

IPhO 1988

理论题与解答 · 奥地利巴特伊施尔 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipro/1988/

题目 1: 粒子速度的光谱测量

基本资料

光子的吸收与发射是一个可逆过程。原子从基态被激发到较高能态，随后又回到基态，就是一个很好的例子。在这种情况下，我们可以通过自发发射或荧光现象来探测光子的吸收。一些较为现代的仪器利用这一原理来识别原子，也用来测量或计算电子束速度谱中的速度值。

在一个理想化实验中（见图 19.1），一个带单电荷的离子以速度 v 沿与激光光源发出的光相反的方向运动。激光光源发出的光的波长可以调节。速度为零的离子可以被波长为 $\lambda = 600 \text{ nm}$ 的激光激发到较高能态。如果要激发一个运动的离子，根据多普勒效应，我们知道所用激光的波长必须不同于上述数值。

已知一个速度谱，其速度大小的范围从 $v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 到 $v_2 = 6,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 。（见图 19.1）

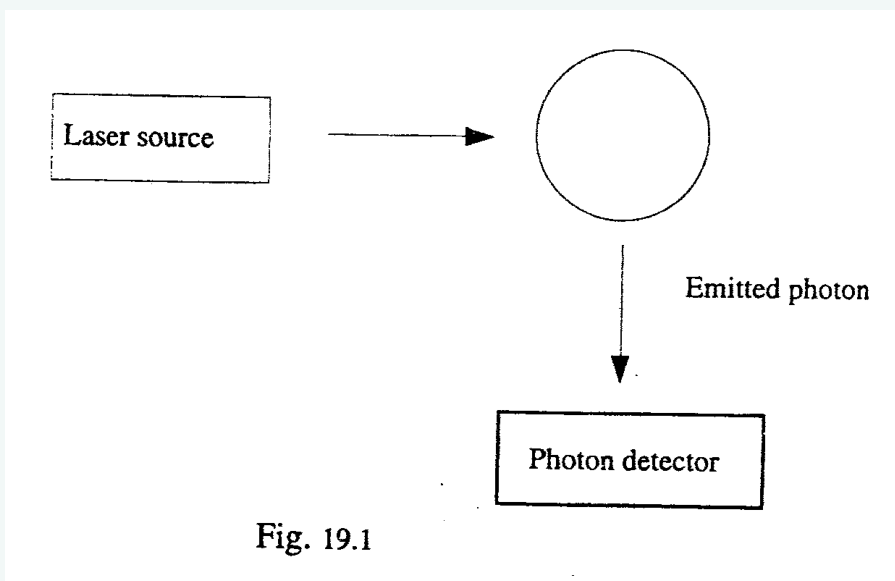


图 19.1

问题

1.1

1.1.1

为了激发上述速度谱中所有速度的离子，必须使用什么波长范围的激光束？

1.1.2

对这一问题进行严格分析，需要应用狭义相对论中的下述关系：

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

求使用经典多普勒效应公式求解这一问题时产生的误差。

1.2

假设离子在被激光束激发之前，先经过电势差 U 加速，求离子束速度谱的宽度与加速电势差之间的关系。加速电压会使速度谱的宽度增大还是减小？

1.3

每个离子的比荷为 $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$ ，并具有两个能级，分别对应于波长 $\lambda^{(1)} = 600 \text{ nm}$ 和波长 $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 10^{-3} \text{ nm}$ 。证明，在不施加加速电势差时，用于激发离子的这两种波长的光的光谱相互重叠。能否利用加速电压使这两个用于激发离子的激光光谱分离，从而不再重叠？如果可以，计算所需电压的最小值。

