

IPhO 1989

Problemas teóricos y soluciones · Varsovia, Polonia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1989/

Problema 1: Ebullición de dos líquidos inmiscibles

Consideremos dos líquidos A y B insolubles entre sí. Las presiones p_i ($i = A$ o B) de sus vapores saturados obedecen, con buena aproximación, la fórmula:

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{\alpha_i}{T} + \beta_i, \quad i = A \text{ o } B,$$

donde p_0 denota la presión atmosférica normal, T , la temperatura absoluta del vapor, y α_i y β_i ($i = A$ o B), ciertas constantes que dependen del líquido. (El símbolo $\ln$ denota el logaritmo natural, es decir, el logaritmo en base $e = 2.7182818 \dots$)

Los valores del cociente p_i/p_0 para los líquidos A y B a las temperaturas de 40°C y 90°C se dan en la tabla 1.1.

Tabla 1.1

$t [^\circ\text{C}]$	$p_i/p_0, i = A$	$p_i/p_0, i = B$
40	0.284	0.07278
90	1.476	0.6918

Los errores de estos valores son despreciables.

A. Determine las temperaturas de ebullición de los líquidos A y B a la presión p_0 .

B. Los líquidos A y B se vertieron en un recipiente en el que se formaron las capas mostradas en la Fig. 1.1. La superficie del líquido B se ha cubierto con una capa fina de un líquido no volátil C, que es insoluble en los líquidos A y B y viceversa, impidiendo así toda evaporación libre desde la superficie superior del líquido B. La razón entre las masas moleculares de los líquidos A y B (en fase gaseosa) es:

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

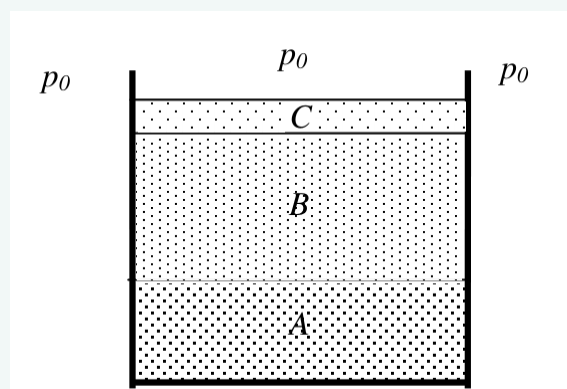


Fig. 1.1

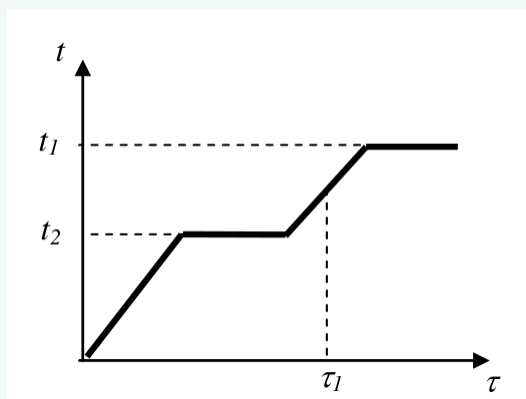


Fig. 1.2

Las masas de los líquidos A y B eran inicialmente iguales, cada una de ellas igual a $m = 100\text{g}$. Las alturas de las capas de los líquidos en el recipiente y las densidades de los líquidos son lo suficientemente pequeñas como para suponer que la presión en cualquier punto del recipiente es prácticamente igual a la presión atmosférica normal p_0 .

El sistema de líquidos del recipiente se calienta lenta, pero continua y uniformemente. Se observó que la temperatura t de los líquidos variaba con el tiempo τ como se muestra esquemáticamente en la Fig. 1.2.

Determine las temperaturas t_1 y t_2 correspondientes a los tramos horizontales del diagrama y las masas de los líquidos A y B en el instante τ_1 . Las temperaturas deben redondearse al grado más cercano (en $^{\circ}\text{C}$) y las masas de los líquidos deben determinarse con una precisión de una décima de gramo.

