

IPhO 1988

Теоретические задачи и решения · Бад-Ишль, Австрия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1988/

Задача 1: Спектроскопия скоростей частиц

Основные сведения

Поглощение и испускание фотона — обратимый процесс. Хорошим примером служат возбуждение атома из основного состояния в состояние с более высокой энергией и последующее возвращение атома в основное состояние. В таком случае поглощение фотона можно обнаружить по спонтанному излучению или флуоресценции. Некоторые современные приборы используют этот принцип для идентификации атомов, а также для измерения или вычисления значения скорости в спектре скоростей электронного пучка.

В идеализированном эксперименте (см. рис. 19.1) однозарядный ион движется со скоростью v навстречу свету от лазерного источника. Длину волны света лазерного источника можно изменять. Ион с нулевой скоростью можно возбудить в состояние с более высокой энергией с помощью лазерного света с длиной волны $\lambda = 600 \text{ nm}$. Если требуется возбудить движущийся ион, то из эффекта Доплера следует, что нужно использовать лазерный свет с длиной волны, отличной от указанной выше.

Задан спектр скоростей, охватывающий значения модуля скорости от $v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ до $v_2 = 6,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (см. рис. 19.1)

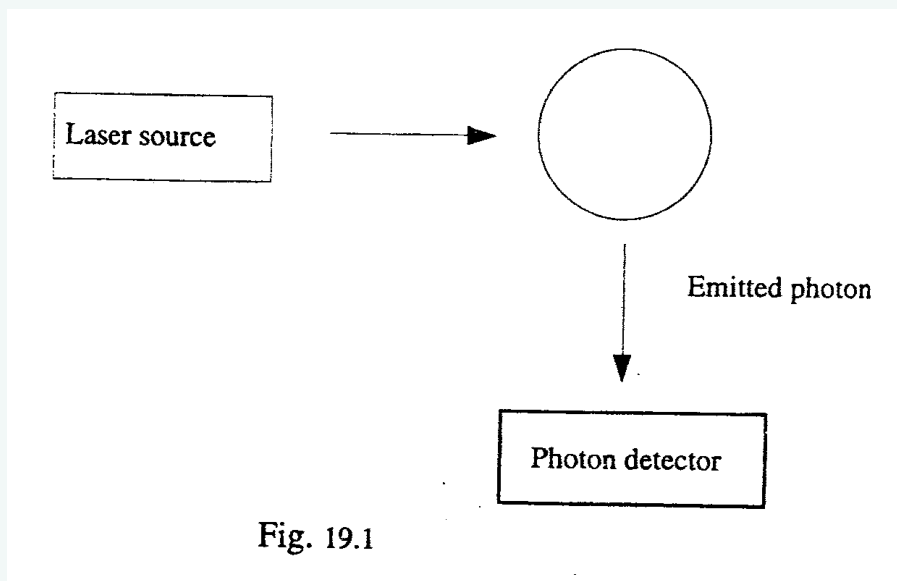


Рис. 19.1

Вопросы

1.1

1.1.1

Какой диапазон длин волн лазерного излучения необходимо использовать, чтобы возбудить ионы со всеми скоростями из заданного выше спектра скоростей?

1.1.2

Строгий анализ задачи требует применения соотношения из специальной теории относительности

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

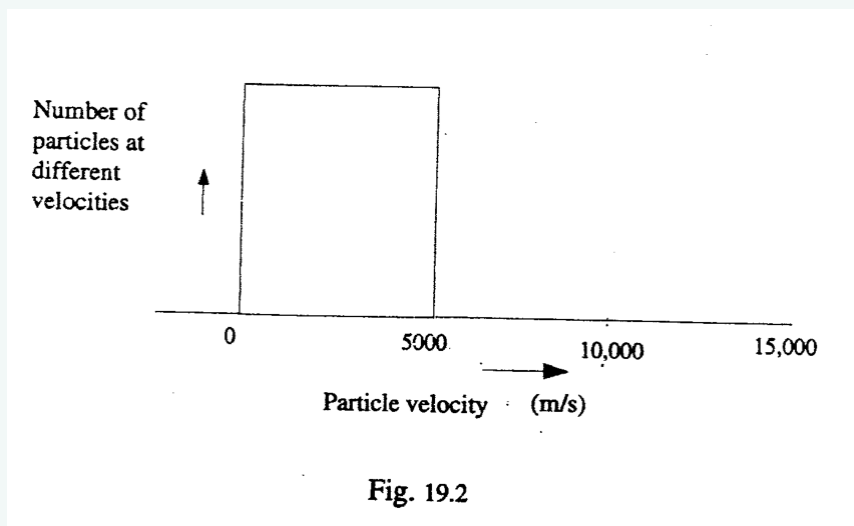
Определите погрешность, возникающую при использовании классической формулы эффекта Доплера для решения этой задачи.

1.2

Предполагая, что перед возбуждением лазерным пучком ионы ускоряются разностью потенциалов U , определите зависимость ширины спектра скоростей ионного пучка от ускоряющей разности потенциалов. Увеличивает или уменьшает ускоряющее напряжение ширину спектра скоростей?

