

IPhO 1989

Теоретические задачи и решения · Варшава, Польша · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/iphо/1989/

Задача 1: Кипение двух несмешивающихся жидкостей

Рассмотрим две жидкости А и В, нерастворимые друг в друге. Давления p_i ($i = A$ или B) их насыщенных паров с хорошей точностью описываются формулой:

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{\alpha_i}{T} + \beta_i, \quad i = A \text{ или } B,$$

где p_0 обозначает нормальное атмосферное давление, T — абсолютную температуру пара, а α_i и β_i ($i = A$ или B) — некоторые постоянные, зависящие от жидкости. (Символ $\ln$ обозначает натуральный логарифм, то есть логарифм по основанию $e = 2.7182818 \dots$)

Значения отношения p_i/p_0 для жидкостей А и В при температурах 40°C и 90°C приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

$t [^\circ\text{C}]$	$p_i/p_0, i = A$	$p_i/p_0, i = B$
40	0.284	0.07278
90	1.476	0.6918

Погрешностями этих значений можно пренебречь.

А. Определите температуры кипения жидкостей А и В при давлении p_0 .

В. Жидкости А и В налили в сосуд, в котором они образовали слои, показанные на рис. 1.1. Поверхность жидкости В покрыли тонким слоем нелетучей жидкости С, которая нерастворима в жидкостях А и В, а они, в свою очередь, нерастворимы в ней; тем самым было предотвращено свободное испарение с верхней поверхности жидкости В. Отношение молекулярных масс жидкостей А и В (в газовой фазе) равно:

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

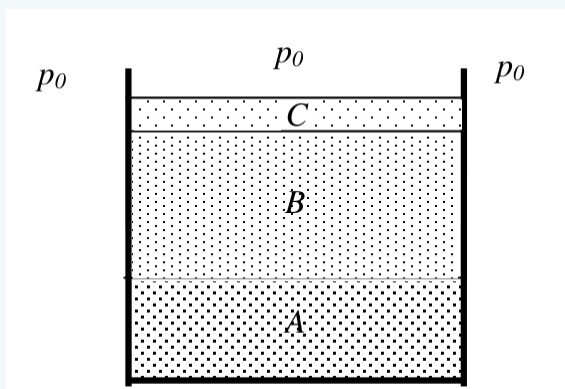


Рис. 1.1

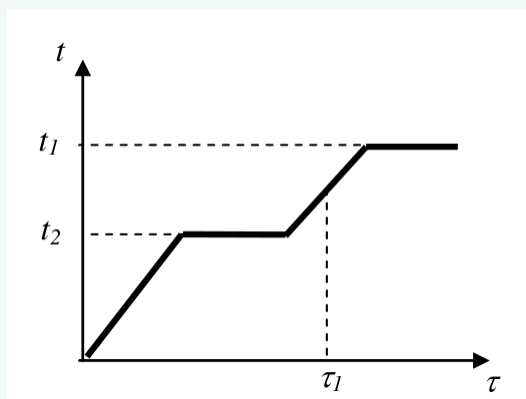


Рис. 1.2

Первоначально массы жидкостей А и В были одинаковыми и каждая составляла $m = 100\text{g}$. Высоты слоёв жидкостей в сосуде и плотности жидкостей достаточно малы, чтобы можно было считать давление в любой точке сосуда практически равным нормальному атмосферному давлению p_0 .

Систему жидкостей в сосуде медленно, но непрерывно и равномерно нагревают. Было установлено, что температура t жидкостей изменялась со временем τ так, как схематически показано на рис. 1.2.

Определите температуры t_1 и t_2 , соответствующие горизонтальным участкам графика, и массы жидкостей А и В в момент времени τ_1 . Температуры следует округлить до ближайшего целого градуса (в $^{\circ}\text{C}$), а массы жидкостей определить с точностью до одной десятой грамма.

