

IPhO 1988

Teorik sorular ve çözümler · Bad Ischl, Avusturya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1988/

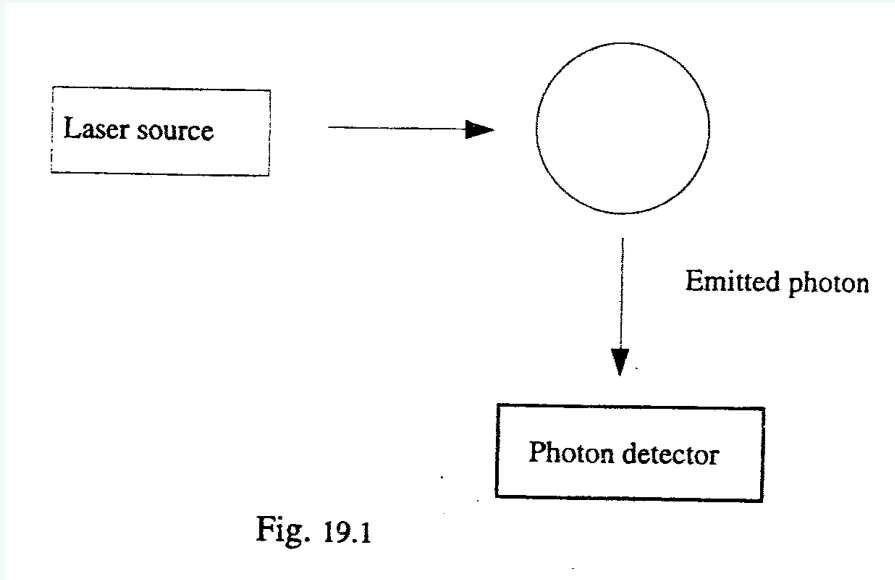
Soru 1: Parçacık Hızlarının Spektroskopisi

Temel Bilgiler

Bir fotonun soğurulması ve yayılması tersinir bir süreçtir. Bir atomun temel durumdan daha yüksek enerjili bir duruma uyarılması ve ardından temel duruma dönmesi buna iyi bir örnektir. Böyle bir durumda, kendiliğinden yayılma veya floresans olayı aracılığıyla bir fotonun soğurulduğunu saptayabiliriz. Daha modern ölçüm aygıtlarından bazıları, atomları tanımlamak ve ayrıca elektron demetinin hız spektrumundaki hız değerini ölçmek veya hesaplamak için bu ilkeden yararlanır.

İdealleştirilmiş bir deneyde (bkz. Şekil 19.1), tek yüklü bir iyon, bir lazer kaynağından gelen ışığa zıt yönde v hızıyla hareket etmektedir. Lazer kaynağından gelen ışığın dalga boyu ayarlanabilir. Hızı sıfır olan bir iyon, dalga boyu $\lambda = 600 \text{ nm}$ olan lazer ışığı uygulanarak daha yüksek enerjili bir duruma uyarılabilir. Hareketli bir iyonu uyaracak olursak, Doppler etkisine ilişkin bilgilerimiz, yukarıda verilen değerden farklı bir dalga boyuna sahip lazer ışığı uygulamamız gerektiğini söyler.

Hız büyüklükleri $v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ile $v_2 = 6,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ arasında değişen bir hız spektrumu verilmiştir. (bkz. Şekil 19.1)



Şekil 19.1

Sorular

1.1

1.1.1

Yukarıda verilen hız spektrumundaki tüm hızlara sahip iyonları uyarmak için lazer demetinin dalga boyu hangi aralıkta olmalıdır?

1.1.2

Problemin titiz bir analizi, özel görelilik kuramından gelen şu bağıntının uygulanmasını gerektirir:

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Problemi çözmek için Doppler etkisinin klasik formülü kullanıldığında ortaya çıkan hatayı belirleyiniz.

1.2

İyonların lazer demetiyle uyarılmadan önce bir U potansiyeliyle hızlandırıldığını varsayarak, iyon demetinin hız spektrumunun genişliği ile hızlandırma potansiyeli arasındaki ilişkiyi belirleyiniz. Hızlandırma gerilimi hız spektrumunun genişliğini artırır mı, azaltır mı?

1.3

Her iyonun $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$ değerine ve $\lambda^{(1)} = 600 \text{ nm}$ ile $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 10^{-3} \text{ nm}$ dalga boylarına karşılık gelen iki enerji düzeyine sahip olduğu bilinmektedir. Hızlandırma potansiyeli uygulanmadığında, iyonları uyarmak için kullanılan bu iki dalga boyuna ait ışıkların spektrumlarının örtüştüğünü gösteriniz. İyonları uyarmak için kullanılan lazer ışığının iki spektrumunu artık örtüşmeyecek biçimde ayırmak için hızlandırma gerilimi kullanılabilir mi? Yanıt olumluysa, gereken en küçük gerilim değerini hesaplayınız.

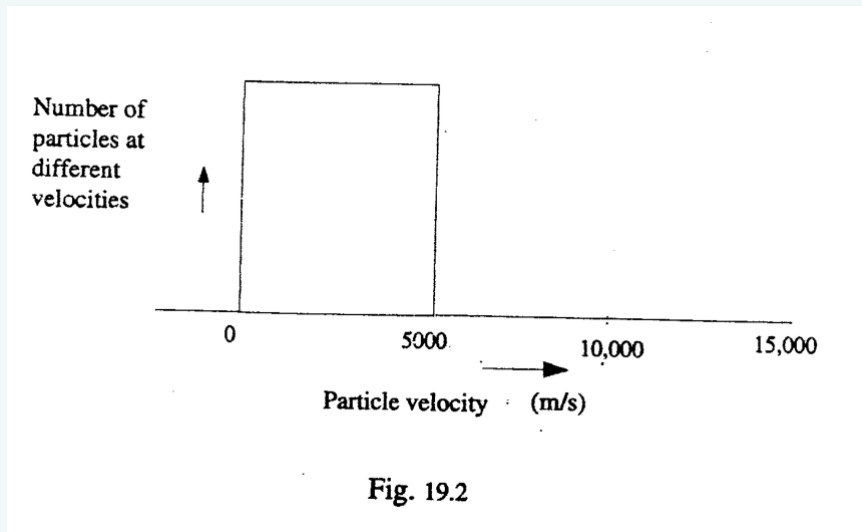


Fig. 19.2

Şekil 19.2

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **1.1.1:** Gerekli lazer dalga boyu aralığı

$$600.000 \text{ nm} \leq \lambda_L \leq 600.012 \text{ nm},$$

olup genişliği 0.012 nm'dir.

