

المسألة 1: غليان سائلين غير قابلين للامتزاج

لنعتبر سائلين A و B لا يذوب أحدهما في الآخر. تخضع ضغوط بخاريهما المشبعين p_i (حيث $i = A$ أو B)، بتقريب جيد، للعلاقة:

$$\ln(p_i/p_0) = \frac{\alpha_i}{T} + \beta_i, \quad i = A \text{ أو } B,$$

حيث يرمز p_0 إلى الضغط الجوي النظامي، و T إلى درجة الحرارة المطلقة للبخر، و α_i و β_i (حيث $i = A$ أو B) إلى ثابتين يعتمدان على السائل. (يرمز الرمز $\ln$ إلى اللوغاريتم الطبيعي، أي اللوغاريتم ذي الأساس $e = 2.7182818\dots$)

ترد قيم النسبة p_i/p_0 للسائلين A و B عند درجتَي الحرارة 40°C و 90°C في الجدول 1.1.

الجدول 1.1

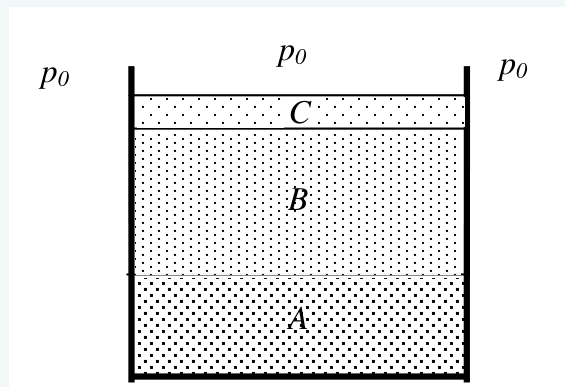
$i = B, p_i/p_0$	$i = A, p_i/p_0$	$t [^\circ\text{C}]$
0.07278	0.284	40
0.6918	1.476	90

أخطاء هذه القيم مهملة.

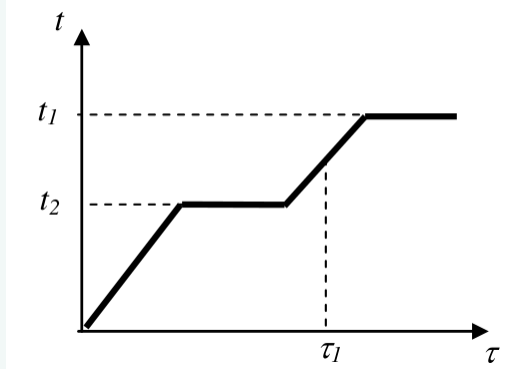
A. أوجد درجتَي غليان السائلين A و B تحت الضغط p_0 .

B. صُبَّ السائلان A و B في وعاء فتشكَّلت فيه الطبقات المبينة في الشكل 1.1. غُطِّي سطح السائل B بطبقة رقيقة من سائل غير متطاير C، لا يذوب في السائلين A و B ولا يذوبان فيه، مما يمنع أي تبخر حر من السطح العلوي للسائل B. نسبة الكتلتين الجزيئيتين للسائلين A و B (في الطور الغازي) هي:

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$



الشكل 1.1



الشكل 1.2

كانت كتلتا السائلين A و B متساويتين في البداية، وتساوي كل منهما $m = 100\text{g}$. ارتفاعات طبقات السوائل في الوعاء وكثافات السوائل صغيرة بما يكفي لافتراض أن الضغط عند أي نقطة في الوعاء يساوي عملياً الضغط الجوي النظامي p_0 . تُسخَّن منظومة السوائل في الوعاء ببطء، ولكن بصورة مستمرة ومنتظمة. وقد تبين أن درجة حرارة السوائل t تتغير مع الزمن τ على النحو المبين تخطيطياً في الشكل 1.2.