ПРИМЕЧАНИЕ: Считайте, что пары жидкостей с хорошей точностью

(1) подчиняются закону Дальтона, согласно которому давление смеси газов равно сумме парциальных давлений газов, образующих смесь, и

(2) могут рассматриваться как идеальные газы вплоть до давлений насыщенных паров.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **А.** Температуры кипения при нормальном атмосферном давлении равны

$$t_A = 76.8^{\circ}\text{C}, \quad t_B = 99.7^{\circ}\text{C}$$

(приблизительно 77°C и 100°C соответственно).

- **В.** С требуемой точностью

$$t_1 = 100^{\circ}\text{C}, \quad t_2 = 67^{\circ}\text{C},$$

$$m_A(\tau_1) = 0.0\text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5\text{ g}.$$

Решение

А. Температуры кипения при нормальном атмосферном давлении

Чистая жидкость кипит, когда давление её насыщенного пара равно внешнему давлению. Поэтому при давлении p_0

$$p_i(T_{b,i}) = p_0 \implies 0 = \frac{\alpha_i}{T_{b,i}} + \beta_i,$$

откуда

$$T_{b,i} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Для определения постоянных положим

$$T_L = 313.15 \text{ K}, \quad T_H = 363.15 \text{ K},$$

а соответствующие табличные отношения давлений обозначим через $r_{i,L}$ и $r_{i,H}$. Вычитая одно из двух уравнений для давления насыщенного пара из другого, получаем

$$\alpha_i = \frac{\ln r_{i,H} - \ln r_{i,L}}{T_H^{-1} - T_L^{-1}}, \quad \beta_i = \ln r_{i,L} - \frac{\alpha_i}{T_L}.$$

Используя приведённые данные, получаем:

Жидкость	α_i (K)	β_i
A	-3748.4907	10.711491
B	-5121.6396	13.734914

Следовательно,

$$T_{b,A} = 349.9504 \text{ K}, \quad T_{b,B} = 372.8920 \text{ K}.$$

Переходя к шкале Цельсия, получаем

$$t_A = 76.8^\circ\text{C}, \quad t_B = 99.7^\circ\text{C}.$$

В. Два горизонтальных участка и оставшиеся массы

Медленное нагревание позволяет рассматривать процесс как квазистатический и использовать равновесные давления насыщенных паров. Согласно условию, гидростатическими перепадами давления можно пренебречь. Нелетучий слой С препятствует свободному испарению с поверхности.

На границе раздела А–В пузырёк пара, находящийся в равновесии с обеими жидкостями, содержит насыщенный пар каждой из них. Поскольку жидкости не смешиваются, каждая из них создаёт своё давление насыщенного пара при общей температуре. По закону Дальтона

$$p_{\text{bubble}} = p_A(T) + p_B(T).$$

Следовательно, кипение начинается при температуре T_2 нижнего горизонтального участка, определяемой условием

$$p_A(T_2) + p_B(T_2) = p_0.$$

Используя зависимости давления насыщенного пара с найденными коэффициентами, получаем

$$\exp\left(\frac{\alpha_A}{T_2} + \beta_A\right) + \exp\left(\frac{\alpha_B}{T_2} + \beta_B\right) = 1.$$

Численное решение даёт

$$T_2 = 340.1208 \text{ K}, \quad t_2 = 66.9708^\circ\text{C}.$$

Таким образом,

$$\boxed{t_2 = 67^\circ\text{C}}.$$

При этой температуре

$$\frac{p_A}{p_0} = 0.7337662, \quad \frac{p_B}{p_0} = 0.2662338.$$

Пока обе жидкости присутствуют, давления их насыщенных паров зависят только от температуры, поэтому кипение продолжается при этой постоянной температуре. Подводимая теплота расходуется на парообразование.