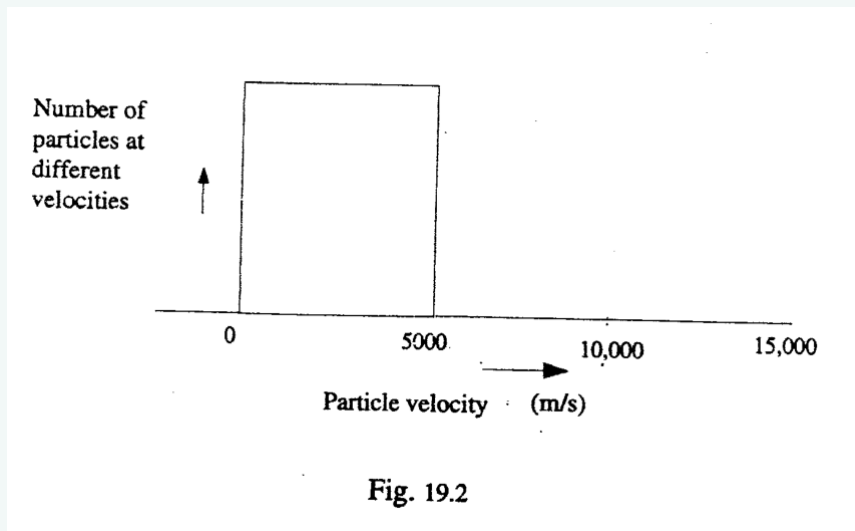


Fig. 19.2

图 19.2

题目译自官方英文原文。

答案

- 1.1.1: 所需的激光波长范围为

$$600.000 \text{ nm} \leq \lambda_L \leq 600.012 \text{ nm},$$

宽度为 0.012 nm 。

- 1.1.2: 经典公式对波长上限的低估量约为

$$1.2 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

波长的最大相对误差为 2.0×10^{-10} ；扫描宽度的相对误差为 1.0×10^{-5} 。

- 1.2: 加速后，速度谱的宽度为

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

它随加速电压的增大而减小。

- 1.3: 不加速时，两个波长区间近似为

$$[600.000, 600.012] \text{ nm}, \quad [600.001, 600.013] \text{ nm},$$

因而它们相互重叠。加速可以使它们分离，其阈值为

$$U_{\min} \approx 160 \text{ V}.$$

在阈值处，两个谱带恰好相接；电压略大于该值时，两者之间便会出现有限的间隙。

解答

取 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 。用 λ_0 表示离子静止时的共振波长，用 λ_L 表示实验室参考系中的激光波长。假定这些理想化光谱没有本征线宽。

1.1.1

离子迎着入射光运动，因此它观测到的频率高于实验室参考系中的激光频率。在经典的运动观察者近似下，

$$\nu' = \nu_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

要发生激发，离子所观测到的频率必须等于其静止时的共振频率：

$$\nu' = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

由于 $\nu_L = c/\lambda_L$,

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_L} \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

因此

$$\lambda_L(v) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

所以，实验室参考系中的激光波长必须随离子速率的增大而增大。在两个端点处，

$$\begin{aligned} \lambda_L(0) &= 600 \text{ nm}, \\ \lambda_L(6000) &= 600 \left(1 + \frac{6000}{3.00 \times 10^8}\right) \text{ nm} = 600.012 \text{ nm}. \end{aligned}$$

因此，所需的扫描宽度为

$$\Delta \lambda_L = \frac{\lambda_0(v_2 - v_1)}{c} = 0.012 \text{ nm}.$$

1.1.2

令 $\beta = v/c$ 。由题给的相对论公式可得共振条件

$$\nu_0 = \nu_L \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

所以，所需波长的精确值为

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

经典值为 $\lambda_{\text{cl}} = \lambda_0(1+\beta)$ 。因此，以精确波长为基准，其相对低估量为

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_{\text{rel}} - \lambda_{\text{cl}}}{\lambda_{\text{rel}}} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} \simeq \frac{\beta^2}{2}.$$

这一误差在 $v_2 = 6000 \text{ m s}^{-1}$ 时最大，此时

$$\beta_2 = 2.00 \times 10^{-5}, \quad \boxed{\epsilon_{\lambda, \text{max}} \simeq 2.00 \times 10^{-10}}.$$

等价地，将精确波长展开，

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3) \right),$$

可得最大的绝对修正量

$$\delta\lambda_{\text{max}} \simeq \frac{\lambda_0 \beta_2^2}{2} = 600 \text{ nm} \times 2.00 \times 10^{-10} = \boxed{1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}}.$$

因此，相对论计算得到的上端点近似为

$$600.01200012 \text{ nm}.$$

由于 $v_1 = 0$ ，下端点没有修正。因此，扫描宽度的绝对误差也为 $1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}$ ，对应的相对误差为

$$\frac{\delta(\Delta\lambda_L)}{\Delta\lambda_L} \simeq \frac{1.20 \times 10^{-7}}{0.012} = \boxed{1.00 \times 10^{-5}}$$

即 0.001%。

1.2

设 u 为离子加速后的速率。每个带单电荷的离子获得相同的动能 eU 。利用非相对论的能量守恒关系，

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU,$$

可得

$$u(v, U) = \sqrt{v^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

该函数随初始速率 v 的增大而增大，因此加速后分布的两个端点为

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}, \quad u_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

因此，

$$\boxed{\Delta v(U) = u_2 - u_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}}.$$

将根式差有理化后，它对电压的依赖关系便尤为清楚：

$$\Delta v(U) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} + \sqrt{v_1^2 + 2eU/m}}.$$