أوجد درجتَي الحرارة t_1 و t_2 الموافقتين للجزأين الأفقيين من المخطط، وكتلتي السائلين A و B عند الزمن τ_1 . ينبغي تقريب درجات الحرارة إلى أقرب درجة (بوحدة $^{\circ}\text{C}$)، وتحديد كتلتي السائلين بدقة عُشر غرام.

ملاحظة: افترض أن أبخرة السوائل، بتقريب جيد،

- (1) تخضع لقانون دالتون الذي ينص على أن ضغط مزيج من الغازات يساوي مجموع الضغوط الجزئية للغازات المكوّنة للمزيج، وأنه
- (2) يمكن معاملتها بوصفها غازات مثالية حتى الضغوط الموافقة للأبخرة المشبعة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- A. درجتا الغليان النظاميتان هما

$$t_A = 76.8^{\circ}\text{C}, \quad t_B = 99.7^{\circ}\text{C}$$

(أي نحو 77°C و 100°C ، على الترتيب).

- B. بالدقة المطلوبة،

$$t_1 = 100^{\circ}\text{C}, \quad t_2 = 67^{\circ}\text{C},$$

$$m_A(\tau_1) = 0.0\text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5\text{ g}.$$

الحل

A. درجتا الغليان النظاميتان

يغلي السائل النقي عندما يصبح ضغط بخاره المشبع مساوياً للضغط الخارجي. ومن ثم، تحت الضغط p_0 ,

$$p_i(T_{b,i}) = p_0 \implies 0 = \frac{\alpha_i}{T_{b,i}} + \beta_i,$$

وعليه

$$T_{b,i} = -\frac{\alpha_i}{\beta_i}.$$

لتحديد الثوابت، لنضع

$$T_L = 313.15 \text{ K}, \quad T_H = 363.15 \text{ K},$$

ولنرمز إلى نسبتي الضغط الموافقتين الواردتين في الجدول بالرمزين $r_{i,H}$ و $r_{i,L}$. بطرح معادلتنا ضغط البخار نحصل على

$$\alpha_i = \frac{\ln r_{i,H} - \ln r_{i,L}}{T_H^{-1} - T_L^{-1}}, \quad \beta_i = \ln r_{i,L} - \frac{\alpha_i}{T_L}.$$

باستخدام المعطيات المقدمة:

السائل	α_i (K)	β_i
A	-3748.4907	10.711491
B	-5121.6396	13.734914

إذن،

$$T_{b,A} = 349.9504 \text{ K}, \quad T_{b,B} = 372.8920 \text{ K}.$$

بالتحويل إلى درجات سلسيوس،

$$t_A = 76.8^\circ\text{C}, \quad t_B = 99.7^\circ\text{C}.$$

B. الجزآن الأفقيان والكتلتان المتبقيتان

يتيح التسخين البطيء معالجة شبه ساكنة باستخدام ضغوط البخار عند الاتزان. وكما ورد في المعطيات، فإن فروق الضغط الهيدروستاتيكي مهمة. وتمنع الطبقة غير المتطايرة C التبخر الحر من السطح.

عند السطح الفاصل بين A و B، تحتوي فقاعة بخار متزنة مع كلا السائلين على بخار مشبع لكل منهما. ولأن السائلين غير قابلين للامتزاج، يسهم كل منهما بضغط بخاره المشبع الخاص عند درجة الحرارة المشتركة. ويعطي قانون دالتون

$$p_{\text{bubble}} = p_A(T) + p_B(T).$$

وبالتالي، يبدأ الغليان عند درجة حرارة الجزء الأفقي السفلي T_2 ، التي تحددها العلاقة

$$p_A(T_2) + p_B(T_2) = p_0.$$

وباستخدام علاقات ضغط البخار التي حُدِّت ثوابتها من المعطيات،

$$\exp\left(\frac{\alpha_A}{T_2} + \beta_A\right) + \exp\left(\frac{\alpha_B}{T_2} + \beta_B\right) = 1.$$