1.3

Для каждого иона $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$, и имеются два энергетических уровня, соответствующих длинам волн $\lambda^{(1)} = 600 \text{ nm}$ и $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 10^{-3} \text{ nm}$. Покажите, что при отсутствии ускоряющей разности потенциалов спектры света, используемого для возбуждения ионов на этих двух длинах волн, перекрываются. Можно ли с помощью ускоряющего напряжения разделить два спектра лазерного света, используемого для возбуждения ионов, так, чтобы они больше не перекрывались? Если ответ положительный, вычислите минимальное необходимое напряжение.



Ответы

- **1.1.1:** Необходимый диапазон длин волн лазера:

$$600.000 \text{ nm} \leq \lambda_L \leq 600.012 \text{ nm},$$

его ширина равна 0.012 nm .

- **1.1.2:** Классическая формула занижает верхнюю границу диапазона длин волн приблизительно на

$$1.2 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

Максимальная относительная погрешность длины волны составляет 2.0×10^{-10} ; относительная погрешность ширины диапазона сканирования составляет 1.0×10^{-5} .

- **1.2:** После ускорения ширина спектра скоростей равна

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Она уменьшается с увеличением ускоряющего напряжения.

- **1.3:** Без ускорения два интервала длин волн приблизительно равны

$$[600.000, 600.012] \text{ nm}, \quad [600.001, 600.013] \text{ nm},$$

поэтому они перекрываются. Ускорение позволяет разделить их; пороговое напряжение равно

$$U_{\min} \approx 160 \text{ V}.$$

При пороговом напряжении полосы лишь соприкасаются; при немного большем напряжении между ними появляется конечный зазор.

Решение

Примем $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Обозначим через λ_0 резонансную длину волны покоящегося иона, а через λ_L — длину волны лазера в лабораторной системе отсчёта. Считаем, что идеализированные спектры не имеют собственной ширины линий.

1.1.1

Ион движется навстречу падающему свету, поэтому воспринимаемая им частота выше частоты лазера в лабораторной системе отсчёта. В классическом приближении для движущегося наблюдателя

$$\nu' = \nu_L \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

Для возбуждения необходимо, чтобы частота света в системе отсчёта иона совпадала с его резонансной частотой в состоянии покоя:

$$\nu' = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

Поскольку $\nu_L = c/\lambda_L$,

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_L} \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

и, следовательно,

$$\lambda_L(v) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Таким образом, длина волны лазера в лабораторной системе отсчёта должна увеличиваться с ростом скорости иона. На границах диапазона

$$\begin{aligned} \lambda_L(0) &= 600 \text{ nm}, \\ \lambda_L(6000) &= 600 \left(1 + \frac{6000}{3.00 \times 10^8}\right) \text{ nm} = 600.012 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Следовательно, необходимая ширина диапазона сканирования равна

$$\Delta\lambda_L = \frac{\lambda_0(v_2 - v_1)}{c} = 0.012 \text{ nm}.$$

1.1.2

Положим $\beta = v/c$. Приведённая релятивистская формула даёт условие резонанса

$$\nu_0 = \nu_L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

так что точное значение необходимой длины волны равно

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \lambda_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Классическое значение равно $\lambda_{\text{cl}} = \lambda_0(1 + \beta)$. Поэтому относительное занижение, отнесённое к точной длине волны, составляет

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_{\text{rel}} - \lambda_{\text{cl}}}{\lambda_{\text{rel}}} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \simeq \frac{\beta^2}{2}.$$

Эта погрешность максимальна при $v_2 = 6000 \text{ m s}^{-1}$, для которой

$$\beta_2 = 2.00 \times 10^{-5}, \quad \epsilon_{\lambda, \text{max}} \simeq 2.00 \times 10^{-10}.$$

Тот же результат можно получить, разложив точную длину волны в ряд:

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3)\right),$$

что даёт максимальную абсолютную поправку

$$\delta\lambda_{\text{max}} \simeq \frac{\lambda_0 \beta_2^2}{2} = 600 \text{ nm} \times 2.00 \times 10^{-10} = 1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

Таким образом, релятивистское значение верхней границы приблизительно равно

$$600.01200012 \text{ nm}.$$

Поправка к нижней границе отсутствует, поскольку $v_1 = 0$. Следовательно, абсолютная погрешность ширины диапазона сканирования также равна $1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}$, что соответствует

$$\frac{\delta(\Delta\lambda_L)}{\Delta\lambda_L} \simeq \frac{1.20 \times 10^{-7}}{0.012} = \boxed{1.00 \times 10^{-5}}$$

или 0.001%.

1.2

Пусть u — скорость иона после ускорения. Каждый однозарядный ион получает одинаковую добавку к кинетической энергии eU . Из нерелятивистского закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU,$$

следует

$$u(v, U) = \sqrt{v^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Эта функция возрастает с начальной скоростью v , поэтому границы распределения после ускорения равны

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}, \quad u_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Следовательно,

$$\Delta v(U) = u_2 - u_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

После умножения и деления на сумму корней зависимость от напряжения становится особенно наглядной:

$$\Delta v(U) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} + \sqrt{v_1^2 + 2eU/m}}.$$

Числитель постоянен, а знаменатель увеличивается с ростом U . Таким образом, ускорение сдвигает всё распределение в сторону более высоких скоростей, одновременно **уменьшая его ширину**.

