所在平面的轴 σ 作刚体转动时，三个质点具有共同的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 。它们相对于质心的角动量为

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad I = \sum_{i=1}^3 m_i |\mathbf{r}_i|^2.$$

万有引力是内力，也是有心力，因此其总力矩为零， $\mathbf{L}$ 守恒。由于刚性三角形的 I 保持不变， $\boldsymbol{\omega}$ 为常量。因此，

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\omega^2 \mathbf{r}_i.$$

因此，将牛顿第二定律两边除以 m_i ，可得必须满足

$$-\omega^2 \mathbf{r}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{a_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \quad (1)$$

质心关系还给出

$$\sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -M \mathbf{r}_i. \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1) 的左边并整理，得

$$\sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{G}{a_{ij}^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

由于三个点不共线，从每个顶点指向另外两个顶点的两个矢量线性无关。因此，式 (3) 中的两个系数都必须为零。由于各质量为正，这意味着对于每一对质点，都有

$$\frac{G}{a_{ij}^3} = \frac{\omega^2}{M}.$$

所以

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a, \quad \omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

这就证明了必要性。

为证明充分性，取边长为 a 的等边三角形构型。任一质点的引力加速度为

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{G}{a^3} \sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\frac{GM}{a^3} \mathbf{r}_i.$$

因此，该质点所受引力的合力指向质心，并且当

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

时，恰好提供转动所需的向心加速度。

在质心参考系中，选取初速度为

$$\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i(0), \quad \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\sigma}.$$

相应的匀速转动使等边三角形保持不变，并且在每一时刻都满足牛顿运动方程。因此，这些条件也是充分的。还可以叠加质心的任意匀速直线运动。

解答已与官方解答核对。

题目 3：从电子显微镜到质子显微镜

本题研究如何将一台利用磁场引导电子束（电子束经电势差 $U = 511 \text{ kV}$ 加速）的电子显微镜改造成质子显微镜（其中的质子束经电势差 $-U$ 加速）。为此，请解答以下两个问题：

A. 一个电子离开使其经电势差 U 加速的装置后，进入一个非均匀磁场 $\mathbf{B}$ 区域。该磁场由一组固定线圈 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 产生。各线圈中的已知电流分别为 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 。

为了使质子（先经电势差 $-U$ 加速）沿着与电子相同的轨迹（且运动方向相同）运动，线圈 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 中的电流 $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$ 应分别为多少？

提示： 可以通过寻找使两种情况下描述轨迹的方程相同的条件来解答本题。下列关系式可能有所帮助：

$$\mathbf{p} \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2.$$

B. 如果用质子束代替电子束，上述显微镜的分辨本领将增大或减小多少倍？假设显微镜的分辨本领（即两个点物体的圆形像恰好能够分开时，这两个点物体之间的最小距离）仅取决于粒子的波动性质。

假设电子和质子在加速前的速度均为零，且电子或质子的固有磁矩与磁场之间不存在相互作用。另假设运动粒子发出的电磁辐射可以忽略。

注： 物理学家经常使用 1 电子伏特（1 eV）及其倍数单位，如 1 keV 或 1 MeV，作为能量单位。1 电子伏特是电子通过 1 V 的电势差所获得的能量。

请使用以下数据进行计算：

电子的静止能量：	$E_e = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$
质子的静止能量：	$E_p = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$

题目译自官方英文原文。

答案

- A. 将每个线圈中的电流反向，并将其大小乘以约 35.0：

$$i'_k = -\sqrt{\frac{2E_p + eU}{2E_e + eU}} i_k \simeq -35.0 i_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

- B. 最小可分辨距离变为

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} \simeq 0.0286.$$

因此，最小距离——即题目中称为“分辨本领”的量——减小为原来的 35.0 分之一。分辨精细结构的能力提高至原来的相应倍数；按照通常定义 $1/d$ 表示的分辨本领增大为原来的 35.0 倍。

解答

A. 线圈电流

用 $e > 0$ 表示元电荷，因此 $q_e = -e$, $q_p = +e$ 。加速后，粒子在磁场中的运动遵循相对论形式的洛伦兹力方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}.$$

将方程两边与平行于 $\mathbf{v}$ 的 $\mathbf{p}$ 作标量积，得到

$$\frac{1}{2} \frac{d(p^2)}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

因此，动量的大小 p 保持不变。在题目所述忽略磁矩相互作用和辐射的条件下，即使磁场不均匀，这一结论也成立。

为了在不涉及粒子速率的情况下描述空间轨迹，令 s 为沿运动方向递增的弧长，并令

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

为单位切向量。于是 $\mathbf{p} = p\mathbf{t}$, $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$, 且 $ds/dt = v$ 。因此，

$$pv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = qv\mathbf{t} \times \mathbf{B},$$

所以轨迹方程为

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{q}{p} \mathbf{t} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

对于磁场 $\mathbf{B}$ 中的电子和新磁场 $\mathbf{B}'$ 中的质子，如果

$$\frac{e}{p_p} \mathbf{B}' = -\frac{e}{p_e} \mathbf{B},$$

即

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\frac{p_p}{p_e} \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

则上述方程完全相同。因此，当入射点和入射方向相同时，两种粒子沿同一条有向空间轨迹运动。

线圈系统产生的磁场与各线圈电流呈线性关系。将每个电流乘以同一个因子，就会使各处的磁场都乘以该因子。因此，所需的电流为

$$i'_k = -\frac{p_p}{p_e} i_k.$$

接下来只需计算动量之比。两种粒子都从静止开始加速，并获得相同的动能，

$$K = eU = 511 \text{ keV} = 0.511 \text{ MeV}.$$

由于 $K = E_e$ ，必须对电子采用相对论处理。我们对两种粒子均使用精确的相对论表达式：

$$(K + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

因此，

$$pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)},$$

并且

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{K + 2E_p}{K + 2E_e}}.$$

以 MeV 为能量单位代入数值，得到

$$p_e c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 0.511)} \simeq 0.885 \text{ MeV},$$

$$p_p c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 938)} \simeq 31.0 \text{ MeV}.$$

两者之比为

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{1876.511}{1.533}} = 34.9868 \dots$$

因此

$$\boxed{i'_k \simeq -35.0 i_k \quad (k = 1, \dots, n).}$$

负号至关重要：磁场反向可补偿粒子电荷符号的反转。

B. 分辨本领

德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

对于孔径几何条件固定、分辨率受衍射限制的显微镜，物体上两点的最小可分辨间距与波长成正比。更明确地说，其形式为

$$d_{\min} = C \frac{\lambda}{\sin \alpha},$$

其中 α 为孔径半角， C 取决于所采用的分辨判据。

A 部分求得的磁场缩放关系保持了粒子束的轨迹，因此也保持了几何因子。于是

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} = \frac{p_e}{p_p} = \sqrt{\frac{K + 2E_e}{K + 2E_p}} = \frac{1}{34.9868\dots}.$$

因此，

$$\boxed{d_p \simeq 0.0286 d_e.}$$

质子显微镜能够分辨间距约为原来 35.0 分之一的点。按照题目中的定义，其“分辨本领”指最小可分辨距离，因而按这一倍数缩小。通常以该距离的倒数定义的分辨本领则按同一倍数增大。

解答已与官方解答核对。