OBSERVACIÓN: Suponga que los vapores de los líquidos, con buena aproximación,

- (1) obedecen la ley de Dalton, según la cual la presión de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de los gases que componen la mezcla, y
- (2) pueden tratarse como gases ideales hasta las presiones correspondientes a los vapores saturados.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A.** Las temperaturas normales de ebullición son

$$t_A = 76.8^{\circ}\text{C}, \quad t_B = 99.7^{\circ}\text{C}$$

(aproximadamente 77°C y 100°C , respectivamente).

- **B.** Con la precisión solicitada,

$$t_1 = 100^{\circ}\text{C}, \quad t_2 = 67^{\circ}\text{C},$$

$$m_A(\tau_1) = 0.0\text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5\text{ g}.$$

Solución

A. Temperaturas normales de ebullición

Para un líquido puro, la ebullición se produce cuando su presión de vapor saturado iguala la presión externa. Por tanto, a la presión p_0 ,

$$p_i(T_{b,i}) = p_0 \implies 0 = \frac{\alpha_i}{T_{b,i}} + \beta_i,$$

de modo que

$$T_{b,i} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

Para determinar las constantes, sean

$$T_L = 313.15 \text{ K}, \quad T_H = 363.15 \text{ K},$$

y denotemos los correspondientes cocientes de presión tabulados por $r_{i,L}$ y $r_{i,H}$. Al restar las dos ecuaciones de presión de vapor se obtiene

$$\alpha_i = \frac{\ln r_{i,H} - \ln r_{i,L}}{T_H^{-1} - T_L^{-1}}, \quad \beta_i = \ln r_{i,L} - \frac{\alpha_i}{T_L}.$$

Utilizando los datos proporcionados:

Líquido	α_i (K)	β_i
A	-3748.4907	10.711491
B	-5121.6396	13.734914

Por tanto,

$$T_{b,A} = 349.9504 \text{ K}, \quad T_{b,B} = 372.8920 \text{ K}.$$

Al convertir a grados Celsius,

$$t_A = 76.8^\circ\text{C}, \quad t_B = 99.7^\circ\text{C}.$$

B. Las dos mesetas y las masas restantes

El calentamiento lento permite un tratamiento cuasiestático utilizando las presiones de vapor de equilibrio. Como se indica en el enunciado, las diferencias de presión hidrostática son despreciables. La capa no volátil C impide la evaporación libre desde la superficie.

En la interfaz A-B, una burbuja de vapor en equilibrio con ambos líquidos contiene vapor saturado de cada uno de ellos. Como los líquidos son inmiscibles, cada uno aporta su propia presión de vapor saturado a la temperatura común. La ley de Dalton da

$$p_{\text{bubble}} = p_A(T) + p_B(T).$$

En consecuencia, la ebullición comienza a la temperatura T_2 de la meseta inferior, determinada por

$$p_A(T_2) + p_B(T_2) = p_0.$$

Utilizando las leyes de presión de vapor ajustadas,

$$\exp\left(\frac{\alpha_A}{T_2} + \beta_A\right) + \exp\left(\frac{\alpha_B}{T_2} + \beta_B\right) = 1.$$

La solución numérica da

$$T_2 = 340.1208 \text{ K}, \quad t_2 = 66.9708^\circ\text{C}.$$

Por tanto,

$$\boxed{t_2 = 67^\circ\text{C}}.$$

A esta temperatura,

$$\frac{p_A}{p_0} = 0.7337662, \quad \frac{p_B}{p_0} = 0.2662338.$$

Mientras queden ambos líquidos, sus presiones de vapor saturado dependen únicamente de la temperatura, por lo que la ebullición continúa a esta temperatura fija. El calor suministrado aporta el calor latente de vaporización.

