

IPhO 1988

Problemas teóricos y soluciones · Bad Ischl, Austria · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1988/

Problema 1: Espectroscopia de velocidades de partículas

Datos básicos

La absorción y la emisión de un fotón constituyen un proceso reversible. Un buen ejemplo es la excitación de un átomo desde el estado fundamental a un estado de mayor energía y su posterior retorno al estado fundamental. En tal caso, podemos detectar la absorción de un fotón a partir del fenómeno de emisión espontánea o fluorescencia. Algunos de los instrumentos más modernos utilizan este principio para identificar átomos y también para medir o calcular el valor de la velocidad en el espectro de velocidades del haz de electrones.

En un experimento idealizado (véase la fig. 19.1), un ion con una sola carga elemental se desplaza con velocidad v en sentido opuesto al de la luz procedente de una fuente láser. La longitud de onda de la luz de la fuente láser es ajustable. Un ion con velocidad nula puede excitarse a un estado de mayor energía mediante luz láser de longitud de onda $\lambda = 600 \text{ nm}$. Si excitamos un ion en movimiento, nuestros conocimientos del efecto Doppler nos indican que debemos utilizar luz láser de una longitud de onda distinta del valor anterior.

Se da un espectro de velocidades que abarca módulos de velocidad desde $v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hasta $v_2 = 6,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (Véase la fig. 19.1)

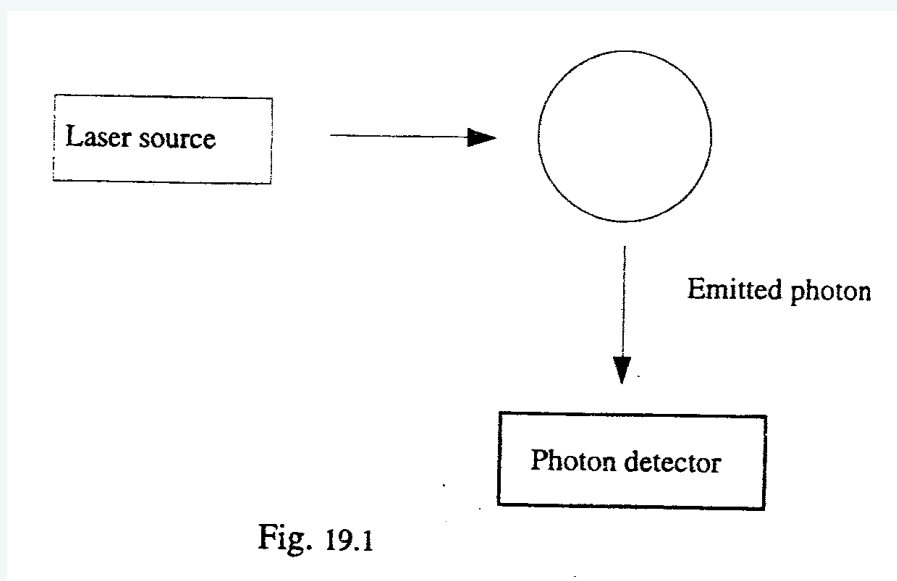


Fig. 19.1

Preguntas

1.1

1.1.1

¿Qué intervalo de longitudes de onda del haz láser debe utilizarse para excitar iones de todas las velocidades del espectro de velocidades indicado anteriormente?

1.1.2

Un análisis riguroso del problema requiere aplicar el principio de la teoría de la relatividad especial

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Determine el error que se comete al utilizar la fórmula clásica del efecto Doppler para resolver el problema.

1.2

Suponiendo que los iones se aceleran mediante una diferencia de potencial U antes de ser excitados por el haz láser, determine la relación entre la anchura del espectro de velocidades del haz de iones y el potencial acelerador. ¿Aumenta o disminuye la tensión aceleradora la anchura del espectro de velocidades?

1.3

Cada ion tiene una relación $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$ y dos niveles de energía correspondientes a la longitud de onda $\lambda^{(1)} = 600 \text{ nm}$ y a la longitud de onda $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 10^{-3} \text{ nm}$. Demuestre que los espectros de luz de las dos longitudes de onda utilizadas para excitar los iones se solapan cuando no se aplica ningún potencial acelerador. ¿Puede utilizarse una tensión aceleradora para separar los dos espectros de luz láser utilizados para excitar los iones de modo que dejen de solaparse? Si la respuesta es afirmativa, calcule el valor mínimo de la tensión necesaria.