- **1.1.2:** Klasik formül, üst sınırdaki dalga boyunu yaklaşık

$$1.2 \times 10^{-7} \text{ nm}$$

kadar düşük verir. Dalga boyundaki en büyük bağıl hata 2.0×10^{-10} ; tarama genişliğindeki bağıl hata ise 1.0×10^{-5} 'tir.

- **1.2:** Hızlandırmadan sonra hız spektrumunun genişliği

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Hızlandırma gerilimi arttıkça bu genişlik azalır.

- **1.3:** Hızlandırma olmadığında, iki dalga boyu aralığı yaklaşık olarak

$$[600.000, 600.012] \text{ nm}, \quad [600.001, 600.013] \text{ nm},$$

olduğundan örtüşürler. Hızlandırma bu aralıkları ayırabilir; eşik değeri

$$U_{\min} \approx 160 \text{ V}.$$

Eşik değerinde bantlar birbirine yalnızca değmektedir; biraz daha büyük bir gerilim sonlu bir aralık oluşturur.

Çözüm

$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ değerini kullanınız. λ_0 , bir iyonun durgun hâldeki rezonans dalga boyunu, λ_L ise laboratuvardaki lazer dalga boyunu gösterebilir. İdealleştirilmiş spektrumların içsel çizgi genişliğinin olmadığı kabul edilmektedir.

1.1.1

İyon, gelen ışığa doğru hareket ettiğinden laboratuvardaki lazer frekansından daha yüksek bir frekans gözlemler. Klasik hareketli gözlemci yaklaşımında,

$$\nu' = \nu_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Uyarılma için iyonun gözlemlediği frekansın, durgun hâldeki rezonans frekansına eşit olması gerekir:

$$\nu' = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

$\nu_L = c/\lambda_L$ olduğundan,

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_L} \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

dolayısıyla

$$\lambda_L(v) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Böylece laboratuvardaki lazer dalga boyu iyonun süratiyle birlikte artmalıdır. Uç noktalarda,

$$\lambda_L(0) = 600 \text{ nm},$$

$$\lambda_L(6000) = 600 \left(1 + \frac{6000}{3.00 \times 10^8}\right) \text{ nm} = 600.012 \text{ nm}.$$

Dolayısıyla gerekli tarama genişliği

$$\Delta\lambda_L = \frac{\lambda_0(v_2 - v_1)}{c} = 0.012 \text{ nm}.$$

1.1.2

$\beta = v/c$ olsun. Verilen görelî formül, rezonans koşulunu

$$\nu_0 = \nu_L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

olarak verir; dolayısıyla gerekli dalga boyunun tam değeri

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \lambda_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Klasik değer $\lambda_{\text{cl}} = \lambda_0(1 + \beta)$ 'dir. Dolayısıyla tam dalga boyuna göre hesaplanan bağıl eksik tahmin,

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_{\text{rel}} - \lambda_{\text{cl}}}{\lambda_{\text{rel}}} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \simeq \frac{\beta^2}{2}.$$

Bu hata, $v_2 = 6000 \text{ m s}^{-1}$ değerinde en büyüktür; bu değer için

$$\beta_2 = 2.00 \times 10^{-5}, \quad \epsilon_{\lambda, \text{max}} \simeq 2.00 \times 10^{-10}.$$

Eşdeğer olarak, tam dalga boyunu seriye açmak,

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3)\right),$$

en büyük mutlak düzeltmeyi verir:

$$\delta\lambda_{\text{max}} \simeq \frac{\lambda_0 \beta_2^2}{2} = 600 \text{ nm} \times 2.00 \times 10^{-10} = 1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

Böylece görelî üst sınır yaklaşık olarak

$$600.01200012 \text{ nm}.$$

$v_1 = 0$ olduğundan alt sınırdaki düzeltme yoktur. Dolayısıyla tarama genişliğindeki mutlak hata da $1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}$ 'dir ve buna karşılık gelen bağıl hata

$$\frac{\delta(\Delta\lambda_L)}{\Delta\lambda_L} \simeq \frac{1.20 \times 10^{-7}}{0.012} = 1.00 \times 10^{-5}$$

ya da 0.001%'tir.

1.2

u , bir iyonun hızlandırmadan sonraki sürati olsun. Tek yüklü her iyon aynı eU kinetik enerjisini kazanır. Göreli olmayan enerji korunumu kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU,$$

dolayısıyla

$$u(v, U) = \sqrt{v^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Bu fonksiyon başlangıç sürati v ile arttığından, hızlandırılmış dağılımın uç noktaları

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}, \quad u_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Sonuç olarak,

$$\Delta v(U) = u_2 - u_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Eşlenikle çarpıp sadeleştirmek, gerilime bağımlılığı özellikle açık hâle getirir:

$$\Delta v(U) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} + \sqrt{v_1^2 + 2eU/m}}.$$

Pay sabittir ve payda U ile artar. Böylece hızlandırma, tüm dağılımı daha yüksek süratlere kaydırırken **genişliğini azaltır**.