Para determinar qué líquido se agota primero, consideremos un volumen V de la mezcla de vapores que escapa. La ley de los gases ideales para cada componente da

$$p_A V = n_A R T_2, \quad p_B V = n_B R T_2,$$

y, por tanto,

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{p_A}{p_B}.$$

La razón entre las masas moleculares es también la razón entre las masas molares. Por tanto, las masas perdidas por evaporación, tomadas como positivas, satisfacen

$$\frac{dm_A^{\text{evap}}}{dm_B^{\text{evap}}} = \frac{\mu_A p_A}{\mu_B p_B} = \gamma \frac{p_A}{p_B}.$$

Numéricamente,

$$\gamma \frac{p_A}{p_B} = 8 \frac{0.7337662}{0.2662338} = 22.0488.$$

Esta razón permanece constante durante toda la meseta inferior. Puesto que las masas iniciales son iguales, **A se agota primero**. Cuando se han evaporado sus 100 g por completo, la masa de B perdida es

$$\Delta m_B = \frac{100}{22.0488} \text{ g} = 4.5354 \text{ g}.$$

Por tanto, las masas de líquido restantes son

$$m_A = 0, \quad m_B = 100 - 4.5354 = 95.4646 \text{ g}.$$

Una vez agotado A, B por sí solo no tiene suficiente presión de vapor para hervir a T_2 , ya que

$$p_B(T_2) = 0.2662338 p_0 < p_0.$$

La ebullición se detiene y la temperatura aumenta hasta que B alcanza su temperatura normal de ebullición. Por tanto, la meseta superior corresponde a

$$t_1 = t_B = 99.7420^\circ\text{C},$$

que se redondea a

$$\boxed{t_1 = 100^\circ\text{C}}.$$

El instante señalado τ_1 se encuentra en el tramo ascendente entre las dos mesetas. En esta etapa A ha desaparecido, B aún no ha vuelto a hervir y la capa C impide la evaporación libre desde la superficie. Por tanto, las masas de líquido siguen siendo las del final de la meseta inferior:

$$m_A(\tau_1) = 0.0 \text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5 \text{ g}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: Tres masas que interactúan gravitatoriamente y giran como un cuerpo rígido

Tres puntos no colineales P_1 , P_2 y P_3 , con masas conocidas m_1 , m_2 y m_3 , interactúan entre sí únicamente mediante sus fuerzas gravitatorias mutuas; están aislados en el espacio libre y no interactúan con ningún otro cuerpo. Sea σ el eje que pasa por el centro de masas de las tres masas y es perpendicular al triángulo $P_1P_2P_3$. ¿Qué condiciones deben cumplir las velocidades angulares ω del sistema (alrededor del eje σ) y las distancias:

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13},$$

para que la forma y el tamaño del triángulo $P_1P_2P_3$ permanezcan invariables durante el movimiento del sistema, es decir, en qué condiciones gira el sistema alrededor del eje σ como un cuerpo rígido?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 2:** El triángulo debe ser equilátero:

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a > 0.$$

Las tres masas deben girar con la misma velocidad angular constante, cuyo módulo satisface

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}.$$

Cualquiera de los dos sentidos de giro es posible. Estas condiciones son necesarias y suficientes para cualesquiera masas positivas; no es necesario que las masas sean iguales.

Solución

Problema 2

Utilizamos las leyes del movimiento de Newton y la gravitación newtoniana para masas puntuales. Definimos

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

No hay fuerza externa, por lo que el centro de masas se mueve uniformemente. Trabajamos en un sistema de referencia inercial en el que está en reposo, y denotamos por $\mathbf{r}_i$ la posición de P_i respecto a él. Entonces

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

Para una rotación rígida alrededor del eje perpendicular σ , las tres masas tienen una velocidad angular común $\boldsymbol{\omega}$. Su momento angular respecto al centro de masas es

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad I = \sum_{i=1}^3 m_i |\mathbf{r}_i|^2.$$

Las fuerzas gravitatorias son internas y centrales, por lo que su momento total es nulo y $\mathbf{L}$ se conserva. Como un triángulo rígido tiene un I constante, $\boldsymbol{\omega}$ es constante. Por consiguiente,

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\omega^2 \mathbf{r}_i.$$

Por tanto, la segunda ley de Newton, tras dividir por m_i , exige

$$-\omega^2 \mathbf{r}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{a_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \quad (1)$$

La relación del centro de masas también da

$$\sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -M \mathbf{r}_i. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en el miembro izquierdo de (1) y reordenando,

$$\sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{G}{a_{ij}^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

En cada vértice, los dos vectores dirigidos hacia los otros vértices son linealmente independientes, ya que los tres puntos no son colineales. Por tanto, ambos coeficientes de (3) deben anularse. Para masas positivas, esto implica, para cada par,

$$\frac{G}{a_{ij}^3} = \frac{\omega^2}{M}.$$

Por lo tanto,

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a, \quad \omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

Esto demuestra la necesidad.