Чтобы определить, какая жидкость полностью испарится первой, рассмотрим объём V выходящей смеси паров. Уравнение состояния идеального газа для каждого компонента даёт

$$p_A V = n_A R T_2, \quad p_B V = n_B R T_2,$$

откуда

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{p_A}{p_B}.$$

Отношение молекулярных масс равно также отношению молярных масс. Поэтому положительные величины масс, теряемых при испарении, удовлетворяют соотношению

$$\frac{dm_A^{\text{evap}}}{dm_B^{\text{evap}}} = \frac{\mu_A p_A}{\mu_B p_B} = \gamma \frac{p_A}{p_B}.$$

Численно

$$\gamma \frac{p_A}{p_B} = 8 \frac{0.7337662}{0.2662338} = 22.0488.$$

Это отношение остаётся постоянным на всём нижнем горизонтальном участке. Поскольку начальные массы одинаковы, **жидкость А полностью испаряется первой**. Когда испарятся все её 100 g, масса испарившейся жидкости В составит

$$\Delta m_B = \frac{100}{22.0488} \text{ g} = 4.5354 \text{ g}.$$

Следовательно, оставшиеся массы жидкостей равны

$$m_A = 0, \quad m_B = 100 - 4.5354 = 95.4646 \text{ g}.$$

После полного испарения А давления пара одной лишь жидкости В недостаточно для кипения при T_2 , поскольку

$$p_B(T_2) = 0.2662338 p_0 < p_0.$$

Кипение прекращается, и температура растёт до тех пор, пока В не достигнет своей температуры кипения при нормальном атмосферном давлении. Поэтому верхнему горизонтальному участку соответствует температура

$$t_1 = t_B = 99.7420^\circ\text{C},$$

которая после округления равна

$$\boxed{t_1 = 100^\circ\text{C}}.$$

Отмеченный момент времени τ_1 находится на восходящем участке между двумя горизонтальными участками. На этой стадии жидкость А уже исчезла, кипение В ещё не возобновилось, а слой С препятствует свободному испарению с поверхности. Таким образом, массы жидкостей остаются такими же, как в конце нижнего горизонтального участка:

$$m_A(\tau_1) = 0.0 \text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5 \text{ g}.$$

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Три гравитирующие массы, вращающиеся как твёрдое тело

Три не лежащие на одной прямой материальные точки P_1 , P_2 и P_3 с известными массами m_1 , m_2 и m_3 взаимодействуют друг с другом только посредством сил взаимного гравитационного притяжения; они изолированы в свободном пространстве и не взаимодействуют ни с какими другими телами. Обозначим через σ ось, проходящую через центр масс трёх точек перпендикулярно плоскости треугольника $P_1P_2P_3$. Каким условиям должны удовлетворять угловые скорости ω системы (вокруг оси σ) и расстояния:

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13},$$

чтобы форма и размеры треугольника $P_1P_2P_3$ оставались неизменными при движении системы, то есть при каких условиях система вращается вокруг оси σ как твёрдое тело?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 2:** Треугольник должен быть равносторонним:

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a > 0.$$

Все три материальные точки должны вращаться с одной и той же постоянной угловой скоростью, модуль которой удовлетворяет соотношению

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}.$$

Возможны оба направления вращения. Эти условия необходимы и достаточны при любых положительных массах; массы не обязательно должны быть равны.

Решение

Задача 2

Воспользуемся законами движения Ньютона и законом всемирного тяготения для материальных точек. Введём обозначение

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Внешние силы отсутствуют, поэтому центр масс движется равномерно и прямолинейно. Будем работать в инерциальной системе отсчёта, в которой он покоится, и обозначим через $\mathbf{r}_i$ радиус-вектор точки P_i относительно центра масс. Тогда

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

При вращении как твёрдого тела вокруг перпендикулярной оси σ все три материальные точки имеют общую угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$. Их момент импульса относительно центра масс равен

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad I = \sum_{i=1}^3 m_i |\mathbf{r}_i|^2.$$

Гравитационные силы являются внутренними и центральными, поэтому их суммарный момент равен нулю и $\mathbf{L}$ сохраняется. Поскольку у неизменного треугольника величина I постоянна, $\boldsymbol{\omega}$ также постоянна. Следовательно,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\omega^2 \mathbf{r}_i.$$

Таким образом, второй закон Ньютона после деления на m_i требует выполнения равенства

$$-\omega^2 \mathbf{r}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{a_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \quad (1)$$