Verilen $v_1 = 0$ değeri için,

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

$2eU/m \gg v_2^2$ olduğunda bu ifade şu hâle gelir:

$$\Delta v(U) \simeq \frac{v_2^2}{2\sqrt{2eU/m}} \propto U^{-1/2}.$$

1.3

Şöyle yazalım:

$$\lambda_1 = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = 600.001 \text{ nm}, \quad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.001 \text{ nm}.$$

Hızlandırma olmadığında, durgun hâldeki her dalga boyu için bir lazerle uyarılma aralığı oluşur:

$$\mathcal{I}_i(0) = \left[\lambda_i, \lambda_i \left(1 + \frac{v_2}{c} \right) \right].$$

Sayısal olarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(0) &= [600.000, 600.012] \text{ nm}, \\ \mathcal{I}_2(0) &\simeq [600.001, 600.013] \text{ nm}. \end{aligned}$$

Ortak aralıkları yaklaşık olarak

$$[600.001, 600.012] \text{ nm},$$

olduğundan iki spektrum açıkça örtüşür.

Hızlandırmadan sonra aralıklar şu hâle gelir:

$$\mathcal{I}_i(U) = \left[\lambda_i \left(1 + \frac{u_1}{c} \right), \lambda_i \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) \right].$$

$\lambda_2 > \lambda_1$ olduğundan, birinci aralığın üst sınırı ikinci aralığın alt sınırının altında kaldığında ayrılma gerçekleşir. Sınır koşulu

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

Eşdeğer olarak,

$$u_2 - u_1 = \frac{c \delta \lambda}{\lambda_1} \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

Doppler etkisinde en düşük mertebede, $u_1/c \ll 1$ olduğundan gerekli sınır hız genişliği

$$d \equiv \frac{c \delta \lambda}{\lambda_1} = \frac{(3.00 \times 10^8)(0.001)}{600} \text{ m s}^{-1} = \boxed{500 \text{ m s}^{-1}}.$$

Hızlandırma, hız dağılımını sürekli daralttığından bunu sağlayabilir.

$v_1 = 0$ olduğunda, enerji korunumu ayrıca şunu verir:

$$u_2^2 - u_1^2 = v_2^2.$$

Ayrılma eşiğinde $u_2 - u_1 \simeq d$ olduğundan,

$$u_2 + u_1 \simeq \frac{v_2^2}{d} = \frac{6000^2}{500} = 72,000 \text{ m s}^{-1}.$$

İki sürat için çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} u_1 &\simeq \frac{72,000 - 500}{2} = 35,750 \text{ m s}^{-1}, \\ u_2 &\simeq 36,250 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Son olarak, $e/m = 4 \times 10^6 \text{ C kg}^{-1}$ kullanılarak,

$$U_{\min} \simeq \frac{u_1^2}{2(e/m)} = \frac{(35,750)^2}{8 \times 10^6} \text{ V} \approx \boxed{160 \text{ V}}.$$

Elde edilen süratler, kullanılan yaklaşımlarla tutarlı olarak $u/c \approx 1.2 \times 10^{-4}$ koşulunu sağlar. Klasik uç nokta koşulunda küçük $1 + u_1/c$ çarpanının korunması, belirtilen gerilim değerini değiştirmez.

Sınır geriliminde iki spektrumun kenarları çakışır. Tam ayrılma için bu eşiğin biraz üzerinde bir gerilim gerekir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Maxwell Tekerleđi

Giriş

Kütlesi $M = 0,40$ kg, yarıçapı $R = 0,060$ m ve kalınlığı $d = 0,010$ m olan, düzgün yoğunluklu silindirik bir tekerlek, eşit uzunlukta iki hafif ip yardımıyla tavana asılmıştır. Her bir ip tekerleğin miline sarılmıştır. İpler gibi milin kütlesi de ihmal edilebilir. Tekerlek elle döndürölerek ipler, kütle merkezi yerden $1,0$ m yüksekliğe çıkıncaya kadar sarılır. Tekerlek, yer çekiminin etkisiyle düşey doğrultuda aşağı doğru hareket etmek üzere serbest bırakılırsa ipler tüm uzunlukları boyunca açılır ve tekerlek en alt noktaya ulaşır. Ardından ipler ters yönde sarılmaya başlar ve bunun sonucunda tekerlek yukarı doğru yükselir.

İplerin düşey konumda olduğunu ve iplerin mile temas ettiği noktaların, ilgili asılma noktalarının tam altında bulunduğunu varsayarak aşağıdaki soruları inceleyip yanıtlayınız (bkz. Şekil 19.5).