يعطي الحل العددي

$$T_2 = 340.1208 \text{ K}, \quad t_2 = 66.9708^\circ\text{C}.$$

إذن،

$$t_2 = 67^\circ\text{C}.$$

عند درجة الحرارة هذه،

$$\frac{p_A}{p_0} = 0.7337662, \quad \frac{p_B}{p_0} = 0.2662338.$$

ما دام السائلان موجودين، فإن ضغطي بخاريهما المشبعين يعتمدان على درجة الحرارة وحدها، ولذلك يستمر الغليان عند درجة الحرارة الثابتة هذه. وتوفّر الحرارة المزودة الحرارة الكامنة للتبخر.

لتحديد أي السائلين ينفد أولاً، لنعتبر حجمًا V من مزيج البخار المتصاعد. يعطي قانون الغاز المثالي لكل مكوّن

$$p_A V = n_A R T_2, \quad p_B V = n_B R T_2,$$

ومن ثم

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{p_A}{p_B}.$$

نسبة الكتلتين الجزيئيتين تساوي أيضاً نسبة الكتلتين الموليتين. ولذلك، فإن مقادير الكتلة المفقودة بالتبخّر، المأخوذة موجبة، تحقق

$$\frac{dm_A^{\text{evap}}}{dm_B^{\text{evap}}} = \frac{\mu_A p_A}{\mu_B p_B} = \gamma \frac{p_A}{p_B}.$$

عددياً،

$$\gamma \frac{p_A}{p_B} = 8 \frac{0.7337662}{0.2662338} = 22.0488.$$

تبقى هذه النسبة ثابتة طوال الجزء الأفقي السفلي. وبما أن الكتلتين الابتدائيتين متساويتان، فإن **A ينفد أولاً**. وعندما تتبخر كتلته البالغة 100 g بأكملها، تكون كتلة B المفقودة

$$\Delta m_B = \frac{100}{22.0488} \text{ g} = 4.5354 \text{ g}.$$

وعليه، تكون كتلتا السائلين المتبقيتان

$$m_A = 0, \quad m_B = 100 - 4.5354 = 95.4646 \text{ g}.$$

بعد نفاد A، لا يكفي ضغط بخار B وحده لحدوث الغليان عند T_2 ، إذ إن

$$p_B(T_2) = 0.2662338 p_0 < p_0.$$

يتوقف الغليان وترتفع درجة الحرارة حتى يبلغ B درجة غليانه النظامية. ومن ثم تكون درجة حرارة الجزء الأفقي العلوي

$$t_1 = t_B = 99.7420^\circ\text{C},$$

وبتقريبها نحصل على

$$t_1 = 100^\circ\text{C}.$$

يقع الزمن المحدّد τ_1 على الجزء الصاعد بين الجزأين الأفقيين. في هذه المرحلة، يكون A قد اختفى، ولم يستأنف B الغليان بعد، وتمنع الطبقة C التبخر الحر من السطح. لذلك تبقى كتلتا السائلين كما كانتا عند نهاية الجزء الأفقي السفلي:

$$m_A(\tau_1) = 0.0 \text{ g}, \quad m_B(\tau_1) = 95.5 \text{ g}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: ثلاث كتل متجاذبة تثنائياً تدور كجسم صلب

تتفاعل ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة P_1 ، P_2 و P_3 ، ذات كتل معلومة m_1 ، m_2 و m_3 ، بعضها مع بعض بقوى التجاذب التثنائلي المتبادلة وحدها؛ وهي معزولة في الفضاء الحر ولا تتفاعل مع أي أجسام أخرى. ليرمز σ إلى المحور المار بمركز كتلة الكتل الثلاث والعمودي على المثلث $P_1P_2P_3$. ما الشروط التي ينبغي أن تحققها السرعات الزاوية ω للنظام (حول المحور σ) والمسافات:

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13},$$

لكي يظل شكل المثلث $P_1P_2P_3$ وحجمه ثابتين أثناء حركة النظام، أي تحت أي شروط يدور النظام حول المحور σ كجسم صلب؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 2: يجب أن يكون المثلث متساوي الأضلاع:

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a > 0.$$

يجب أن تدور الكتل الثلاث جميعها بالسرعة الزاوية الثابتة نفسها، التي يحقق مقدارها العلاقة

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}.$$

يمكن أن يكون الدوران في أي من الاتجاهين. وهذه الشروط لازمة وكافية لأي كتل موجبة؛ ولا يلزم أن تكون الكتل متساوية.