分子为常数，而分母随 U 的增大而增大。因此，加速使整个分布向较高速率方向移动，同时使其宽度减小。

对于题给的 $v_1 = 0$,

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

当 $2eU/m \gg v_2^2$ 时，上式化为

$$\Delta v(U) \simeq \frac{v_2^2}{2\sqrt{2eU/m}} \propto U^{-1/2}.$$

1.3

记

$$\lambda_1 = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = 600.001 \text{ nm}, \quad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.001 \text{ nm}.$$

不加速时，每个静止共振波长对应一个激光激发波长区间

$$\mathcal{I}_i(0) = \left[\lambda_i, \lambda_i \left(1 + \frac{v_2}{c} \right) \right].$$

代入数值得

$$\mathcal{I}_1(0) = [600.000, 600.012] \text{ nm},$$

$$\mathcal{I}_2(0) \simeq [600.001, 600.013] \text{ nm}.$$

它们的公共区间近似为

$$[600.001, 600.012] \text{ nm},$$

所以这两个光谱显然相互重叠。

加速后，这些区间变为

$$\mathcal{I}_i(U) = \left[\lambda_i \left(1 + \frac{u_1}{c} \right), \lambda_i \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) \right].$$

由于 $\lambda_2 > \lambda_1$ ，当第一个区间的上边界低于第二个区间的下边界时，两者便会分离。临界条件为

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

等价地，

$$u_2 - u_1 = \frac{c \delta\lambda}{\lambda_1} \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

在多普勒效应的最低阶近似下， $u_1/c \ll 1$ ，因此所需的临界速度谱宽度为

$$d \equiv \frac{c \delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{(3.00 \times 10^8)(0.001)}{600} \text{ m s}^{-1} = \boxed{500 \text{ m s}^{-1}}.$$

加速能够达到这一宽度，因为它会使速度分布持续变窄。

当 $v_1 = 0$ 时，由能量守恒还可得

$$u_2^2 - u_1^2 = v_2^2.$$

在分离阈值处, $u_2 - u_1 \simeq d$, 因此

$$u_2 + u_1 \simeq \frac{v_2^2}{d} = \frac{6000^2}{500} = 72,000 \text{ m s}^{-1}.$$

解出这两个速率, 得

$$u_1 \simeq \frac{72,000 - 500}{2} = 35,750 \text{ m s}^{-1},$$
$$u_2 \simeq 36,250 \text{ m s}^{-1}.$$

最后, 利用 $e/m = 4 \times 10^6 \text{ C kg}^{-1}$,

$$U_{\min} \simeq \frac{u_1^2}{2(e/m)} = \frac{(35,750)^2}{8 \times 10^6} \text{ V} \approx \boxed{160 \text{ V}}.$$

所得速率满足 $u/c \approx 1.2 \times 10^{-4}$, 与所用近似相符。在经典端点条件中保留微小修正因子 $1 + u_1/c$, 不会改变所报告的电压值。

在临界电压下, 两个光谱的边界重合。要使它们严格分离, 电压必须略高于这一阈值。

解答已与官方解答核对。

题目 2: 麦克斯韦轮

引言

一个密度均匀的圆柱形轮, 质量为 $M = 0,40 \text{ kg}$, 半径为 $R = 0,060 \text{ m}$, 厚度为 $d = 0,010 \text{ m}$, 用两根等长的轻绳悬挂在天花板上。每根绳都绕在轮轴上。与绳一样, 轮轴的质量也可忽略不计。用手转动轮子, 将绳卷起, 直到轮子的质心升至地板上方 $1,0 \text{ m}$ 处。若让轮子在重力作用下竖直下落, 绳就会逐渐展开, 直至全部展开, 轮子到达最低点。随后, 绳开始沿相反方向卷绕, 使轮子向上升起。