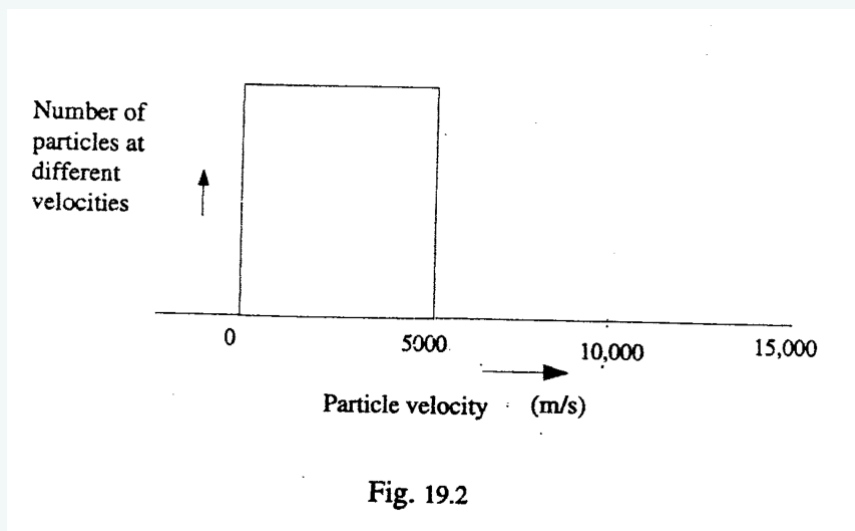


Fig. 19.2

Respuestas

- **1.1.1:** El intervalo de longitudes de onda del láser necesario es

$$600.000 \text{ nm} \leq \lambda_L \leq 600.012 \text{ nm},$$

con una anchura de 0.012 nm .

- **1.1.2:** La fórmula clásica subestima la longitud de onda del extremo superior en aproximadamente

$$1.2 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

El error relativo máximo en la longitud de onda es 2.0×10^{-10} ; el error relativo en la anchura del barrido es 1.0×10^{-5} .

- **1.2:** Tras la aceleración, la anchura del espectro de velocidades es

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Disminuye al aumentar la tensión aceleradora.

- **1.3:** Sin aceleración, los dos intervalos de longitudes de onda son aproximadamente

$$[600.000, 600.012] \text{ nm}, \quad [600.001, 600.013] \text{ nm},$$

por lo que se solapan. La aceleración puede separarlos, con un umbral de

$$U_{\min} \approx 160 \text{ V}.$$

En el umbral, las bandas se tocan justo en sus extremos; una tensión ligeramente mayor produce una separación finita.

Solución

Utilícese $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Sea λ_0 la longitud de onda de resonancia de un ion en reposo y sea λ_L la longitud de onda del láser en el laboratorio. Se supone que los espectros idealizados no tienen anchura de línea intrínseca.

1.1.1

El ion se mueve hacia la luz incidente, por lo que observa una frecuencia mayor que la frecuencia del láser en el laboratorio. En la aproximación clásica para un observador en movimiento,

$$\nu' = \nu_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

La excitación requiere que la frecuencia observada por el ion sea igual a su frecuencia de resonancia en reposo:

$$\nu' = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

Como $\nu_L = c/\lambda_L$,

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_L} \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

y, por tanto,

$$\boxed{\lambda_L(v) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}.$$

Así pues, la longitud de onda del láser en el laboratorio debe aumentar con la rapidez del ion. En los extremos,

$$\begin{aligned} \lambda_L(0) &= 600 \text{ nm}, \\ \lambda_L(6000) &= 600 \left(1 + \frac{6000}{3.00 \times 10^8}\right) \text{ nm} = 600.012 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la anchura de barrido necesaria es

$$\boxed{\Delta\lambda_L = \frac{\lambda_0(v_2 - v_1)}{c} = 0.012 \text{ nm}}.$$

1.1.2

Sea $\beta = v/c$. La fórmula relativista proporcionada da la condición de resonancia

$$\nu_0 = \nu_L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

de modo que la longitud de onda exacta necesaria es

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \lambda_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

El valor clásico es $\lambda_{\text{cl}} = \lambda_0(1 + \beta)$. Por tanto, su subestimación relativa, medida respecto a la longitud de onda exacta, es

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_{\text{rel}} - \lambda_{\text{cl}}}{\lambda_{\text{rel}}} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \simeq \frac{\beta^2}{2}.$$

Este error es máximo para $v_2 = 6000 \text{ m s}^{-1}$, para el cual

$$\beta_2 = 2.00 \times 10^{-5}, \quad \boxed{\epsilon_{\lambda, \text{max}} \simeq 2.00 \times 10^{-10}}.$$