Para demostrar la suficiencia, tomamos una configuración equilátera de lado a . La aceleración gravitatoria de cualquier masa es

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{G}{a^3} \sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\frac{GM}{a^3} \mathbf{r}_i.$$

Así, la fuerza gravitatoria resultante sobre ella apunta hacia el centro de masas y proporciona exactamente la aceleración centrípeta necesaria cuando

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

Elegimos las velocidades iniciales en el sistema de referencia del centro de masas como

$$\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i(0), \quad \boldsymbol{\omega} \parallel \sigma.$$

La rotación uniforme correspondiente conserva el triángulo equilátero y satisface las ecuaciones de Newton en todo instante. Por tanto, las condiciones también son suficientes. Se puede añadir un movimiento uniforme arbitrario del centro de masas.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: De un microscopio electrónico a un microscopio de protones

El problema trata del estudio de la transformación de un microscopio electrónico con guiado magnético del haz de electrones (que se acelera mediante la diferencia de potencial $U = 511 \text{ kV}$) en un microscopio de protones (en el que el haz de protones se acelera mediante la diferencia de potencial $-U$). Para ello, resuelva los dos problemas siguientes:

A. Un electrón, tras salir de un dispositivo que lo ha acelerado mediante la diferencia de potencial U , entra en una región con un campo no homogéneo $\mathbf{B}$ generado por un sistema de bobinas estacionarias $L_1, L_2, \dots, L_n$. Las corrientes conocidas en las bobinas son $i_1, i_2, \dots, i_n$, respectivamente.

¿Cuáles deben ser las corrientes $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$ en las bobinas $L_1, L_2, \dots, L_n$ para guiar al protón (acelerado inicialmente mediante la diferencia de potencial $-U$) a lo largo de la misma trayectoria (y en el mismo sentido) que el electrón?

INDICACIÓN: El problema puede resolverse encontrando una condición para que la ecuación que describe la trayectoria sea la misma en ambos casos. Puede resultar útil emplear la relación:

$$\mathbf{p} \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2.$$

B. ¿Cuántas veces aumentaría o disminuiría el poder de resolución del microscopio anterior si se sustituyera el haz de electrones por el haz de protones? Suponga que el poder de resolución del microscopio (es decir, la distancia mínima entre dos objetos puntuales cuyas imágenes circulares apenas pueden distinguirse por separado) depende únicamente de las propiedades ondulatorias de las partículas.

Suponga que las velocidades de los electrones y de los protones antes de su aceleración son nulas y que no hay interacción entre el momento magnético propio de los electrones o de los protones y el campo magnético. Suponga también que puede despreciarse la radiación electromagnética emitida por las partículas en movimiento.

NOTA: Los físicos utilizan muy a menudo 1 electronvoltio (1 eV) y sus múltiplos, como 1 keV o 1 MeV, como unidad de energía. 1 electronvoltio es la energía que adquiere un electrón al atravesar una diferencia de potencial igual a 1 V.

Realice los cálculos utilizando los siguientes datos:

Energía en reposo del electrón:	$E_e = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$
Energía en reposo del protón:	$E_p = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$

Respuestas

- **A.** Invierta el sentido de la corriente en cada bobina y multiplique su valor absoluto por aproximadamente 35.0:

$$i'_k = -\sqrt{\frac{2E_p + eU}{2E_e + eU}} i_k \simeq -35.0 i_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

- **B.** La distancia mínima resoluble pasa a ser

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} \simeq 0.0286.$$

Por tanto, la distancia mínima —la magnitud denominada «poder de resolución» en el enunciado— **disminuye en un factor de 35.0**. La capacidad para distinguir detalles finos mejora en ese factor; el poder de resolución definido convencionalmente como $1/d$ aumenta en un factor de 35.0.