假设绳始终处于竖直位置, 且绳与轮轴的接触点分别位于各自悬挂点的正下方, 分析并回答下列问题 (见图 19.5)。

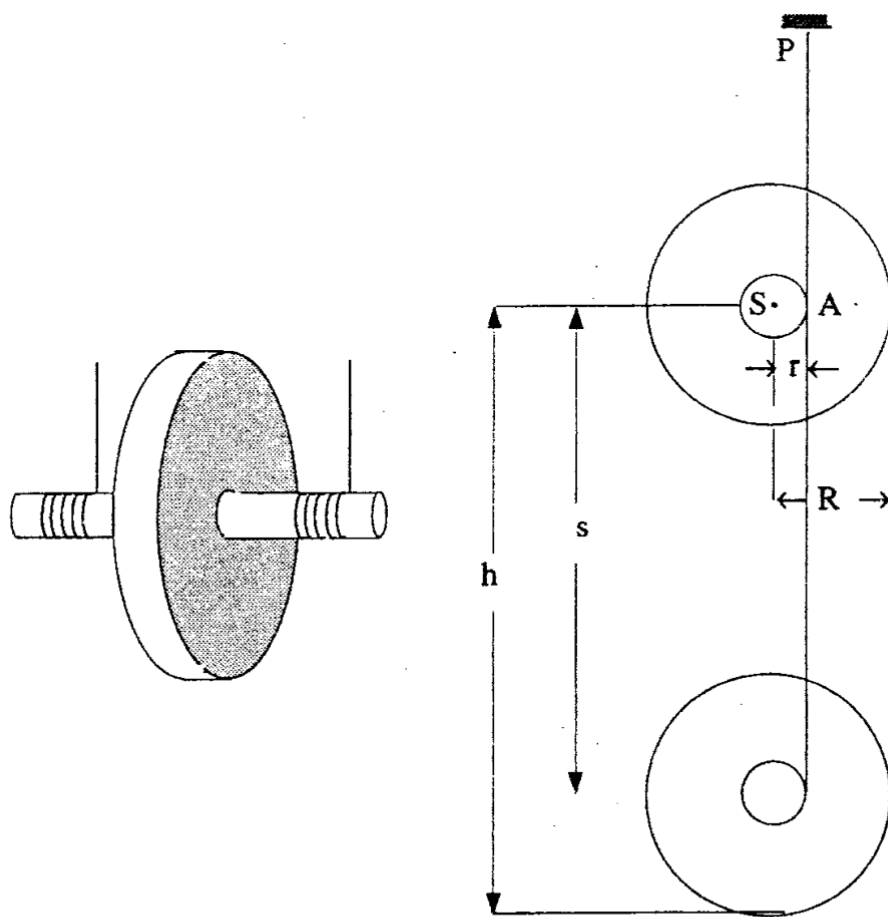


Fig. 19.5

图 19.5

问题

2.1

求轮子的质心沿竖直方向移动距离 s 时，轮子的角速度。

2.2

求轮子移动距离 $s = 0,50 \text{ m}$ 后质心直线运动的动能 E_r ，并计算 E_r 与本题中截至此时其他形式能量的比值。

轮轴半径 = $0,0030 \text{ m}$

2.3

求轮子向下运动时绳中的张力。

2.4

当绳开始沿相反方向展开时，如图 19.6 所示，计算角速度 ω' 随角度 Φ 变化的函数关系。

在适合本题的直角坐标系中，画出描述运动的各变量的示意图，并画出质心速率随 Φ 变化的图像。

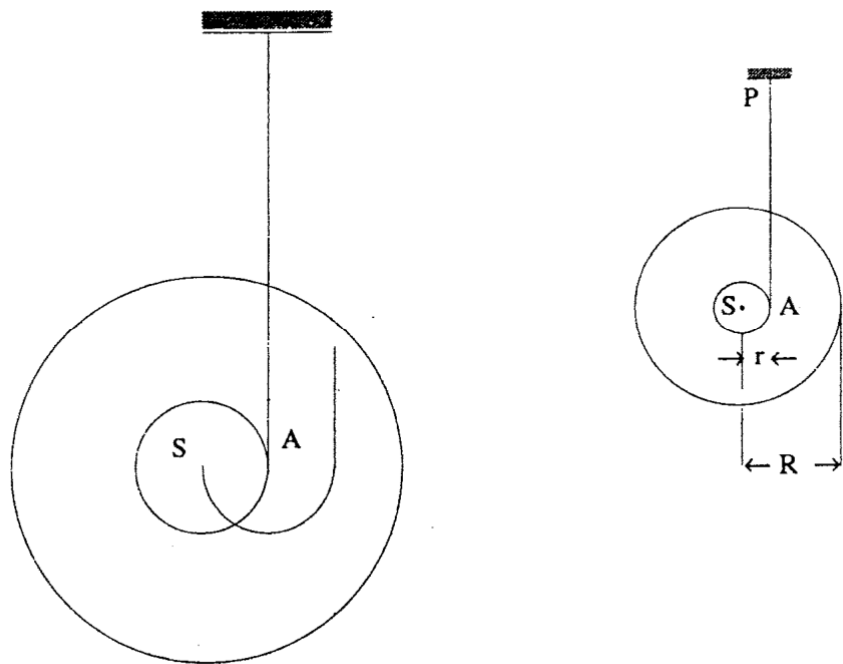


图 19.6

2.5

若绳能承受的最大张力为 $T_m = 10 \text{ N}$ ，求轮子在不拉断绳的情况下可使绳展开的最大长度。

题目译自官方英文原文。

答案

这里 $r = 0.0030 \text{ m}$ ，数值计算采用 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。对于换向过程，令 ℓ 为此前的直线下降距离，并规定进入换向过程时 $\Phi = 0$ ，到达底部时 $\Phi = \pi/2$ ，离开换向过程时 $\Phi = \pi$ 。第 2.4–2.5 问采用图 19.6 所示的接触位置固定的半圆形换向模型；这是一种理想化处理：除 $\Phi = \pi/2$ 外，所需的接触反力都有水平分量，而竖直的绳无法提供这一分量。