De forma equivalente, al desarrollar la longitud de onda exacta,

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3)\right),$$

se obtiene la corrección absoluta máxima

$$\delta\lambda_{\text{max}} \simeq \frac{\lambda_0 \beta_2^2}{2} = 600 \text{ nm} \times 2.00 \times 10^{-10} = \boxed{1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}}.$$

Así, el extremo superior relativista es aproximadamente

$$600.01200012 \text{ nm}.$$

El extremo inferior no tiene corrección porque $v_1 = 0$. Por tanto, el error absoluto en la anchura del barrido también es $1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}$, lo que corresponde a

$$\frac{\delta(\Delta\lambda_L)}{\Delta\lambda_L} \simeq \frac{1.20 \times 10^{-7}}{0.012} = \boxed{1.00 \times 10^{-5}}$$

o 0.001%.

1.2

Sea u la rapidez de un ion tras la aceleración. Cada ion con una sola carga elemental adquiere la misma energía cinética eU . Utilizando la conservación de la energía no relativista,

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU,$$

de modo que

$$u(v, U) = \sqrt{v^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Esta función aumenta con la rapidez inicial v , por lo que los extremos de la distribución tras la aceleración son

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}, \quad u_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta v(U) = u_2 - u_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

La racionalización permite ver con especial claridad su dependencia de la tensión:

$$\Delta v(U) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} + \sqrt{v_1^2 + 2eU/m}}.$$

El numerador es constante y el denominador aumenta con U . Así, la aceleración desplaza toda la distribución hacia rapidezces mayores, al tiempo que **disminuye su anchura**.

Para el valor dado $v_1 = 0$,

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Cuando $2eU/m \gg v_2^2$, esta expresión se convierte en

$$\Delta v(U) \simeq \frac{v_2^2}{2\sqrt{2eU/m}} \propto U^{-1/2}.$$

1.3

Escribamos

$$\lambda_1 = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = 600.001 \text{ nm}, \quad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.001 \text{ nm}.$$

Sin aceleración, cada longitud de onda en reposo produce un intervalo de excitación láser

$$\mathcal{I}_i(0) = \left[\lambda_i, \lambda_i \left(1 + \frac{v_2}{c} \right) \right].$$

Numéricamente,

$$\mathcal{I}_1(0) = [600.000, 600.012] \text{ nm},$$

$$\mathcal{I}_2(0) \simeq [600.001, 600.013] \text{ nm}.$$

Su intervalo común es aproximadamente

$$[600.001, 600.012] \text{ nm},$$

por lo que los dos espectros se solapan claramente.

Tras la aceleración, los intervalos pasan a ser

$$\mathcal{I}_i(U) = \left[\lambda_i \left(1 + \frac{u_1}{c} \right), \lambda_i \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) \right].$$

Como $\lambda_2 > \lambda_1$, la separación se produce cuando el extremo superior del primer intervalo queda por debajo del extremo inferior del segundo. La condición límite es

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

De forma equivalente,

$$u_2 - u_1 = \frac{c \delta \lambda}{\lambda_1} \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

Al orden dominante del efecto Doppler, $u_1/c \ll 1$, por lo que la anchura límite necesaria del espectro de velocidades es

$$d \equiv \frac{c \delta \lambda}{\lambda_1} = \frac{(3.00 \times 10^8)(0.001)}{600} \text{ m s}^{-1} = \boxed{500 \text{ m s}^{-1}}.$$

La aceleración puede lograrlo porque estrecha continuamente la distribución de velocidades.

Con $v_1 = 0$, la conservación de la energía también da

$$u_2^2 - u_1^2 = v_2^2.$$

En el umbral de separación, $u_2 - u_1 \simeq d$, y, por tanto,

$$u_2 + u_1 \simeq \frac{v_2^2}{d} = \frac{6000^2}{500} = 72,000 \text{ m s}^{-1}.$$

Despejando las dos rapidezces,

$$u_1 \simeq \frac{72,000 - 500}{2} = 35,750 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_2 \simeq 36,250 \text{ m s}^{-1}.$$

Finalmente, utilizando $e/m = 4 \times 10^6 \text{ C kg}^{-1}$,

$$U_{\min} \simeq \frac{u_1^2}{2(e/m)} = \frac{(35,750)^2}{8 \times 10^6} \text{ V} \approx \boxed{160 \text{ V}}.$$

Las rapidezces resultantes satisfacen $u/c \approx 1.2 \times 10^{-4}$, en consonancia con las aproximaciones utilizadas. Conservar el pequeño factor $1 + u_1/c$ en la condición clásica para los extremos no cambia la tensión indicada.