Для заданного значения $v_1 = 0$

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

При $2eU/m \gg v_2^2$ это выражение принимает вид

$$\Delta v(U) \simeq \frac{v_2^2}{2\sqrt{2eU/m}} \propto U^{-1/2}.$$

1.3

Обозначим

$$\lambda_1 = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = 600.001 \text{ nm}, \quad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.001 \text{ nm}.$$

Без ускорения каждой резонансной длине волны покоящегося иона соответствует интервал длин волн лазерного возбуждения

$$\mathcal{I}_i(0) = \left[\lambda_i, \lambda_i \left(1 + \frac{v_2}{c} \right) \right].$$

Численно

$$\mathcal{I}_1(0) = [600.000, 600.012] \text{ nm},$$

$$\mathcal{I}_2(0) \simeq [600.001, 600.013] \text{ nm}.$$

Их общий интервал приблизительно равен

$$[600.001, 600.012] \text{ nm},$$

поэтому два спектра явно перекрываются.

После ускорения интервалы принимают вид

$$\mathcal{I}_i(U) = \left[\lambda_i \left(1 + \frac{u_1}{c} \right), \lambda_i \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) \right].$$

Поскольку $\lambda_2 > \lambda_1$, разделение происходит, когда верхняя граница первого интервала оказывается ниже нижней границы второго. Предельное условие имеет вид

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

Эквивалентная запись:

$$u_2 - u_1 = \frac{c \delta\lambda}{\lambda_1} \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

В главном порядке доплеровского приближения $u_1/c \ll 1$, поэтому требуемая предельная ширина спектра скоростей равна

$$d \equiv \frac{c \delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{(3.00 \times 10^8)(0.001)}{600} \text{ m s}^{-1} = \boxed{500 \text{ m s}^{-1}}.$$

Ускорение позволяет достичь этого значения, поскольку оно непрерывно сужает распределение скоростей.

При $v_1 = 0$ закон сохранения энергии также даёт

$$u_2^2 - u_1^2 = v_2^2.$$

На пороге разделения $u_2 - u_1 \simeq d$, и поэтому

$$u_2 + u_1 \simeq \frac{v_2^2}{d} = \frac{6000^2}{500} = 72,000 \text{ m s}^{-1}.$$

Находя обе скорости, получаем

$$u_1 \simeq \frac{72,000 - 500}{2} = 35,750 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_2 \simeq 36,250 \text{ m s}^{-1}.$$

Наконец, используя $e/m = 4 \times 10^6 \text{ C kg}^{-1}$, получаем

$$U_{\min} \simeq \frac{u_1^2}{2(e/m)} = \frac{(35,750)^2}{8 \times 10^6} \text{ V} \approx \boxed{160 \text{ V}}.$$

Для полученных скоростей выполняется $u/c \approx 1.2 \times 10^{-4}$, что согласуется с использованными приближениями. Учёт малого множителя $1 + u_1/c$ в классическом условии совпадения границ не изменяет приведённого значения напряжения.

При предельном напряжении две границы спектров совпадают. Для строгого разделения требуется напряжение немного выше этого порога.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Колесо Максвелла

Введение

Цилиндрическое колесо однородной плотности массой $M = 0,40$ кг, радиусом $R = 0,060$ м и толщиной $d = 0,010$ м подвешено к потолку на двух лёгких нитях одинаковой длины. Каждая нить намотана на ось колеса. Массой оси, как и массой нитей, можно пренебречь. Колесо поворачивают вручную, наматывая нити до тех пор, пока центр масс не поднимется на высоту $1,0$ м над полом. Если позволить колесу двигаться вертикально вниз под действием силы тяжести, нити разматываются на всю длину, и колесо достигает нижней точки. Затем нити начинают наматываться в противоположном направлении, вследствие чего колесо поднимается вверх.

Проанализируйте движение и ответьте на следующие вопросы, считая, что нити расположены вертикально, а точки их касания с осью находятся непосредственно под соответствующими точками подвеса (см. рис. 19.5).