Из соотношения, определяющего центр масс, также следует

$$\sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -M \mathbf{r}_i. \quad (2)$$

Подставляя (2) в левую часть (1) и перегруппировывая слагаемые, получаем

$$\sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{G}{a_{ij}^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

В каждой вершине два вектора, направленные к другим вершинам, линейно независимы, поскольку три точки не лежат на одной прямой. Поэтому оба коэффициента в (3) должны обращаться в нуль. При положительных массах отсюда для каждой пары следует

$$\frac{G}{a_{ij}^3} = \frac{\omega^2}{M}.$$

Следовательно,

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a, \quad \omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

Тем самым необходимость доказана.

Чтобы доказать достаточность, рассмотрим конфигурацию в виде равностороннего треугольника со стороной a . Гравитационное ускорение любой материальной точки равно

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{G}{a^3} \sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\frac{GM}{a^3} \mathbf{r}_i.$$

Таким образом, равнодействующая гравитационных сил, действующих на эту точку, направлена к центру масс и обеспечивает в точности то центростремительное ускорение, которое требуется при

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

Выберем начальные скорости в системе отсчёта центра масс в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i(0), \quad \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\sigma}.$$

Соответствующее равномерное вращение сохраняет равносторонний треугольник и удовлетворяет уравнениям Ньютона в любой момент времени. Следовательно, эти условия также достаточны. К этому движению можно добавить произвольное равномерное прямолинейное движение центра масс.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: От электронного микроскопа к протонному микроскопу

В задаче исследуется возможность преобразования электронного микроскопа с магнитным управлением электронным пучком (ускоряемым разностью потенциалов $U = 511 \text{ kV}$) в протонный микроскоп (в котором протонный пучок ускоряется разностью потенциалов $-U$). Для этого решите следующие две задачи:

А. Электрон, покинув устройство, в котором он ускорялся разностью потенциалов U , попадает в область с неоднородным полем $\mathbf{B}$, создаваемым системой неподвижных катушек $L_1, L_2, \dots, L_n$. Известные токи в катушках равны соответственно $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Какими должны быть токи $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$ в катушках $L_1, L_2, \dots, L_n$, чтобы протон (предварительно ускоренный разностью потенциалов $-U$) двигался по той же траектории (и в том же направлении), что и электрон?

УКАЗАНИЕ: Задачу можно решить, найдя условие, при котором уравнение, описывающее траекторию, одинаково в обоих случаях. Может оказаться полезным следующее соотношение:

$$\mathbf{p} \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2.$$

В. Во сколько раз увеличится или уменьшится разрешающая способность описанного выше микроскопа, если заменить электронный пучок протонным? Считайте, что разрешающая способность микроскопа (то есть наименьшее расстояние между двумя точечными объектами, при котором их круглые изображения ещё можно различить по отдельности) зависит только от волновых свойств частиц.

Считайте, что скорости электронов и протонов до ускорения равны нулю и что взаимодействие собственного магнитного момента электронов или протонов с магнитным полем отсутствует. Считайте также, что электромагнитным излучением движущихся частиц можно пренебречь.

ПРИМЕЧАНИЕ: Физики очень часто используют в качестве единицы энергии 1 электронвольт (1 эВ) и кратные ему единицы, такие как 1 кэВ или 1 МэВ. 1 электронвольт — это энергия, которую приобретает электрон, прошедший разность потенциалов, равную 1 В.

Выполните расчёты, используя следующие данные:

Энергия покоя электрона:	$E_e = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$
Энергия покоя протона:	$E_p = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **А.** Измените направление тока в каждой катушке на противоположное и увеличьте его величину приблизительно в 35.0 раза:

$$i'_k = -\sqrt{\frac{2E_p + eU}{2E_e + eU}} i_k \simeq -35.0 i_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

- **В.** Минимальное разрешаемое расстояние становится равным

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} \simeq 0.0286.$$

Таким образом, минимальное расстояние — величина, названная в условии «разрешающей способностью», — **уменьшается в 35.0 раза**. Способность различать мелкие детали улучшается во столько же раз; разрешающая способность, определяемая обычным образом как $1/d$, увеличивается в 35.0 раза.