• 2.1

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

当 $s = 0.50 \text{ m}$ 时， $\omega = 73.6 \text{ rad s}^{-1}$ 。

• 2.2

$$E_r = \frac{Mgs}{201} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

以地板为重力势能零点，

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

因此， $E_r/E_{\text{rot}} = 1/200$ ，且 $E_r/(Mgs) = 1/201$ 。

- 2.3 在通常的向下展开过程中，**每根**绳中的张力为

$$T = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)} = 1.95 \text{ N} \simeq 2.0 \text{ N}.$$

- 2.4

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

取轮心进入换向过程时的位置为原点， x 轴向右， y 轴向上，

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi,$$

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi, \quad v = r\omega'.$$

轨迹为下半圆。速率关于 $\pi/2$ 对称，并在该处达到最大值。

- 2.5 由强度限制决定的**每根**绳的最大展开长度为

$$\ell_{\max} = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r = 1.23 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m}.$$

在题设装置中，地板使允许的长度更短：

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \approx 0.94 \text{ m}.$$

在这一恰好不碰地板的极限情况下，每根绳的峰值张力仅为 8.1 N。

解答

假设轮子从静止释放，绳不可伸长，卷绕或展开过程中不发生滑动，且耗散损失可忽略不计。

轮子绕轮轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

厚度 d 不出现在这一转动惯量的表达式中。为方便起见，定义

$$J = I + Mr^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right).$$

对于给定的尺寸，

$$\frac{I}{Mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} = 200, \quad \frac{J}{Mr^2} = 201.$$

2.1

当绳展开对应的角度为 $d\theta$ 时，质心下降 $ds = r d\theta$ 。因此

$$v = r\omega.$$

下降距离 s 后，由机械能守恒可得

$$Mgs = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2.$$

于是，

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{2Mgs}{I + Mr^2}} = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

代入数值得

$$\omega(s) = (104.1 \text{ rad s}^{-1})\sqrt{\frac{s}{1 \text{ m}}}.$$

2.2

平动动能为

$$E_r = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{Mr^2}{J}Mgs = \frac{Mgs}{201}.$$

当 $s = 0.50 \text{ m}$ 时,

$$Mgs = 0.40(9.81)(0.50) = 1.962 \text{ J},$$

因此

$$E_r = 0.009761 \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

转动动能为

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

从而

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}}} = \frac{Mr^2}{I} = \frac{1}{200}.$$

其数值为

$$E_{\text{rot}} = 1.95224 \text{ J}.$$

此时质心位于地板上方 $h - s = 0.50 \text{ m}$ 处。取地板为重力势能零点,

$$U = Mg(h - s) = 1.962 \text{ J}.$$

因此, 此时三种能量之比为

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

初始能量为 $Mgh = 3.924 \text{ J}$, 能量核对结果为

$$0.009761 + 1.952239 + 1.962 = 3.924 \text{ J}.$$

平动动能是所释放重力势能的 $1/201$ 。如果“其他形式能量”指剩余的转动动能与重力势能之和, 则相应比值为

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}} + U} = \frac{1}{401}.$$

2.3

用 T 表示每根绳中的张力, 并取向下的加速度 a 为正。由牛顿第二定律得

$$Mg - 2T = Ma.$$

两个张力产生的力矩满足

$$2Tr = I\alpha,$$

而绳展开的运动学条件给出 $a = r\alpha$ 。因此

$$2T = \frac{I}{r^2}a,$$

且

$$a = \frac{Mg}{M + I/r^2} = \frac{g}{201} = 0.0488 \text{ m s}^{-2}.$$

由此可得

$$T = \frac{M(g - a)}{2} = \frac{Mg}{2} \frac{200}{201} = 1.95224 \text{ N}.$$

在直线下降过程中，这一张力保持不变。换向过程中大得多的力必须另行考虑。

2.4

我们将图 19.6 中的曲线轨迹理解为一个短暂的换向过程，在此过程中，通过 A 的接触线保持固定，轮心 S 绕该接触线沿半径为 r 的半圆运动。这一规定的几何关系就是这里采用的换向理想化模型。