الحل

المسألة 2

نستخدم قوانين نيوتن للحركة وقانون نيوتن للجذب العام للكتل النقطية. نعرّف

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

لا توجد قوة خارجية، ولذلك يتحرك مركز الكتلة حركة منتظمة. نعمل في إطار مرجعي قصوري يكون فيه مركز الكتلة ساكنًا، ولكن $\mathbf{r}_i$ متجه موضع P_i بالنسبة إليه. عندئذٍ

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}.$$

عند الدوران كجسم صلب حول المحور العمودي σ ، تكون للكتل الثلاث سرعة زاوية مشتركة ω . ويكون زخمها الزاوي حول مركز الكتلة

$$\mathbf{L} = I\omega, \quad I = \sum_{i=1}^3 m_i |\mathbf{r}_i|^2.$$

قوى الجاذبية داخلية ومركزية، ولذلك يندم مجموع عزومها ويُحفظ $\mathbf{L}$. ولأن المثلث الصلب له عزم قصور ذاتي I ثابت، فإن ω ثابتة. ومن ثم،

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\omega^2 \mathbf{r}_i.$$

لذلك يقتضي قانون نيوتن الثاني، بعد القسمة على m_i ، أن

$$-\omega^2 \mathbf{r}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{a_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i). \quad (1)$$

وتعطي علاقة مركز الكتلة أيضًا

$$\sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -M \mathbf{r}_i. \quad (2)$$

بالتعويض من (2) في الطرف الأيسر من (1) وإعادة الترتيب، نحصل على

$$\sum_{j \neq i} m_j \left(\frac{G}{a_{ij}^3} - \frac{\omega^2}{M} \right) (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

عند كل رأس، يكون المتجهان اللذان يشيران نحو الرأسين الآخرين مستقلين خطيًا، لأن النقاط الثلاث لا تقع على استقامة واحدة. لذا يجب أن يندم كلا المعاملين في (3). وبما أن الكتل موجبة، فإن ذلك يعني، لكل زوج، أن

$$\frac{G}{a_{ij}^3} = \frac{\omega^2}{M}.$$

وعليه،

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a, \quad \omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

وهذا يثبت لزوم الشروط.

لإثبات كفاية الشروط، نأخذ ترتيباً على هيئة مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a . يكون تسارع أي كتلة بفعل الجاذبية

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{G}{a^3} \sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\frac{GM}{a^3} \mathbf{r}_i.$$

ومن ثم تتجه محصلة قوة الجاذبية المؤثرة فيها نحو مركز الكتلة، وتوفّر بالضبط التسارع المركزي اللازم عندما

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}.$$

نختار السرعات الابتدائية في إطار مركز الكتلة على النحو الآتي

$$\dot{\mathbf{r}}_i(0) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i(0), \quad \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\sigma}.$$

يحافظ الدوران المنتظم الموافق على المثلث متساوي الأضلاع ويحقق معادلات نيوتن في كل لحظة. ولذلك تكون الشروط كافية أيضاً. ويمكن إضافة أي حركة منتظمة لمركز الكتلة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: من مجهر إلكتروني إلى مجهر بروتوني

تتناول المسألة دراسة تحويل المجهر الإلكتروني الذي تُوجّه فيه حزمة الإلكترونات مغناطيسياً (وُسْرَعَ بفرق الجهد $U = 511 \text{ kV}$) إلى مجهر بروتوني (تُسْرَعَ فيه حزمة البروتونات بفرق الجهد $-U$). ولهذا الغرض، حل المسألتين الآتيتين:

A. يدخل إلكترون، بعد مغادرته جهازاً سُرّعه بفرق الجهد U ، منطقة ذات مجال غير متجانس B تولّد منظومة من الملفات الثابتة $L_1, L_2, \dots, L_n$. والتيارات المعلومة في الملفات هي $i_1, i_2, \dots, i_n$ ، على الترتيب.