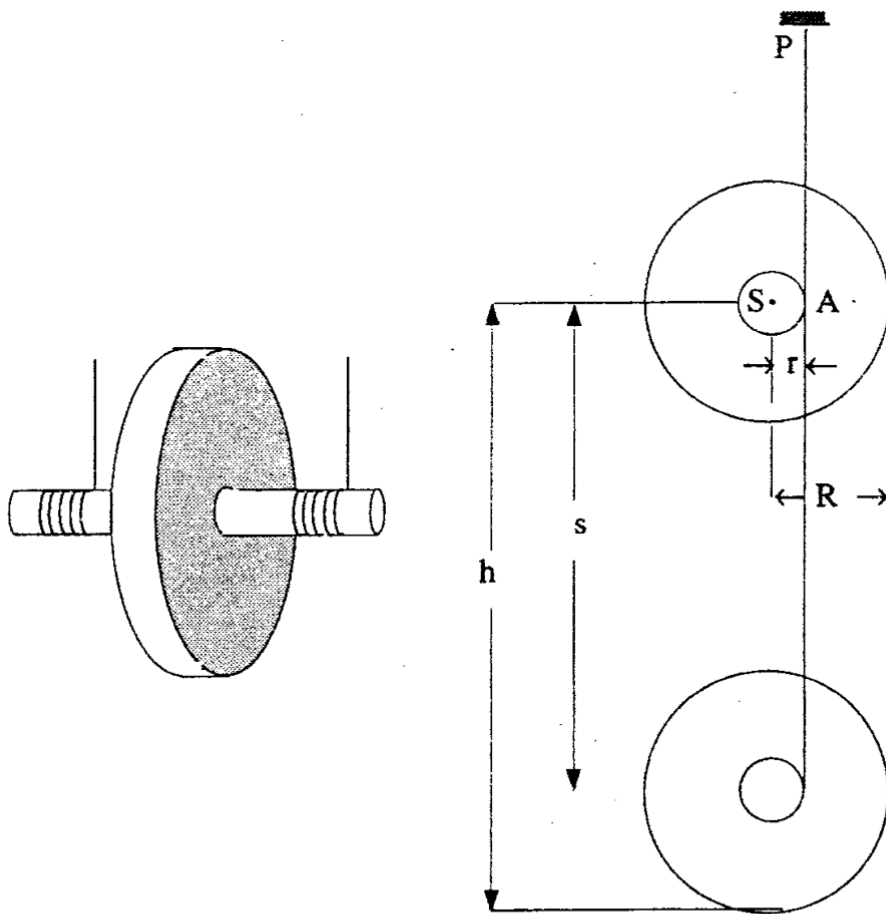


Fig. 19.5

Рис. 19.5

Вопросы

2.1

Определите угловую скорость колеса после того, как его центр масс пройдёт по вертикали расстояние s .

2.2

Определите кинетическую энергию поступательного движения центра масс E_r после того, как колесо пройдёт расстояние $s = 0,50$ м, и вычислите отношение E_r к энергии в любой другой форме, присутствующей в данной задаче к этому моменту.

Радиус оси = 0,0030 м

2.3

Определите силу натяжения нити при движении колеса вниз.

2.4

Вычислите угловую скорость ω' как функцию угла Φ , когда нити начинают разматываться в противоположном направлении, как показано на рис. 19.6.

Схематически изобразите график величин, описывающих движение (в подходящей для данной задачи декартовой системе координат), а также зависимость модуля скорости центра масс от Φ .

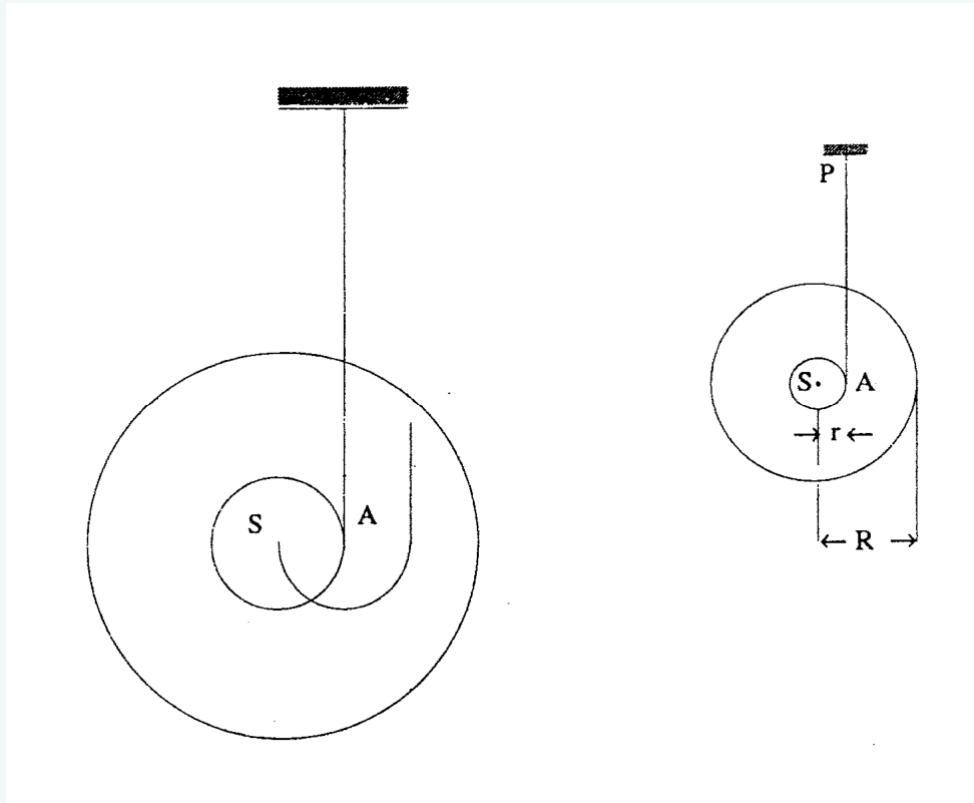


Рис. 19.6

2.5

Если нить выдерживает максимальную силу натяжения $T_m = 10 \text{ N}$, найдите максимальную длину нити, которую колесо может размотать, не разорвав её.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь $r = 0.0030 \text{ m}$, а в численных расчётах используется $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. При рассмотрении разворота обозначим через ℓ длину предшествующего прямолинейного спуска и положим $\Phi = 0$ в начале разворота, $\Phi = \pi/2$ в нижней точке и $\Phi = \pi$ в конце разворота. В пунктах 2.4–2.5 используется изображённая на рис. 19.6 модель разворота по полуокружности с неподвижной линией контакта; это идеализация: за исключением положения $\Phi = \pi/2$, требуемая реакция контакта имеет горизонтальную составляющую, которую вертикальные нити создать не могут.