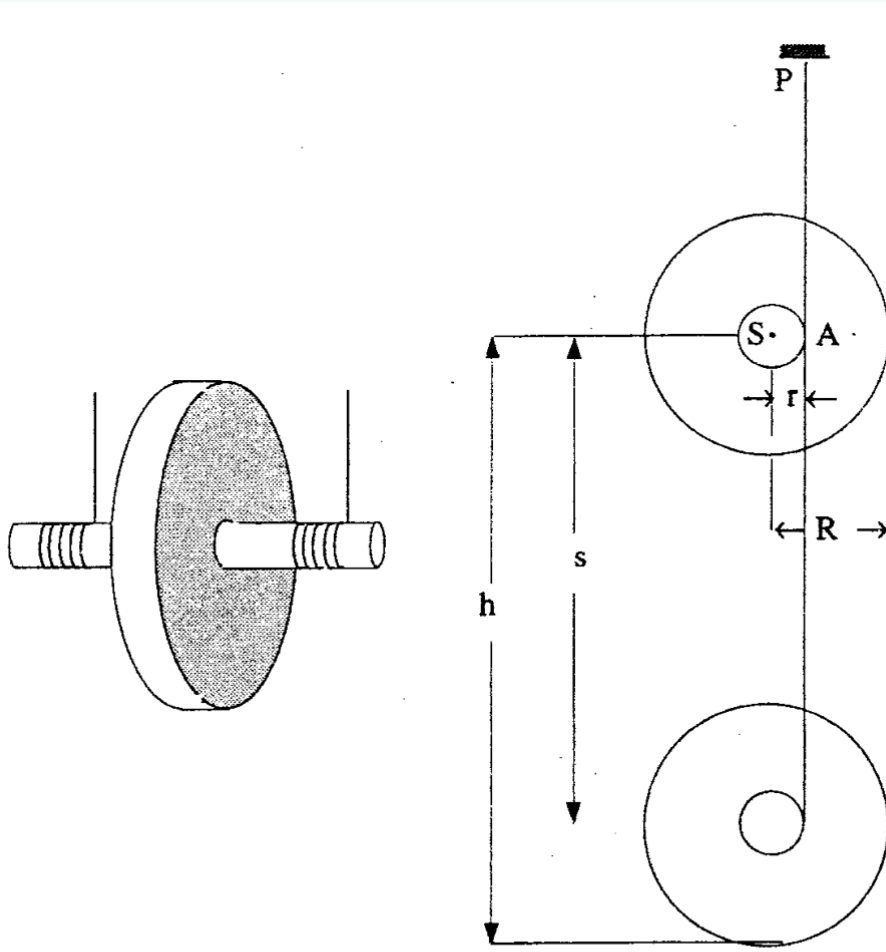


Fig. 19.5

Şekil 19.5

Sorular

2.1

Tekerleğin kütle merkezi düşey doğrultuda s mesafesini katettiğinde tekerleğin açısal hızını bulunuz.

2.2

Tekerlek $s = 0,50$ m mesafesini katettikten sonra kütle merkezinin doğrusal hareketinin kinetik enerjisini E_r bulunuz ve E_r ile bu problemde bu ana kadar başka herhangi bir biçimde bulunan enerji arasındaki oranı hesaplayınız.

Milin yarıçapı = 0,0030 m

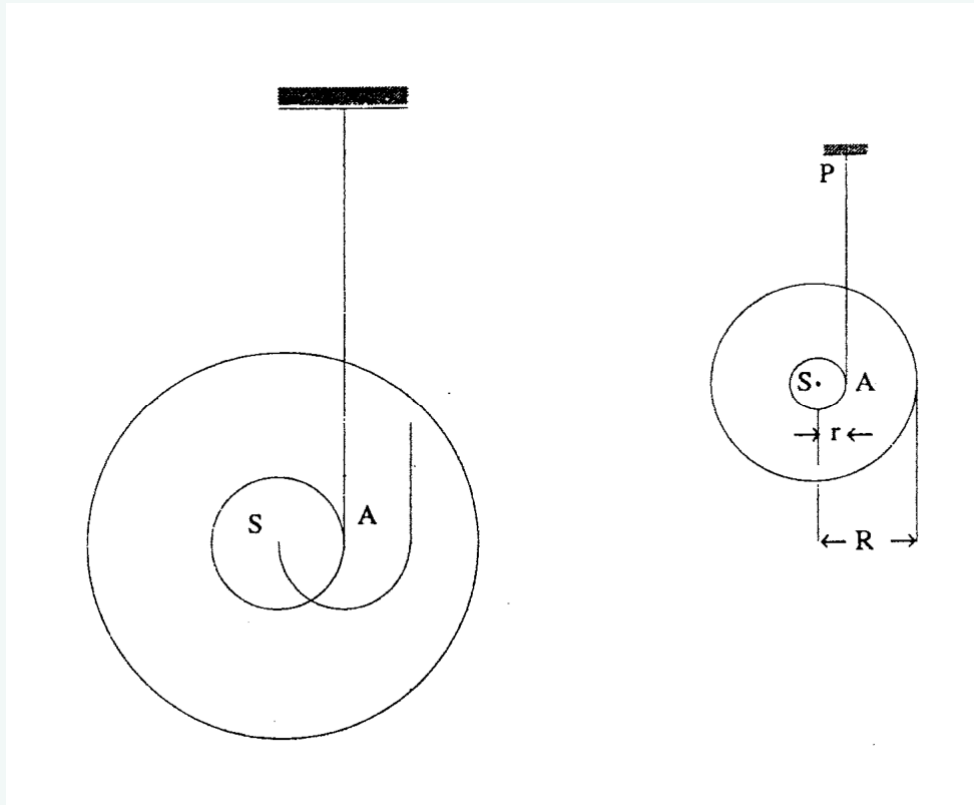
2.3

Tekerlek aşağı doğru hareket ederken ipteki gerilme kuvvetini bulunuz.

2.4

İpler Şekil 19.6'da gösterildiği gibi ters yönde açılmaya başladığında açısal hızı ω' , Φ açısının bir fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Hareketi betimleyen değişkenlerin grafiğini (probleme uygun bir Kartezyen koordinat sisteminde) ve ayrıca kütle merkezinin süratinin Φ 'ye bağlı grafiğini çiziniz.



Şekil 19.6

2.5

İp en fazla $T_m = 10$ N gerilme kuvvetine dayanabiliyorsa tekerleğin koparmadan açabileceği en büyük ip uzunluğunu bulunuz.

Cevaplar

Burada $r = 0.0030$ m olup sayısal hesaplamalarda $g = 9.81$ m s⁻² kullanılmıştır. Yön değiştirme için ℓ , önceki doğrusal iniş mesafesi olsun; girişte $\Phi = 0$, en alt noktada $\Phi = \pi/2$ ve çıkışta $\Phi = \pi$ olarak tanımlansın. 2.4–2.5 bölümlerinde, Şekil 19.6'da gösterilen sabit temaslı, yarım çember biçimindeki yön değiştirme kullanılır; bu bir idealleştirmedir: $\Phi = \pi/2$ dışında gereken temas tepki kuvvetinin yatay bir bileşeni vardır ve düşey ipler bu bileşeni sağlayamaz.

- 2.1

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

$s = 0.50$ m için $\omega = 73.6$ rad s⁻¹ olur.