令 ℓ 为换向前的直线下降距离。进入换向过程时，

$$\omega_0^2 = \frac{2Mg\ell}{J}.$$

取 S 进入换向过程时的位置为原点， x 轴向右， y 轴向上。于是 $A = (r, 0)$ 。定义 Φ ，使其在轮心从 A 下方经过时由 0 增至 π 。坐标为

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi.$$

它们满足

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0.$$

由于这是绕 A 的转动，

$$\dot{\Phi} = \omega', \quad v = r\omega'.$$

绕接触线的转动惯量为 $J = I + Mr^2$ 。轮心又下降了距离 $r \sin \Phi$ ，因此由能量守恒得

$$\frac{1}{2} J \omega'^2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2 + Mgr \sin \Phi.$$

所以

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mgr}{J} \sin \Phi} = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}.$$

对坐标求导，得到

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi.$$

因此

$$v(\Phi) = r\omega'(\Phi) = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell} \sin \Phi}, \quad v_0 = r\omega_0.$$

用于计算受力的角加速度为

$$\ddot{\Phi} = \frac{Mgr}{J} \cos \Phi.$$

所要求的示意图可由以下信息确定：

Φ	x	y	v_x	v_y	速率
0	0	0	0	$-v_0$	v_0
$\pi/2$	r	$-r$	$v_{\max}$	0	$v_{\max}$
π	$2r$	0	0	$+v_0$	v_0

这里

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}, \quad \omega'_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}.$$

空间轨迹由一段竖直下降轨迹、一个半径为 $r = 3.0 \text{ mm}$ 的下半圆，以及一段水平偏移了 $2r = 6.0 \text{ mm}$ 的坚直升起轨迹组成。作为 Φ 的函数， x 从 0 平滑增加到 $2r$ ，而 y 是一段负的半正弦曲线，最小值为 $-r$ 。 v 和 ω' 的图像均呈对称的拱形，两端点的值相等，并在 $\pi/2$ 处达到最大值。

在底部，**竖直速度为零，但速率最大**：在这一半圆模型中，轮心此时正沿水平方向运动。

2.5

在换向过程的中点，轮心位于 A 的正下方。由于 $\cos \Phi = 0$ ，其切向加速度为零，加速度竖直向上：

$$a_{\text{bottom}} = \frac{v_{\max}^2}{r} = r\omega_{\max}'^2.$$

因此，竖直方向的受力方程为

$$2T_{\text{peak}} - Mg = Mr\omega_{\max}'^2.$$

利用第 2.4 问的结果，

$$\omega_{\max}'^2 = \frac{2Mg(\ell + r)}{J},$$

可得

$$T_{\text{peak}} = \frac{Mg}{2} + \frac{M^2gr(\ell + r)}{J}.$$

在 A 固定的模型中，底部确实是约束力最大的点。为验证这一点，令

$$\epsilon = \frac{Mr^2}{J}, \quad b = \frac{r\omega_0^2}{g}, \quad u = \sin \Phi.$$

将总接触反力 F 分解为径向和切向分量，可得

$$\frac{F^2}{M^2g^2} = b^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2b(1 + 2\epsilon)u + 3\epsilon(2 + \epsilon)u^2.$$

u 和 u^2 的系数均非负，因此最大值出现在 $u = 1$ 处，此处反力沿竖直方向，由两根绳平均分担。

令每根绳的峰值张力等于 T_m ，

$$2T_m = Mg + \frac{2M^2gr(\ell_{\max} + r)}{J}.$$

于是

$$\ell_{\max} = \frac{J(2T_m - Mg)}{2M^2gr} - r = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r.$$

代入数值得

$$\ell_{\max} = \frac{0.060^2 + 2(0.0030)^2}{4(9.81)(0.0030)} \left(\frac{20}{0.40} - 9.81 \right) - 0.0030 = 1.2322 \text{ m.}$$

因此，绳的强度所允许的极限长度约为

$$\ell_{\max} \simeq 1.2 \text{ m.}$$

此外，地板还带来几何限制。在换向过程中，轮心的最小高度为 $h - \ell - r$ 。要使轮子保持在地板之上，必须有

$$h - \ell - r \geq R,$$

所以

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \simeq 0.94 \text{ m.}$$

将这一长度代入峰值张力公式，得到

$$T_{\text{peak}} = 8.08 \text{ N} < 10 \text{ N.}$$

因此，在达到绳的强度极限之前，地板就已限制了可展开的长度。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3：电离气体中正负离子的复合

引言

一种气体由某种元素的正离子（处于高温下）和电子组成。该正离子对应的原子的质量数 Z 未知。已知这个离子的电子壳层（轨道）中只有一个电子。

用符号 $A^{(Z-1)+}$ 表示这个离子

常量：

常量	数值
真空介电常数	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
元电荷	$e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
	$q^2 = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 2,037 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$
普朗克常量	$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
电子的（静止）质量	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
玻尔原子半径	$r_B = \frac{\hbar}{m \cdot q^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
里德伯能量	$E_R = \frac{q^2}{2 \cdot r_B} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
质子的（静止）质量	$m_p \cdot c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