ما التيارات $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$ التي ينبغي أن تسري في الملفات $L_1, L_2, \dots, L_n$ لتوجيه البروتون (الذي سُرّع أولاً بفرق الجهد $-U$) على طول مسار الإلكترون نفسه (وفي الاتجاه نفسه)؟

تلميح: يمكن حل المسألة بإيجاد شرط تكون عنده المعادلة التي تصف المسار واحدةً في كلتا الحالتين. وقد يكون من المفيد استخدام العلاقة:

$$\mathbf{p} \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2.$$

B. بأي عامل تزداد القدرة التمييزية للمجهر المذكور أو تنقص إذا استبدلت حزمة الإلكترونات بحزمة بروتونات؟ افترض أن القدرة التمييزية للمجهر (أي أصغر مسافة بين جسمين نقطيين يمكن عندها فصل صورتيهما الدائريتين بالكاد) تعتمد فقط على الخصائص الموجية للجسيمات.

افترض أن سرعات الإلكترونات والبروتونات قبل تسريعها تساوي صفراً، وأنه لا يوجد تآثر بين العزم المغناطيسي الذاتي لأيٍّ من الإلكترونات أو البروتونات والمجال المغناطيسي. وافترض أيضاً إمكان إهمال الإشعاع الكهرومغناطيسي المنبعث من الجسيمات المتحركة.

ملاحظة: كثيراً ما يستخدم الفيزيائيون 1 إلكترون فولت (1 eV)، ومضاعفاته مثل 1 keV أو 1 MeV، وحدةً للطاقة. والإلكترون فولت الواحد هو الطاقة التي يكتسبها الإلكترون عند اجتيازه فرق جهد يساوي 1 V.

أجر الحسابات بافتراض المعطيات الآتية:

$E_e = m_e c^2 = 511 \text{ keV}$	طاقة سكون الإلكترون:
$E_p = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$	طاقة سكون البروتون:

الإجابات

• **A.** اعكس اتجاه التيار في كل ملف واضرب مقداره في نحو 35.0:

$$i'_k = -\sqrt{\frac{2E_p + eU}{2E_e + eU}} i_k \simeq -35.0 i_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

• **B.** تصبح أصغر مسافة قابلة للتمييز

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} \simeq 0.0286.$$

ومن ثم فإن أصغر مسافة — وهي الكمية التي تُسمى «القدرة التمييزية» في نص المسألة — **تنخفض بمعامل 35.0**. وتتحسن القدرة على تمييز التفاصيل الدقيقة بهذا المعامل؛ أما القدرة التمييزية المعروفة اصطلاحاً بأنها $1/d$ فتزداد بمعامل 35.0.

الحل

A. تيارات الملفات

لنرمز إلى الشحنة الأولية بـ $e > 0$ ، بحيث تكون $q_p = +e$ و $q_e = -e$. بعد التسريع، تخضع الحركة في المجال المغناطيسي لمعادلة قوة لورنتز النسبية

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}.$$

بأخذ الضرب القياسي في $\mathbf{p}$ ، الموازي لـ $\mathbf{v}$ ، نحصل على

$$\frac{1}{2} \frac{d(p^2)}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{p} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

ومن ثم يبقى مقدار الزخم p ثابتاً. ويصح ذلك حتى عندما يكون المجال المغناطيسي غير متجانس، في ظل إهمال تأثيرات العزم المغناطيسي والإشعاع كما ورد في المعطيات.