- 2.2

$$E_r = \frac{Mgs}{201} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

Yer çekimi potansiyel enerjisi yere göre ölçüldüğünde,

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Dolayısıyla $E_r/E_{\text{rot}} = 1/200$ ve $E_r/(Mgs) = 1/201$ olur.

- 2.3 Aşağı doğru olağan açılma sırasında **her bir** ipteki gerilme kuvveti

$$T = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)} = 1.95 \text{ N} \simeq 2.0 \text{ N}.$$

- 2.4

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

Merkezin giriş konumu başlangıç noktası, x sağa ve y yukarı yönlü alınırsa,

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi,$$

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi, \quad v = r\omega'.$$

Yörünge bir alt yarım çemberdir. Sürat, $\pi/2$ 'ye göre simetriktir ve en büyük değerine burada ulaşır.

- **2.5 Her bir** ipin dayanımının izin verdiği en büyük açılma uzunluğu

$$\ell_{\max} = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r = 1.23 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m}.$$

Verilen düzenekte yer, daha kısa bir sınır getirir:

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \approx 0.94 \text{ m}.$$

Yere olan açıklığın bu sınır değerinde, en büyük gerilme kuvveti ip başına yalnızca 8.1 N olur.

Çözüm

Tekerleğin durgun hâlden serbest bırakıldığını, iplerin uzamadığını, sarılma veya açılma sırasında kayma olmadığını ve enerji kayıplarının ihmal edilebilir olduğunu varsayıyoruz.

Tekerleğin mili etrafındaki eylemsizlik momenti

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

Kalınlık d , bu eylemsizlik momenti ifadesinde yer almaz. Şu tanıımı yapmak kullanışlıdır:

$$J = I + Mr^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right).$$

Verilen boyutlar için,

$$\frac{I}{Mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} = 200, \quad \frac{J}{Mr^2} = 201.$$

2.1

İp $d\theta$ açısı kadar açıldığında merkez $ds = r d\theta$ kadar alçalır. Dolayısıyla

$$v = r\omega.$$

s kadar inişten sonra mekanik enerjinin korunumu

$$Mgs = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2.$$

bağıntısını verir. Sonuç olarak,

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{2Mgs}{I + Mr^2}} = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

Sayısal olarak,

$$\omega(s) = (104.1 \text{ rad s}^{-1}) \sqrt{\frac{s}{1 \text{ m}}}.$$

2.2

Öteleme kinetik enerjisi

$$E_r = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{Mr^2}{J}Mgs = \frac{Mgs}{201}.$$

$s = 0.50 \text{ m}$ için,

$$Mgs = 0.40(9.81)(0.50) = 1.962 \text{ J},$$

dolayısıyla

$$E_r = 0.009761 \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

Dönme enerjisi

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

olduğundan,

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}}} = \frac{Mr^2}{I} = \frac{1}{200}.$$

Bunun sayısal değeri

$$E_{\text{rot}} = 1.95224 \text{ J}.$$

Merkez artık yerden $h - s = 0.50 \text{ m}$ yüksektedir. Yer çekimi potansiyel enerjisinin sıfırı yer seviyesi alınır,

$$U = Mg(h - s) = 1.962 \text{ J}.$$

Böylece mevcut üç enerjinin oranı

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Başlangıç enerjisi $Mgh = 3.924 \text{ J}$ idi ve enerji denetimi

$$0.009761 + 1.952239 + 1.962 = 3.924 \text{ J}.$$

şeklinde. Öteleme enerjisi, açığa çıkan yer çekimi enerjisinin $1/201$ 'idir. "Başka herhangi bir biçimde bulunan enerji" ile geriye kalan dönme ve yer çekimi enerjilerinin toplamı kastediliyorsa buna karşılık gelen oran

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}} + U} = \frac{1}{401}.$$

2.3

Her bir ipteki gerilme kuvvetini T ile gösterelim ve aşağı yönlü a ivmesini pozitif alalım. Newton'un ikinci yasası

$$Mg - 2T = Ma.$$

bağıntısını verir. İki gerilme kuvvetinin oluşturduğu tork

$$2Tr = I\alpha,$$

iken açılma koşulu $a = r\alpha$ bağıntısını verir. Dolayısıyla

$$2T = \frac{I}{r^2}a,$$

ve

$$a = \frac{Mg}{M + I/r^2} = \frac{g}{201} = 0.0488 \text{ m s}^{-2}.$$

Buradan

$$T = \frac{M(g-a)}{2} = \frac{Mg}{2} \frac{200}{201} = 1.95224 \text{ N.}$$

elde edilir.

Bu gerilme kuvveti doğrusal iniş boyunca sabittir. Yön değiştirme sırasındaki çok daha büyük kuvvet ayrıca ele alınmalıdır.

2.4

Şekil 19.6'daki eğri yörüngeyi, A 'dan geçen temas doğrusunun sabit kaldığı ve S merkezinin bu doğrunun çevresinde r yarıçaplı bir yarım çember çizdiği kısa bir yön değiştirme olarak yorumluyoruz. Burada kullanılan yön değiştirme idealleştirmesi, dayatılan bu geometriye dayanır.

Yön değiştirmeden önceki doğrusal iniş mesafesi ℓ olsun. Girişte,

$$\omega_0^2 = \frac{2Mg\ell}{J}.$$

S 'nin giriş konumunu başlangıç noktası olarak seçelim; x sağa, y yukarı yönlü olsun. Bu durumda $A = (r, 0)$ olur. Φ 'yi, merkez A 'nın altından geçerken 0 'dan π 'ye artacak şekilde tanımlayalım.

Koordinatlar

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi.$$

Bu koordinatlar

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0.$$

bağıntılarını sağlar.