问题：

3.1

假设电子壳层中仅剩一个电子的离子

$A^{(Z-1)+}$ 处于基态。

在最低能量状态下，电子到原子核的平均距离的平方，即 r^2 ，沿 x 、 y 和 z 轴的分量分别为 $(\Delta x)^2$ 、 $(\Delta y)^2$ 和 $(\Delta z)^2$ ，且

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

平均动量的平方则为

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2,$$

其中

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta y} \quad \text{且} \quad \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta z}.$$

写出包含 $(p_0)^2 \cdot (r_0)^2$ 的不等式的完整形式。

3.2

用 $A^{(Z-1)+}$ 表示的离子可以再俘获一个电子，并因此发射一个光子。

写出用于计算所发射光子频率的方程。

3.3

按最低能量状态计算离子 $A^{(Z-1)+}$ 的能量。应根据以下原则进行近似计算：

3.3.A

离子的势能应以 $\frac{1}{r}$ 的平均值表示。

(即 $\frac{1}{r_0}$ ； r_0 已在题目中给出)。

3.3.B

计算离子的动能时，使用 3.1 中给出的动量平方的平均值，并采用如下简化关系

$$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2 \approx (\hbar)^2$$

3.4

采用与计算 $A^{(Z-1)+}$ 能量相同的原理，计算处于基态的离子 $A^{(Z-2)+}$ 的能量。将最外层两个电子各自到原子核的平均距离（与 3.3 中给出的 r_0 含义相同）记为 r_1 和 r_2 ，假设两个电子之间的平均距离为 $r_1 + r_2$ ，且每个电子的动量平方的平均值都遵循不确定性原理，即

$$p_1^2 \cdot r_1^2 \approx \hbar^2 \quad \text{且} \quad p_2^2 \cdot r_2^2 \approx \hbar^2$$

提示： 利用基态下 $r_1 = r_2$ 这一条件

3.5

特别考虑离子 $A^{(Z-2)+}$ 在俘获另一个电子时处于静止的基态，而被俘获的电子在俘获前也处于静止状态的情形。若俘获电子时发射的光子的频率为 $2,057 \cdot 10^{17}$ rad/s，求 Z 的数值，并确定形成该离子的元素。

答案

定义能量尺度

$$\mathcal{R} = \frac{m_e(q^2)^2}{2\hbar^2}.$$

若各常量相互一致，这就是里德伯能量 E_R 。题面所列常量不一致，因此下文区分由它们得出的数值结果。

• 3.1

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

• 3.2

$$h\nu = \hbar\omega = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f,$$

其中 E_i, E_f 为电子体系的内能，各个 K 为平动动能。

• 3.3

$$E_1 = -Z^2 \mathcal{R} \quad (\text{通常写作 } -Z^2 E_R).$$

• 3.3.A

$$U_1(r_0) \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

• 3.3.B

$$T_1(r_0) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}, \quad r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

• 3.4

$$E_2 = -2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{R}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

• 3.5 对于题目本意所指的俘获第二个电子的过程，

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}$$

其中忽略反冲。采用给出的 E_R 得到 $Z = 3.673$ ；采用题面所列的 $q^2, m_e, \hbar$ 得到 $Z = 4.088$ 。与两者最接近的整数均为

$$Z = 4, \quad \text{铍 (Be)}.$$

这是有条件的近似判定。按题面原文，3.5 问描述的是俘获第三个电子的过程，而其能量并未给出。

解答

由电荷态可知，原子核的电荷为 $+Ze$ 。我们将其质量视为远大于电子质量，在计算电子能量时忽略其运动，并采用非相对论的电子动能表达式。电子结合能以原子核与各电子彼此分离时的能量为零点。

3.1

将三个不确定性不等式分别平方后相加，得到

$$p_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right].$$

乘以题目指定的 r_0^2 ，得到完整表达式

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[3 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta z)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right].$$