Решение

А. Токи в катушках

Обозначим через $e > 0$ элементарный заряд, так что $q_e = -e$ и $q_p = +e$. После ускорения движение в магнитном поле подчиняется релятивистскому уравнению движения под действием силы Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}.$$

Скалярно умножая это уравнение на $\mathbf{p}$, параллельный $\mathbf{v}$, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d(p^2)}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Следовательно, модуль импульса p остаётся постоянным. Это справедливо и для неоднородного магнитного поля при принятом в условии пренебрежении взаимодействием магнитного момента с полем и излучением.

Чтобы описать пространственную траекторию независимо от скорости частицы, обозначим через s длину дуги, возрастающую в направлении движения, и пусть

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

— единичный касательный вектор. Тогда $\mathbf{p} = p\mathbf{t}$, $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ и $ds/dt = v$. Следовательно,

$$pv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = qv \mathbf{t} \times \mathbf{B},$$

так что уравнения траектории имеют вид

$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{q}{p} \mathbf{t} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).}$$

Для электрона в поле $\mathbf{B}$ и протона в новом поле $\mathbf{B}'$ эти уравнения совпадают, если

$$\frac{e}{p_p} \mathbf{B}' = -\frac{e}{p_e} \mathbf{B},$$

или

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\frac{p_p}{p_e} \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Поэтому при одинаковых точке входа и направлении движения обе частицы движутся по одной и той же пространственной траектории в одном и том же направлении.

Магнитное поле системы катушек линейно зависит от токов в них. Умножение каждого тока на один и тот же коэффициент умножает поле во всех точках на этот коэффициент. Таким образом, требуемые токи равны

$$i'_k = -\frac{p_p}{p_e} i_k.$$

Остаётся вычислить отношение импульсов. Обе частицы начинают движение из состояния покоя и приобретают одинаковую кинетическую энергию,

$$K = eU = 511 \text{ keV} = 0.511 \text{ MeV}.$$

Электрон необходимо рассматривать релятивистски, поскольку $K = E_e$. Для обеих частиц воспользуемся точным релятивистским выражением:

$$(K + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Следовательно,

$$pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)},$$

и

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{K + 2E_p}{K + 2E_e}}.$$

Подставляя численные значения энергий в МэВ, получаем

$$p_e c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 0.511)} \simeq 0.885 \text{ MeV},$$

$$p_p c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 938)} \simeq 31.0 \text{ MeV}.$$

Отношение равно

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{1876.511}{1.533}} = 34.9868 \dots$$

Отсюда

$$i'_k \simeq -35.0 i_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Знак минус принципиально важен: изменение направления магнитного поля на противоположное компенсирует изменение знака заряда частицы.

В. Разрешающая способность

Длина волны де Бройля равна

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Для микроскопа, разрешение которого ограничено дифракцией, при неизменной геометрии апертуры минимальное разрешаемое расстояние между объектами пропорционально длине волны. Более конкретно, оно имеет вид

$$d_{\min} = C \frac{\lambda}{\sin \alpha},$$

где α — половина угла раскрытия апертуры, а C зависит от критерия разрешения.

Найденное в части А масштабирование поля сохраняет траектории частиц пучка и, следовательно, геометрические множители. Таким образом,

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} = \frac{p_e}{p_p} = \sqrt{\frac{K + 2E_e}{K + 2E_p}} = \frac{1}{34.9868 \dots}.$$

Следовательно,

$$d_p \simeq 0.0286 d_e.$$

Протонный микроскоп позволяет различать точки, расположенные приблизительно в 35.0 раза ближе друг к другу. Согласно определению в условии, его «разрешающая способность», то есть наименьшее разрешаемое расстояние, уменьшается во столько же раз. Разрешающая способность в обычном определении как обратная величина увеличивается в то же число раз.

Решение проверено по официальному решению.