Bu hareket A etrafında bir dönme olduğundan,

$$\dot{\Phi} = \omega', \quad v = r\omega'.$$

Temas doğrusu etrafındaki eylemsizlik momenti $J = I + Mr^2$ olur. Merkez ek olarak $r \sin \Phi$ kadar alçaldığından enerjinin korunumu

$$\frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + Mgr \sin \Phi.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mgr}{J} \sin \Phi} = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}.$$

Koordinatların türevini alırsak,

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi.$$

Böylece

$$v(\Phi) = r\omega'(\Phi) = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell} \sin \Phi}, \quad v_0 = r\omega_0.$$

Kuvvet hesabında yararlı olan açılal ivme

$$\ddot{\Phi} = \frac{Mgr}{J} \cos \Phi.$$

İstenen grafikler aşağıdaki gibi belirtilebilir:

Φ	x	y	v_x	v_y	Sürat
0	0	0	0	$-v_0$	v_0
$\pi/2$	r	$-r$	$v_{\max}$	0	$v_{\max}$
π	$2r$	0	0	$+v_0$	v_0

Burada

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}, \quad \omega'_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}.$$

Uzaydaki yörünge, düşey bir inişten, yarıçapı $r = 3.0 \text{ mm}$ olan bir alt yarım çemberden ve yatay doğrultuda $2r = 6.0 \text{ mm}$ ötelenmiş düşey bir çıkıştan oluşur. Φ 'nin fonksiyonları olarak x , 0'dan $2r$ 'ye düzgün biçimde artarken y , en küçük değeri $-r$ olan negatif bir yarım sinüs eğrisidir. Hem v hem de ω' , uç noktalardaki değerleri eşit ve en büyük değerleri $\pi/2$ 'de olan simetrik kemer biçimli eğriler oluşturur.

En alt noktada **düşey hız sıfırdır**, ancak **sürat en büyük değerindedir**: bu yarım çember modelinde merkez o anda yatay doğrultuda hareket eder.

2.5

Yön değiştirmenin orta noktasında merkez, A 'nın tam altında bulunur. $\cos \Phi = 0$ olduğundan teğetsel ivmesi sıfır olur ve ivmesi düşey olarak yukarı yönlüdür:

$$a_{\text{bottom}} = \frac{v_{\max}^2}{r} = r\omega_{\max}'^2.$$

Dolayısıyla düşey kuvvet denklemi

$$2T_{\text{peak}} - Mg = Mr\omega_{\max}'^2.$$

2.4'ün sonucu olan

$$\omega_{\max}'^2 = \frac{2Mg(\ell + r)}{J},$$

bağıntısını kullanarak

$$T_{\text{peak}} = \frac{Mg}{2} + \frac{M^2gr(\ell + r)}{J}.$$

elde ederiz.

A 'nın sabit olduğu modelde, en alt nokta gerçekten de kısıt kuvvetinin en büyük olduğu noktadır. Bunu denetlemek için

$$\epsilon = \frac{Mr^2}{J}, \quad b = \frac{r\omega_0^2}{g}, \quad u = \sin \Phi.$$

tanımlarını yapalım. Toplam temas tepki kuvveti F 'yi radyal ve teğetsel bileşenlerine ayırınca

$$\frac{F^2}{M^2g^2} = b^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2b(1 + 2\epsilon)u + 3\epsilon(2 + \epsilon)u^2.$$

elde edilir. u ve u^2 'nin tüm katsayıları sıfır veya pozitifdir; dolayısıyla en büyük değer, tepki kuvvetinin düşey olduğu ve ipler arasında eşit paylaşıldığı $u = 1$ noktasında ortaya çıkar.

Her bir ipteki en büyük gerilme kuvvetini T_m 'ye eşitlersek,

$$2T_m = Mg + \frac{2M^2gr(\ell_{\max} + r)}{J}.$$

Böylece

$$\ell_{\max} = \frac{J(2T_m - Mg)}{2M^2gr} - r = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r.$$

Sayısal olarak,

$$\ell_{\max} = \frac{0.060^2 + 2(0.0030)^2}{4(9.81)(0.0030)} \left(\frac{20}{0.40} - 9.81 \right) - 0.0030 = 1.2322 \text{ m}.$$

Dolayısıyla ipin dayanımından kaynaklanan sınır yaklaşık olarak

$$\ell_{\max} \simeq 1.2 \text{ m}.$$

Yerden kaynaklanan geometrik bir kısıtlama da vardır. Yön değiştirme sırasında merkezin en küçük yüksekliği $h - \ell - r$ olur. Tekerleğin yerin üzerinde kalması için,

$$h - \ell - r \geq R,$$

olmalıdır; dolayısıyla

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \simeq 0.94 \text{ m}.$$

Bu uzunluğu en büyük gerilme kuvveti formülünde yerine koyarsak

$$T_{\text{peak}} = 8.08 \text{ N} < 10 \text{ N}.$$

elde edilir. Sonuç olarak, ipin dayanım sınırına ulaşılmadan önce yer, mümkün olan açılma uzunluğunu sınırlar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 3: İyonlaşmış Gazda Pozitif ve Negatif İyonların Yeniden Birleşmesi

Giriş

Bir gaz, bir elementin pozitif iyonlarından (yüksek sıcaklıkta) ve elektronlardan oluşmaktadır. Pozitif iyon, kütle numarası Z bilinmeyen bir atoma aittir. Bu iyonun kabuğunda (yörüngesinde) yalnızca bir elektron bulunduğu bilinmektedir.

Bu iyon $A^{(Z-1)+}$ simgesiyle gösterilsin.

Sabitler:

Sabit	Değer
elektrik alan sabiti	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
temel yük	$e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
	$q^2 = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 2,037 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$

Sabit	Değer
Planck sabiti	$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
elektronun (durgun) kütlesi	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Bohr atom yarıçapı	$r_B = \frac{\hbar}{m \cdot q^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Rydberg enerjisi	$E_R = \frac{q^2}{2 \cdot r_B} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
protonun (durgun) kütlesi	$m_p \cdot c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

Sorular:

3.1

Kabuğunda yalnızca bir elektron kalmış olan iyonu ele alınız.

$A^{(Z-1)+}$ temel durumdadır.