• 2.1

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

При $s = 0.50 \text{ m}$ угловая скорость $\omega = 73.6 \text{ rad s}^{-1}$.

• 2.2

$$E_r = \frac{Mgs}{201} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

Если отсчитывать гравитационную потенциальную энергию от уровня пола,

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Таким образом, $E_r/E_{\text{rot}} = 1/200$, а $E_r/(Mgs) = 1/201$.

- 2.3 Сила натяжения **каждой** нити при обычном разматывании во время спуска равна

$$T = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)} = 1.95 \text{ N} \simeq 2.0 \text{ N}.$$

• 2.4

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

Если выбрать начало координат в положении центра в начале разворота и направить ось x вправо, а ось y вверх,

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi,$$

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi, \quad v = r\omega'.$$

Траектория представляет собой нижнюю полуокружность. Модуль скорости симметричен относительно $\pi/2$ и достигает там максимума.

- 2.5 Максимальная размотанная длина **каждой** нити, определяемая её прочностью, равна

$$\ell_{\text{max}} = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r = 1.23 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m}.$$

В описанной установке наличие пола накладывает более строгое ограничение:

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \approx 0.94 \text{ m}.$$

При такой предельной длине, допускаемой расстоянием до пола, максимальная сила натяжения составляет всего 8.1 N для каждой нити.

Решение

Будем считать, что колесо отпускают из состояния покоя, нити нерастяжимы, при наматывании и разматывании проскальзывания нет, а диссипативными потерями можно пренебречь.

Момент инерции колеса относительно его оси равен

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

Толщина d не входит в выражение для этого момента инерции. Удобно ввести обозначение

$$J = I + Mr^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right).$$

Для заданных размеров

$$\frac{I}{Mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} = 200, \quad \frac{J}{Mr^2} = 201.$$

2.1

При разматывании на угол $d\theta$ центр опускается на расстояние $ds = r d\theta$. Поэтому

$$v = r\omega.$$

Из закона сохранения механической энергии после спуска на расстояние s следует

$$Mgs = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2.$$

Следовательно,

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{2Mgs}{I + Mr^2}} = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

Численно

$$\omega(s) = (104.1 \text{ rad s}^{-1}) \sqrt{\frac{s}{1 \text{ m}}}.$$

2.2

Кинетическая энергия поступательного движения равна

$$E_r = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{Mr^2}{J}Mgs = \frac{Mgs}{201}.$$

При $s = 0.50 \text{ m}$

$$Mgs = 0.40(9.81)(0.50) = 1.962 \text{ J},$$

поэтому

$$E_r = 0.009761 \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

Энергия вращательного движения равна

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

откуда

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}}} = \frac{Mr^2}{I} = \frac{1}{200}.$$

Её численное значение составляет

$$E_{\text{rot}} = 1.95224 \text{ J}.$$

Теперь центр находится на высоте $h - s = 0.50 \text{ m}$ над полом. Принимая уровень пола за нулевой уровень гравитационной потенциальной энергии, получаем

$$U = Mg(h - s) = 1.962 \text{ J}.$$

Таким образом, три имеющиеся энергии находятся в отношении

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Начальная энергия составляла $Mgh = 3.924 \text{ J}$, и проверка энергетического баланса даёт

$$0.009761 + 1.952239 + 1.962 = 3.924 \text{ J}.$$

Энергия поступательного движения составляет $1/201$ от убыли гравитационной потенциальной энергии. Если под «энергией в любой другой форме» понимать сумму оставшихся энергии вращения и гравитационной потенциальной энергии, то соответствующее отношение равно

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}} + U} = \frac{1}{401}.$$

2.3

Обозначим через T силу натяжения каждой нити и будем считать ускорение a , направленное вниз, положительным. Второй закон Ньютона даёт

$$Mg - 2T = Ma.$$

Две силы натяжения создают момент сил

$$2Tr = I\alpha,$$

а условие разматывания даёт $a = r\alpha$. Поэтому

$$2T = \frac{I}{r^2}a,$$

и

$$a = \frac{Mg}{M + I/r^2} = \frac{g}{201} = 0.0488 \text{ m s}^{-2}.$$

Отсюда следует

$$T = \frac{M(g - a)}{2} = \frac{Mg}{2} \frac{200}{201} = 1.95224 \text{ N}.$$

Эта сила натяжения постоянна во время прямолинейного спуска. Значительно большую силу, возникающую при развороте, необходимо рассмотреть отдельно.

2.4

Будем трактовать криволинейную траекторию на рис. 19.6 как короткий участок разворота, на котором линия контакта, проходящая через A , неподвижна, а центр S описывает вокруг неё полуокружность радиуса r . Эта заданная геометрия представляет собой используемую здесь идеализацию разворота.