每一对互为倒数的项之和都不小于 2，因为当 $u > 0$ 时有 $u + u^{-1} \geq 2$ 。因此

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

等号成立既要求各方向的位置不确定度相等，

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z,$$

也要求三个分量的不确定性关系均取等号。仅凭球对称性不能保证取等号。

3.2

辐射俘获反应为



令 E_i, E_f 分别表示初态和末态的电子体系内能。令 K_i, K_e 为初态离子和电子的动能， K_f 为末态离子的动能。由能量守恒可得

$$E_i + K_i + K_e = E_f + K_f + \hbar\omega.$$

因此

$$\hbar\omega = h\nu = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

两侧相同的原子核与电子的静止能量相消。末态离子的反冲由动量守恒决定。若初始动能和反冲均可忽略，上式简化为

$$\hbar\omega \approx E_i - E_f.$$

3.3

现在按题目要求，求近似电子总能量的最小值。

3.3.A

库仑吸引势能为

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Zq^2}{r}.$$

采用题目规定的期望值近似,

$$U_1 \approx -Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

3.3.B

电子在定态基态中的平均动量为零, 因此其动量平方的平均值用 p_0^2 表示。由题目规定的估算关系

$$p_0^2 r_0^2 \approx \hbar^2$$

可得

$$T_1 \approx \frac{p_0^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}.$$

这里有意对不确定性关系的结果作了粗略替代: 舍去了 3.1 中的数值系数, 并非由那个下界推导出的等式。

因此, 估算的总能量为

$$E_1(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} - \frac{Zq^2}{r_0}.$$

其驻点满足

$$\frac{dE_1}{dr_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{Zq^2}{r_0^2} = 0,$$

从而得到

$$r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Zq^2}.$$

该处的二阶导数为 $\hbar^2/(m_e r_0^4) > 0$, 所以这是一个极小值。代入可得

$$T_{1,\min} = \frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2}, \quad U_{1,\min} = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{\hbar^2},$$

因此

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2} = -Z^2 \mathcal{R}.$$

若玻尔常量和里德伯常量相互一致, 这些结果可写成熟悉的形式

$$r_{0,\min} = \frac{r_B}{Z}, \quad E_1 = -Z^2 E_R.$$

3.4

现在有两个电子的动能项、两个电子与原子核之间的吸引势能项, 以及一个电子之间的排斥势能项。采用题目规定的电子间距近似,

$$E_2(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Zq^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{q^2}{r_1 + r_2}.$$

利用给定的基态条件 $r_1 = r_2 = r$,

$$E_2(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2Zq^2}{r} + \frac{q^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r}.$$

求极小值得到

$$-\frac{2\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r^2} = 0,$$

所以

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

在这一半径处,

$$E_2 = -\frac{m_e (q^2)^2}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 = -2\mathcal{R} \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2.$$

因此, 在这一模型中, 电子间的排斥使每个电子的基态能量表达式中的 Z 被有效值 $Z - \frac{1}{4}$ 取代。

3.5

要将本问与 3.3 和 3.4 中计算的能量联系起来, 必须将俘获过程理解为

$$A^{(Z-1)+} + e^- \longrightarrow A^{(Z-2)+} + \gamma.$$

而 3.5 题面中写出的电荷态按字面理解描述的是另一过程, 即俘获第三个电子, 本题并未计算其能量。

对于题目本意所指的过程, 释放的结合能为

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 \\ &= \left[2 \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 - Z^2 \right] \mathcal{R} \\ &= \left(Z^2 - Z + \frac{1}{8} \right) \mathcal{R}. \end{aligned}$$

虽然两个初始粒子都处于静止状态, 但未态离子必然发生反冲。若其质量为 M , 由动量守恒可得

$$p_{\text{ion}} = p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

因此,

$$\Delta E = \hbar\omega + \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}.$$

给定的频率是角频率, 所以光子能量为

$$E_\gamma = \hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34})(2.057 \times 10^{17}) = \boxed{2.168 \times 10^{-17} \text{ J}}.$$

利用 $Mc^2 \geq m_p c^2$, 反冲修正的相对大小满足

$$\frac{K_{\text{recoil}}}{E_\gamma} = \frac{E_\gamma}{2Mc^2} \leq \frac{2.168 \times 10^{-17}}{2(1.503 \times 10^{-10})} = 7.21 \times 10^{-8}.$$

在给定数据的精度下, 它完全可以忽略。

因此

$$Z^2 - Z + \frac{1}{8} = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}},$$

其具有物理意义的根为

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}.$$

不一致的常量导致了两个数值估计：

用于确定能量尺度的常量	$\mathcal{R}$	估算的 Z
给出的里德伯能量 E_{R}	$2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$	3.673
题面所列的 $q^2, m_e, \hbar$, 通过 $m_e(q^2)^2/(2\hbar^2)$ 计算	$1.701 \times 10^{-18} \text{ J}$	4.088

与这两个估计值最接近的整数均为 4。因此，在按题目本意解释俘获过程并采用这一近似模型的条件下，推断出的元素为

$$Z = 4, \quad \text{铍,}$$

相应的俘获过程为



给定文本不足以支持精确且内部一致的整数判定。

解答已与官方解答核对。