En düşük enerjili durumda, elektronun çekirdekten ortalama uzaklığının karesi, yani r^2 , x, y ve z eksenleri doğrultusundaki bileşenleri sırasıyla $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ ve $(\Delta z)^2$ olmak üzere

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

ile, ortalama momentumun karesi ise

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2,$$

ile verilir; burada

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta y} \quad \text{ve} \quad \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta z}.$$

$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2$ içeren eşitsizliği tam biçimiyle yazınız.

3.2

$A^{(Z-1)+}$ ile gösterilen iyon, bir elektron daha yakalayabilir ve bunun sonucunda bir foton yayar.

Yayılan fotonun frekansını hesaplamak için kullanılacak denklemini yazınız.

3.3

$A^{(Z-1)+}$ iyonunun enerjisini, en düşük enerji değerini kullanarak hesaplayınız. Hesaplama aşağıdaki ilkelere dayanan bir yaklaşım kullanılmalıdır:

3.3.A

İyonun potansiyel enerjisi, $\frac{1}{r}$ niceliğinin ortalama değeri cinsinden ifade edilmelidir.

(yani $\frac{1}{r_0}$; r_0 soruda verilmiştir).

3.3.B

İyonun kinetik enerjisini hesaplarken, 3.1'de verilen momentumun karesinin ortalama değerini,

$$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2 \approx (\hbar)^2$$

ile basitleştirdikten sonra kullanınız.

3.4

Temel durumda olduğu kabul edilen $A^{(Z-2)+}$ iyonunun enerjisini, $A^{(Z-1)+}$ iyonunun enerjisinin hesaplanmasında kullanılan ilkeyi uygulayarak hesaplayınız. En dış kabuktaki iki elektronun her birinin ortalama uzaklığı (3.3'te verilen r_0 ile aynı anlamda) r_1 ve r_2 ile gösterilsin. İki elektron arasındaki ortalama uzaklığın $r_1 + r_2$ ile verildiğini ve her elektronun momentumunun karesinin ortalama değerinin belirsizlik ilkesine uyduğunu, yani

$$p_1^2 \cdot r_1^2 \approx \hbar^2 \quad \text{ve} \quad p_2^2 \cdot r_2^2 \approx \hbar^2$$

olduğunu varsayınız.

ipucu: Temel durumda $r_1 = r_2$ olduğu bilgisinden yararlanınız.

3.5

Özellikle, bir elektron daha yakalarken $A^{(Z-2)+}$ iyonunun temel durumda ve durgun olduğunu, yakalanan elektronun da yakalanmadan önce durgun olduğunu ele alınız. Elektron yakalanmasına eşlik eden fotonun frekansı $2,057 \cdot 10^{17}$ rad/s ise Z 'nin sayısal değerini belirleyiniz. İyonun hangi elementten oluştuğunu bulunuz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Enerji ölçeğini

$$\mathcal{R} = \frac{m_e(q^2)^2}{2\hbar^2}.$$

olarak tanımlayalım. Tutarlı sabitler kullanıldığında bu, Rydberg enerjisi E_R 'dir. Metinde verilen sabitler tutarsız olduğundan, bunların sayısal sonuçları aşağıda ayrı ayrı ele alınmıştır.

• 3.1

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

• 3.2

$$\hbar\omega = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f,$$

burada E_i, E_f iç elektronik enerjiler, K 'ler ise öteleme kinetik enerjileridir.

• 3.3

$$E_1 = -Z^2 \mathcal{R} \quad (\text{alışılmış gösterimle, } -Z^2 E_R).$$

• 3.3.A

$$U_1(r_0) \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

• 3.3.B

$$T_1(r_0) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}, \quad r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

• 3.4

$$E_2 = -2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{R}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

• 3.5 Kastedilen **ikinci** elektronun yakalanması için,

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}$$

geri tepme ihmal edilerek elde edilir. Verilen E_R , $Z = 3.673$ sonucunu; metinde verilen q^2 , m_e , $\hbar$ ise $Z = 4.088$ sonucunu verir. Her ikisine de en yakın tam sayı

$$Z = 4, \quad \text{berilyum (Be).}$$

olur. Bu, koşullu ve yaklaşık bir belirlemedir. Metindeki hâliyle 3.5 kısmı, enerjisi belirtilmemiş olan üçüncü bir elektronun yakalanmasını anlatmaktadır.

Çözüm

İyonların yük durumları, çekirdeğin yükünün $+Ze$ olduğunu gösterir. Çekirdeğin kütlesini elektronun kütlesine kıyasla büyük kabul ediyor, elektronik enerjileri hesaplarken çekirdeğin hareketini ihmal ediyor ve elektronlar için göreceli olmayan kinetik enerji ifadelerini kullanıyoruz. Elektronik bağlanma enerjileri, çekirdek ve birbirinden ayrılmış elektronlar referans alınarak ölçülür.

3.1

Üç belirsizlik eşitsizliğinin karelerini alıp toplayınca

$$p_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right].$$

elde edilir.

Verilen r_0^2 ile çarpıldığında tam ifade

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[3 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta z)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right].$$

olur.

Birbirinin çarpmaya göre tersi olan her terim çiftinin toplamı en az 2'dir; çünkü $u > 0$ için $u + u^{-1} \geq 2$ olur. Dolayısıyla

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

Eşitlik için hem konum belirsizliklerinin eşit olması,

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z,$$

hem de üç bileşene ait belirsizlik bağıntılarının tümünde eşitliğin sağlanması gerekir. Küresel simetri tek başına bu eşitliklerin sağlandığını göstermez.

3.2

Işınımlı yakalama tepkimesi



şeklindedir.

E_i, E_f , başlangıç ve son iç elektronik enerjileri gösterebilir. K_i, K_e , iyonun ve elektronun başlangıç kinetik enerjileri, K_f ise iyonun son kinetik enerjisi olsun. Enerjinin korunumu

$$E_i + K_i + K_e = E_f + K_f + \hbar\omega.$$

bağıntısını verir.