Solución

A. Corrientes en las bobinas

Sea $e > 0$ la carga elemental, de modo que $q_e = -e$ y $q_p = +e$. Tras la aceleración, el movimiento en el campo magnético obedece a la ecuación relativista de la fuerza de Lorentz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}.$$

Al tomar el producto escalar con $\mathbf{p}$, que es paralelo a $\mathbf{v}$, se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d(p^2)}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Por tanto, el módulo del momento lineal p permanece constante. Esto se cumple incluso cuando el campo magnético no es homogéneo, bajo las hipótesis indicadas de despreciar las interacciones del momento magnético y la radiación.

Para describir la trayectoria espacial con independencia de la rapidez de la partícula, sea s la longitud de arco creciente en el sentido del movimiento, y sea

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

el vector tangente unitario. Entonces $\mathbf{p} = p\mathbf{t}$, $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ y $ds/dt = v$. En consecuencia,

$$pv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = qv\mathbf{t} \times \mathbf{B},$$

por lo que las ecuaciones de la trayectoria son

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{q}{p} \mathbf{t} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Para el electrón en $\mathbf{B}$ y el protón en un nuevo campo $\mathbf{B}'$, estas ecuaciones coinciden si

$$\frac{e}{p_p} \mathbf{B}' = -\frac{e}{p_e} \mathbf{B},$$

o bien

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\frac{p_p}{p_e} \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Con el mismo punto de entrada y la misma dirección y sentido iniciales, ambas partículas siguen, por tanto, la misma trayectoria espacial orientada.

El campo magnético del sistema de bobinas depende linealmente de sus corrientes. Al multiplicar todas las corrientes por un mismo factor, el campo queda multiplicado por ese factor en todos los puntos. Por tanto, la elección requerida es

$$i'_k = -\frac{p_p}{p_e} i_k.$$

Queda por calcular la razón entre los momentos lineales. Ambas partículas parten del reposo y adquieren la misma energía cinética,

$$K = eU = 511 \text{ keV} = 0.511 \text{ MeV}.$$

El electrón debe tratarse relativísticamente porque $K = E_e$. Utilizamos la expresión relativista exacta para ambas partículas:

$$(K + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Por tanto,

$$pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)},$$

y

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{K + 2E_p}{K + 2E_e}}.$$

Numéricamente, utilizando energías en MeV,

$$p_e c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 0.511)} \simeq 0.885 \text{ MeV},$$

$$p_p c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 938)} \simeq 31.0 \text{ MeV}.$$

La razón es

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{1876.511}{1.533}} = 34.9868 \dots$$

Así pues,

$$\boxed{i'_k \simeq -35.0 i_k \quad (k = 1, \dots, n).}$$

El signo negativo es esencial: invertir el campo magnético compensa el cambio de signo de la carga de la partícula.

B. Poder de resolución

La longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Para un microscopio limitado por la difracción con una geometría de apertura fija, la separación mínima resoluble entre objetos es proporcional a la longitud de onda. Más explícitamente, tiene la forma

$$d_{\min} = C \frac{\lambda}{\sin \alpha},$$

donde α es el semiángulo de apertura y C depende del criterio de resolución.

El cambio de escala del campo obtenido en la parte A conserva las trayectorias del haz y, por tanto, los factores geométricos. Así,

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} = \frac{p_e}{p_p} = \sqrt{\frac{K + 2E_e}{K + 2E_p}} = \frac{1}{34.9868 \dots}.$$

Por tanto,

$$d_p \simeq 0.0286 d_e.$$

El microscopio de protones puede distinguir puntos aproximadamente 35.0 veces más próximos entre sí. Según la definición del enunciado, su «poder de resolución», entendido como la distancia mínima resoluble, disminuye en ese factor. El poder de resolución convencional, definido como el inverso de esa distancia, aumenta en el mismo factor.

La solución se comprobó con la solución oficial.