لوصف المسار المكاني على نحو مستقل عن سرعة الجسيم، ليكن s طول القوس المتزايد في اتجاه الحركة، وليكن

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

متجه الوحدة المماسي. عندئذ تكون $\mathbf{p} = p\mathbf{t}$ ، و $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ ، و $ds/dt = v$. وبالتالي،

$$pv \frac{d\mathbf{t}}{ds} = qv \mathbf{t} \times \mathbf{B},$$

فتكون معادلات المسار

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{q}{p} \mathbf{t} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \right]$$

بالنسبة إلى الإلكترون في المجال $\mathbf{B}$ والبروتون في مجال جديد $\mathbf{B}'$ ، تتطابق هذه المعادلات إذا كان

$$\frac{e}{p_p} \mathbf{B}' = -\frac{e}{p_e} \mathbf{B},$$

أو

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}) = -\frac{p_p}{p_e} \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

ولذلك، عند تطابق نقطة الدخول واتجاهه، يتبع الجسيمان المسار المكاني نفسه وفي الاتجاه نفسه.

يعتمد المجال المغناطيسي لمنظومة الملفات خطياً على تياراتها. وضرب كل تيار في العامل نفسه يضرب المجال في كل موضع في ذلك العامل. ومن ثم فإن الاختيار المطلوب هو

$$i'_k = -\frac{p_p}{p_e} i_k.$$

يبقى حساب نسبة الزخمين. ينطلق كلا الجسيمين من السكون ويكتسبان طاقة الحركة نفسها،

$$K = eU = 511 \text{ keV} = 0.511 \text{ MeV}.$$

يجب معالجة حركة الإلكترون نسبياً لأن $K = E_e$. ونستخدم العلاقة النسبية الدقيقة لكلا الجسيمين:

$$(K + mc^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

وعليه،

$$pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)},$$

و

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{K + 2E_p}{K + 2E_e}}.$$

عددياً، باستخدام الطاقات بوحدة MeV،

$$p_e c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 0.511)} \simeq 0.885 \text{ MeV},$$

$$p_p c = \sqrt{0.511(0.511 + 2 \times 938)} \simeq 31.0 \text{ MeV}.$$

وتكون النسبة

$$\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{1876.511}{1.533}} = 34.9868 \dots$$

ومن ثم

$$i'_k \simeq -35.0 i_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

الإشارة السالبة ضرورية: فعكس اتجاه المجال المغناطيسي يعوّض انعكاس إشارة شحنة الجسيم.

B. القدرة التمييزية

طول موجة دي برولي هو

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

في مجهر تحدّ ظاهرة الحيود من قدرته على التمييز وتكون هندسة فتحته ثابتة، تتناسب أصغر مسافة قابلة للتمييز بين الأجسام طردياً مع الطول الموجي. وبصورة أكثر تحديداً، تأخذ الشكل

$$d_{\min} = C \frac{\lambda}{\sin \alpha},$$

حيث α نصف زاوية الفتحة و C يعتمد على معيار التمييز.

يحافظ تغيير مقياس المجال الذي وجدناه في الجزء A على مسارات الحزمة، ومن ثم على العوامل الهندسية. وبالتالي

$$\frac{d_p}{d_e} = \frac{\lambda_p}{\lambda_e} = \frac{p_e}{p_p} = \sqrt{\frac{K + 2E_e}{K + 2E_p}} = \frac{1}{34.9868\dots}.$$

وعليه،

$$d_p \simeq 0.0286 d_e.$$

يمكن للمجهر البروتوني تمييز نقاط تقل المسافات بينها بمعامل يقارب 35.0. ووفقاً للتعريف الوارد في نص المسألة، فإن «قدرته التمييزية»، التي تعني أصغر مسافة قابلة للتمييز، تنخفض بهذا المعامل. أما القدرة التمييزية المعرّفة اصطلاحاً بمقلوب هذه المسافة فتزداد بالمعامل نفسه.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.