Böylece

$$\hbar\omega = h\nu = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Her iki tarafta ortak olan çekirdek ve elektron durgunluk enerjileri birbirini götürür. Momentumun korunumu, son iyonun geri tepmesini belirler. Başlangıç kinetik enerjileri ve geri tepme ihmal edilebiliyorsa bu ifade

$$\hbar\omega \approx E_i - E_f.$$

biçimine indirgenir.

3.3

Şimdi sorunun gerektirdiği yaklaşık toplam elektronik enerjiyi en küçük yapalım.

3.3.A

Çekici Coulomb potansiyeli

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Zq^2}{r}.$$

şeklindedir. Beklenen değeri için belirtilen yaklaşımı kullanırsak,

$$U_1 \approx -Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

3.3.B

Elektronun durağan temel durumda ortalama momentumu sıfırdır; dolayısıyla momentumunun karesinin ortalaması p_0^2 ile temsil edilir. Öngörülen

$$p_0^2 r_0^2 \approx \hbar^2$$

tahmini bu nedenle

$$T_1 \approx \frac{p_0^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}.$$

sonucunu verir.

Bu, belirsizlik sonucunun yerine bilerek kullanılan kaba bir yaklaşımdır: 3.1'deki sayısal katsayıyı atar ve o sınırdan türetilmiş bir eşitlik değildir.

Buna göre tahmini toplam enerji

$$E_1(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} - \frac{Zq^2}{r_0}.$$

olur. Durağan noktası

$$\frac{dE_1}{dr_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{Zq^2}{r_0^2} = 0,$$

koşulunu sağlar ve buradan

$$r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Zq^2}.$$

elde edilir.

Bu noktadaki ikinci türev $\hbar^2/(m_e r_0^4) > 0$ olduğundan, bu bir minimumdur. Yerine koyunca

$$T_{1,\min} = \frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2}, \quad U_{1,\min} = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{\hbar^2},$$

ve dolayısıyla

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2} = -Z^2 \mathcal{R}.$$

elde edilir.

Tutarlı Bohr ve Rydberg sabitleriyle bunlar, bilinen

$$r_{0,\min} = \frac{r_B}{Z}, \quad E_1 = -Z^2 E_R.$$

biçimlerini alır.

3.4

Artık iki elektronun kinetik enerjisi, iki çekici elektron-çekirdek terimi ve bir itici elektron-elektron terimi vardır. Elektronlar arasındaki uzaklık için belirtilen yaklaşım altında,

$$E_2(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Zq^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{q^2}{r_1 + r_2}.$$

Verilen temel durum koşulu $r_1 = r_2 = r$ kullanıldığında,

$$E_2(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2Zq^2}{r} + \frac{q^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r}.$$

Enerjiyi en küçük yapma koşulu

$$-\frac{2\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r^2} = 0,$$

olduğundan,

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

Bu yarıçapta,

$$E_2 = -\frac{m_e (q^2)^2}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 = -2\mathcal{R} \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2.$$

Dolayısıyla bu modelde elektronlar arasındaki itme, her elektronun temel durum enerjisinde Z 'nin yerine etkin değer olan $Z - \frac{1}{4}$ 'ün geçmesine yol açar.

3.5

Bu kısmı 3.3 ve 3.4'te hesaplanan enerjilerle ilişkilendirmek için yakalama süreci



olarak yorumlanmalıdır. Buna karşılık, 3.5'te yazılı olan yük durumu, farklı bir süreci, yani enerjisi bu problemde hesaplanmayan üçüncü bir elektronun yakalanmasını tarif eder.

Kastedilen süreç için açığa çıkan bağlanma enerjisi

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 \\ &= \left[2 \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 - Z^2 \right] \mathcal{R} \\ &= \left(Z^2 - Z + \frac{1}{8} \right) \mathcal{R}. \end{aligned}$$

olur.

Başlangıçtaki her iki parçacık da durgun olmasına rağmen, son iyon geri tepmelidir. Kütlesi M ise momentumun korunumu

$$p_{\text{ion}} = p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

bağıntısını verir. Sonuç olarak,

$$\Delta E = \hbar\omega + \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}.$$

Verilen frekans bir **açısal frekanstır**; dolayısıyla foton enerjisi

$$E_\gamma = \hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34})(2.057 \times 10^{17}) = \boxed{2.168 \times 10^{-17} \text{ J}}.$$

olur.

$Mc^2 \geq m_p c^2$ kullanıldığında, bağlı geri tepme düzeltmesinin üst sınırı

$$\frac{K_{\text{recoil}}}{E_\gamma} = \frac{E_\gamma}{2Mc^2} \leq \frac{2.168 \times 10^{-17}}{2(1.503 \times 10^{-10})} = 7.21 \times 10^{-8}.$$

olur. Verilerin hassasiyetinde bu düzeltme tamamen ihmal edilebilir.

Bu nedenle

$$Z^2 - Z + \frac{1}{8} = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}},$$

olur ve bu denklemin fiziksel kökü

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}.$$

şeklindedir.

Tutarsız sabitler iki sayısal tahmine yol açar:

Enerji ölçeği için kullanılan sabitler	$\mathcal{R}$	Tahmini Z
Verilen Rydberg enerjisi E_R	$2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$	3.673
$m_e(q^2)^2/(2\hbar^2)$ aracılığıyla metinde verilen $q^2, m_e, \hbar$	$1.701 \times 10^{-18} \text{ J}$	4.088

Her iki tahmine de en yakın tam sayı 4'tür. Buna göre, kastedilen yakalama yorumu ve yaklaşık model altında çıkarılan element

$$Z = 4, \quad \text{berilyum,}$$

olup yakalama tepkimesi



şeklindedir.

Verilen metin, kesin ve kendi içinde tutarlı bir tam sayı belirlenmesini desteklememektedir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.