Пусть ℓ — длина прямолинейного спуска перед разворотом. В начале разворота

$$\omega_0^2 = \frac{2Mg\ell}{J}.$$

Выберем начало координат в положении S в начале разворота, направив ось x вправо, а ось y вверх. Тогда $A = (r, 0)$. Определим Φ так, чтобы этот угол возрастал от 0 до π , когда центр проходит под A . Координаты имеют вид

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi.$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0.$$

Поскольку это вращение вокруг A ,

$$\dot{\Phi} = \omega', \quad v = r\omega'.$$

Момент инерции относительно линии контакта равен $J = I + Mr^2$. Центр дополнительно опустился на расстояние $r \sin \Phi$, поэтому закон сохранения энергии даёт

$$\frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + Mgr \sin \Phi.$$

Следовательно,

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mgr}{J} \sin \Phi} = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}.$$

Дифференцируя координаты, получаем

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi.$$

Таким образом,

$$v(\Phi) = r\omega'(\Phi) = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell} \sin \Phi}, \quad v_0 = r\omega_0.$$

Угловое ускорение, которое понадобится при расчёте сил, равно

$$\ddot{\Phi} = \frac{Mgr}{J} \cos \Phi.$$

Требуемые схематические графики можно задать следующим образом:

Φ	x	y	v_x	v_y	Модуль скорости
0	0	0	0	$-v_0$	v_0
$\pi/2$	r	$-r$	$v_{\max}$	0	$v_{\max}$
π	$2r$	0	0	$+v_0$	v_0

Здесь

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}, \quad \omega'_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}.$$

Пространственная траектория состоит из вертикального спуска, нижней полуокружности радиуса $r = 3.0 \text{ mm}$ и вертикального подъёма, смещённого по горизонтали на $2r = 6.0 \text{ mm}$. Как функция Φ , координата x плавно возрастает от 0 до $2r$, а график y представляет собой отрицательную полуволну синусоиды с минимумом $-r$. Графики v и ω' имеют вид симметричных дуг с одинаковыми значениями на концах и максимумами при $\pi/2$.

В нижней точке **вертикальная составляющая скорости равна нулю**, но **модуль скорости максимален**: в этой модели движения по полуокружности центр в данный момент движется горизонтально.

2.5

В середине разворота центр находится непосредственно под A . Его тангенциальное ускорение обращается в нуль, поскольку $\cos \Phi = 0$, а ускорение направлено вертикально вверх:

$$a_{\text{bottom}} = \frac{v_{\text{max}}^2}{r} = r\omega'_{\text{max}}{}^2.$$

Поэтому уравнение сил в проекции на вертикаль имеет вид

$$2T_{\text{peak}} - Mg = Mr\omega'_{\text{max}}{}^2.$$

Используя результат пункта 2.4,

$$\omega'_{\text{max}}{}^2 = \frac{2Mg(\ell + r)}{J},$$

получаем

$$T_{\text{peak}} = \frac{Mg}{2} + \frac{M^2gr(\ell + r)}{J}.$$

В модели с неподвижной точкой A максимальная нагрузка на связь действительно достигается в нижней точке. Чтобы проверить это, положим

$$\epsilon = \frac{Mr^2}{J}, \quad b = \frac{r\omega_0^2}{g}, \quad u = \sin \Phi.$$

Разложение полной реакции контакта F на радиальную и тангенциальную составляющие даёт

$$\frac{F^2}{M^2g^2} = b^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2b(1 + 2\epsilon)u + 3\epsilon(2 + \epsilon)u^2.$$

Все коэффициенты при u и u^2 неотрицательны, поэтому максимум достигается при $u = 1$, когда реакция направлена вертикально и поровну распределяется между нитями.

Приравняв максимальную силу натяжения каждой нити к T_m , получаем

$$2T_m = Mg + \frac{2M^2gr(\ell_{\text{max}} + r)}{J}.$$

Отсюда

$$\ell_{\text{max}} = \frac{J(2T_m - Mg)}{2M^2gr} - r = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r.$$

Численно

$$\ell_{\text{max}} = \frac{0.060^2 + 2(0.0030)^2}{4(9.81)(0.0030)} \left(\frac{20}{0.40} - 9.81 \right) - 0.0030 = 1.2322 \text{ m}.$$

Таким образом, предельная длина, определяемая прочностью нити, приблизительно равна

$$\ell_{\text{max}} \simeq 1.2 \text{ m}.$$

Наличие пола также накладывает геометрическое ограничение. Во время разворота минимальная высота центра равна $h - \ell - r$. Чтобы колесо оставалось над полом, необходимо

$$h - \ell - r \geq R,$$

поэтому

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \simeq 0.94 \text{ m}.$$

Подстановка этой длины в формулу для максимальной силы натяжения даёт

$$T_{\text{peak}} = 8.08 \text{ N} < 10 \text{ N}.$$

Следовательно, пол ограничивает возможную длину разматывания раньше, чем достигается предел прочности нити.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 3: Рекомбинация положительных и отрицательных ионов в ионизованном газе

Введение

Газ состоит из положительных ионов некоторого элемента (при высокой температуре) и электронов. Положительный ион образован атомом с неизвестным массовым числом Z . Известно, что в оболочке (на орбите) этого иона находится только один электрон.

Обозначим этот ион символом $A^{(Z-1)+}$

Постоянные:

Постоянная	Значение
электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
элементарный заряд	$e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
	$q^2 = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 2,037 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$
постоянная Планка	$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
масса покоя электрона	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
боровский радиус атома	$r_B = \frac{\hbar}{m \cdot q^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
энергия Ридберга	$E_R = \frac{q^2}{2 \cdot r_B} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
масса покоя протона	$m_p \cdot c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

Вопросы:

3.1

Предположим, что ион, в оболочке которого остался только один электрон, $A^{(Z-1)+}$ находится в основном состоянии.

В состоянии с наименьшей энергией квадрат среднего расстояния электрона от ядра, или r^2 , с составляющими вдоль осей x , y и z , равными соответственно $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ и $(\Delta z)^2$, задаётся выражением

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

а квадрат среднего импульса — выражением

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2,$$

причём

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta y} \quad \text{и} \quad \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta z}.$$

Запишите в полном виде неравенство для $(p_0)^2 \cdot (r_0)^2$.

3.2

Ион, обозначенный $A^{(Z-1)+}$, может захватить дополнительный электрон, испустив при этом фотон.

Запишите уравнение, которое следует использовать для вычисления частоты испущенного фотона.

3.3

Вычислите энергию иона $A^{(Z-1)+}$, соответствующую наименьшей энергии. Приближённый расчёт следует выполнить на основе следующих положений:

3.3.A

Потенциальную энергию иона следует выразить через среднее значение $\frac{1}{r}$.

(то есть $\frac{1}{r_0}$; r_0 задано в условии).

3.3.B

При вычислении кинетической энергии иона используйте среднее значение квадрата импульса, приведённое в 3.1, с упрощением

$$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2 \approx (\hbar)^2$$

3.4

Вычислите энергию иона $A^{(Z-2)+}$, считая его находящимся в основном состоянии и используя тот же принцип, что и при вычислении энергии $A^{(Z-1)+}$. Обозначьте средние расстояния каждого из двух электронов на внешней оболочке от ядра (аналогичные r_0 в 3.3) через r_1 и r_2 ; предположите, что среднее расстояние между двумя электронами равно $r_1 + r_2$, а среднее значение квадрата импульса каждого электрона подчиняется принципу неопределённости, то есть

$$p_1^2 \cdot r_1^2 \approx \hbar^2 \quad \text{и} \quad p_2^2 \cdot r_2^2 \approx \hbar^2$$

Подсказка: Используйте тот факт, что в основном состоянии $r_1 = r_2$

3.5

Рассмотрите, в частности, случай, когда ион $A^{(Z-2)+}$ покоится в основном состоянии при захвате дополнительного электрона, причём захватываемый электрон до захвата также покоится. Определите численное значение Z , если частота фотона, испущенного при захвате электрона, равна $2,057 \cdot 10^{17} \text{ rad/s}$. Определите элемент, из которого образован ион.

Ответы

Введём энергетический масштаб

$$\mathcal{R} = \frac{m_e(q^2)^2}{2\hbar^2}.$$

При согласованных значениях постоянных он равен энергии Ридберга E_R . Приведённые в условии постоянные не согласованы между собой, поэтому ниже разграничены численные результаты их использования.

- 3.1

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

- 3.2

$$h\nu = \hbar\omega = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f,$$

где E_i, E_f — внутренние электронные энергии, а величины K — кинетические энергии поступательного движения.

- 3.3

$$E_1 = -Z^2 \mathcal{R} \quad (\text{в обычных обозначениях} \quad -Z^2 E_R).$$

- 3.3.A

$$U_1(r_0) \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

- 3.3.B

$$T_1(r_0) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}, \quad r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

- 3.4

$$E_2 = -2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{R}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

- **3.5** Для подразумеваемого захвата **второго** электрона

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}$$

при пренебрежимо малой отдаче. Приведённое значение E_R даёт $Z = 3.673$; приведённые значения $q^2, m_e, \hbar$ дают $Z = 4.088$. Для обоих результатов ближайшее целое число равно

$$Z = 4, \quad \text{бериллий (Be).}$$

Это условное, приближённое определение элемента. В исходной формулировке пункт 3.5 описывает захват третьего электрона, энергия которого не задана.

Решение

Указанные зарядовые состояния соответствуют ядру с зарядом $+Ze$. Будем считать его массу большой по сравнению с массой электрона, пренебрегать его движением при вычислении электронных энергий и использовать нерелятивистское выражение для кинетической энергии электронов. Электронные энергии связи отсчитываются от энергии ядра и удалённых друг от друга электронов.

3.1

Возводя в квадрат и складывая три неравенства неопределённостей, получаем

$$p_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right].$$

Умножение на заданное r_0^2 даёт полное выражение

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[3 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta z)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right].$$

Сумма каждой пары взаимно обратных величин не меньше 2, поскольку $u + u^{-1} \geq 2$ при $u > 0$. Следовательно,

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

Для равенства необходимы как равенство пространственных неопределённостей,

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z,$$

так и достижение равенства во всех трёх соотношениях неопределённостей для компонент. Одна лишь сферическая симметрия не обеспечивает достижения равенства.

3.2

Реакция радиационного захвата имеет вид

$$A^{(Z-1)+} + e^{-} \longrightarrow A^{(Z-2)+} + \gamma.$$

Пусть E_i, E_f обозначают начальную и конечную внутренние электронные энергии. Пусть K_i, K_e — начальные кинетические энергии иона и электрона, а K_f — конечная кинетическая энергия иона. Закон сохранения энергии даёт

$$E_i + K_i + K_e = E_f + K_f + \hbar\omega.$$

Таким образом,

$$\boxed{\hbar\omega = h\nu = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Одинаковые энергии покоя ядра и электронов сокращаются. Закон сохранения импульса определяет отдачу конечного иона. Если начальными кинетическими энергиями и отдачей можно пренебречь, это выражение сводится к

$$\boxed{\hbar\omega \approx E_i - E_f.}$$

3.3

Теперь минимизируем приближённую полную электронную энергию в соответствии с условием задачи.

3.3.A

Потенциальная энергия кулоновского притяжения равна

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Zq^2}{r}.$$

Используя предписанное приближение для её среднего значения, получаем

$$\boxed{U_1 \approx -Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

3.3.B

В стационарном основном состоянии средний импульс электрона равен нулю, поэтому средний квадрат его импульса выражается величиной p_0^2 . Таким образом, заданная оценка

$$p_0^2 r_0^2 \approx \hbar^2$$

даёт

$$\boxed{T_1 \approx \frac{p_0^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}.$$

Это намеренно грубая замена результата, полученного из соотношений неопределённостей: она отбрасывает численный коэффициент из 3.1 и не является равенством, выведенным из этой границы.

Следовательно, оценка полной энергии имеет вид

$$E_1(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} - \frac{Zq^2}{r_0}.$$

Её стационарная точка удовлетворяет условию

$$\frac{dE_1}{dr_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{Zq^2}{r_0^2} = 0,$$

откуда

$$r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

Вторая производная в этой точке равна $\hbar^2/(m_e r_0^4) > 0$, поэтому это минимум. Подстановка даёт

$$T_{1,\min} = \frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2}, \quad U_{1,\min} = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{\hbar^2},$$

и, следовательно,

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2} = -Z^2 \mathcal{R}.$$

При согласованных значениях постоянных Бора и Ридберга эти выражения принимают привычный вид

$$r_{0,\min} = \frac{r_B}{Z}, \quad E_1 = -Z^2 E_R.$$

3.4

Теперь имеются две кинетические энергии электронов, два слагаемых, описывающих притяжение электронов к ядру, и одно слагаемое, описывающее отталкивание электронов друг от друга. В заданном приближении для расстояния между электронами

$$E_2(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Zq^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{q^2}{r_1 + r_2}.$$

Используя заданное условие для основного состояния $r_1 = r_2 = r$, получаем

$$E_2(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2Zq^2}{r} + \frac{q^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r}.$$

Минимизация даёт

$$-\frac{2\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r^2} = 0,$$

так что

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

При этом радиусе

$$E_2 = -\frac{m_e (q^2)^2}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 = -2\mathcal{R} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2.$$

Таким образом, в этой модели отталкивание электронов приводит к замене Z эффективным значением $Z - \frac{1}{4}$ в энергии основного состояния каждого электрона.

3.5

Чтобы связать этот пункт с энергиями, вычисленными в 3.3 и 3.4, захват необходимо интерпретировать как



Зарядовое состояние, буквально указанное в 3.5, описывает другой процесс — захват третьего электрона, энергия которого в этой задаче не вычисляется.

Для подразумеваемого процесса высвобождаемая энергия связи равна

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_1 - E_2 \\ &= \left[2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 - Z^2 \right] \mathcal{R} \\ &= \left(Z^2 - Z + \frac{1}{8} \right) \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Хотя обе исходные частицы покоятся, конечный ион должен испытать отдачу. Если его масса равна M , закон сохранения импульса даёт

$$p_{\text{ion}} = p_{\gamma} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Следовательно,

$$\Delta E = \hbar\omega + \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}.$$

Заданная частота является **угловой частотой**, поэтому энергия фотона равна

$$E_{\gamma} = \hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34})(2.057 \times 10^{17}) = \boxed{2.168 \times 10^{-17} \text{ J}}.$$

Используя $Mc^2 \geq m_p c^2$, получаем верхнюю границу относительной поправки на отдачу:

$$\frac{K_{\text{recoil}}}{E_{\gamma}} = \frac{E_{\gamma}}{2Mc^2} \leq \frac{2.168 \times 10^{-17}}{2(1.503 \times 10^{-10})} = 7.21 \times 10^{-8}.$$

При точности приведённых данных она совершенно пренебрежима.

Поэтому

$$Z^2 - Z + \frac{1}{8} = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}},$$

и физически допустимый корень этого уравнения равен

$$\boxed{Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}}.$$

Несогласованность постоянных приводит к двум численным оценкам:

Постоянные, использованные для энергетического масштаба	$\mathcal{R}$	Оценка Z
Приведённая энергия Ридберга E_R	$2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$	3.673
Приведённые $q^2, m_e, \hbar$, по формуле $m_e(q^2)^2/(2\hbar^2)$	$1.701 \times 10^{-18} \text{ J}$	4.088

Для обеих оценок ближайшее целое число равно 4. Следовательно, при подразумеваемой интерпретации захвата и в рамках приближённой модели получаем элемент

$$Z = 4, \quad \text{бериллий,}$$

с процессом захвата



Приведённый текст не позволяет получить точное, внутренне согласованное целочисленное значение.

Решение проверено по официальному решению.