Con la tensión límite, los dos bordes espectrales coinciden. Una separación estricta requiere una tensión ligeramente superior a este umbral.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Rueda de Maxwell

Introducción

Una rueda cilíndrica de densidad uniforme, de masa $M = 0,40 \text{ kg}$, radio $R = 0,060 \text{ m}$ y espesor $d = 0,010 \text{ m}$, está suspendida del techo mediante dos cuerdas ligeras de la misma longitud. Cada cuerda está enrollada alrededor del eje de la rueda. Al igual que la masa de las cuerdas, la masa del eje es despreciable. Al girar la rueda manualmente, las cuerdas se enrollan hasta que el centro de masas se eleva a $1,0 \text{ m}$ sobre el suelo. Si se deja que la rueda descienda verticalmente bajo la acción de la gravedad, las cuerdas se desenrollan en toda su longitud y la rueda alcanza el punto más bajo. A continuación, las cuerdas comienzan a enrollarse en sentido contrario, lo que hace que la rueda ascienda.

Analice y responda a las siguientes preguntas, suponiendo que las cuerdas se mantienen verticales y que los puntos donde las cuerdas tocan el eje están directamente debajo de sus respectivos puntos de suspensión (véase la fig. 19.5).

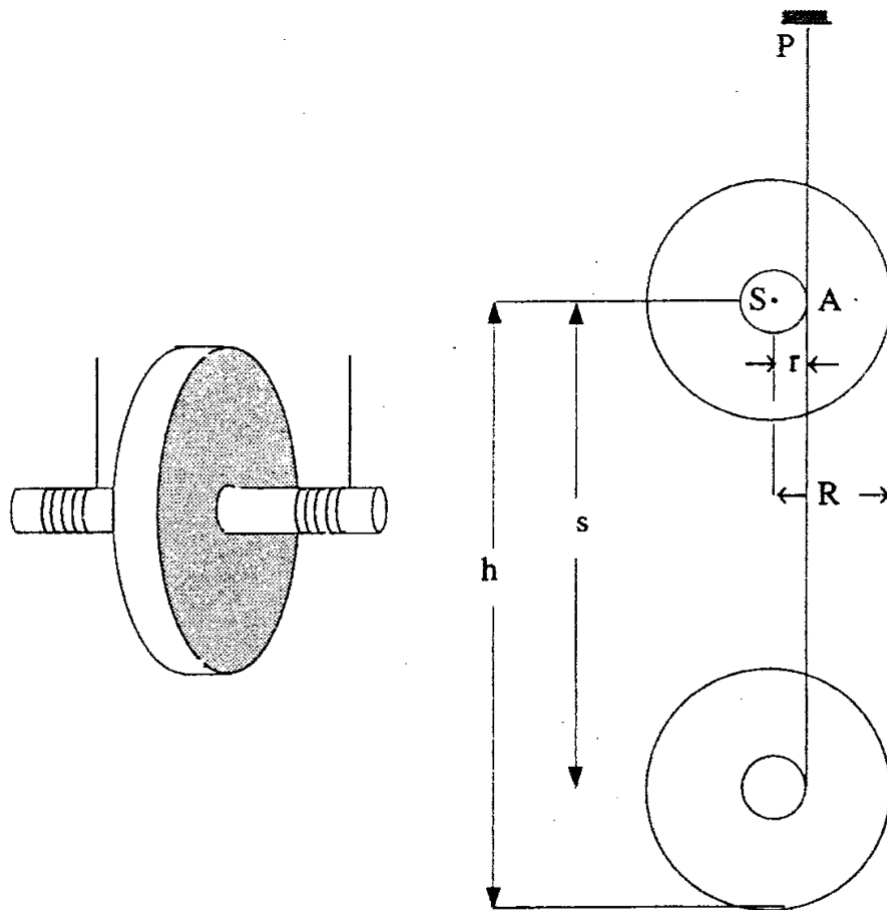


Fig. 19.5

Fig. 19.5

Preguntas

2.1

Determine la velocidad angular de la rueda cuando su centro de masas recorre la distancia vertical s .

2.2

Determine la energía cinética del movimiento de traslación del centro de masas E_r después de que la rueda recorra una distancia $s = 0,50$ m, y calcule la razón entre E_r y la energía en cualquier otra forma presente en este problema hasta ese instante.

Radio del eje = 0,0030 m

2.3

Determine la tensión de la cuerda mientras la rueda desciende.

2.4

Calcule la velocidad angular ω' en función del ángulo Φ cuando las cuerdas comienzan a desenrollarse en sentido contrario, tal como se muestra en la fig. 19.6.

Esboce una gráfica de las variables que describen el movimiento (en un sistema cartesiano adecuado para el problema), así como de la rapidez del centro de masas en función de Φ .

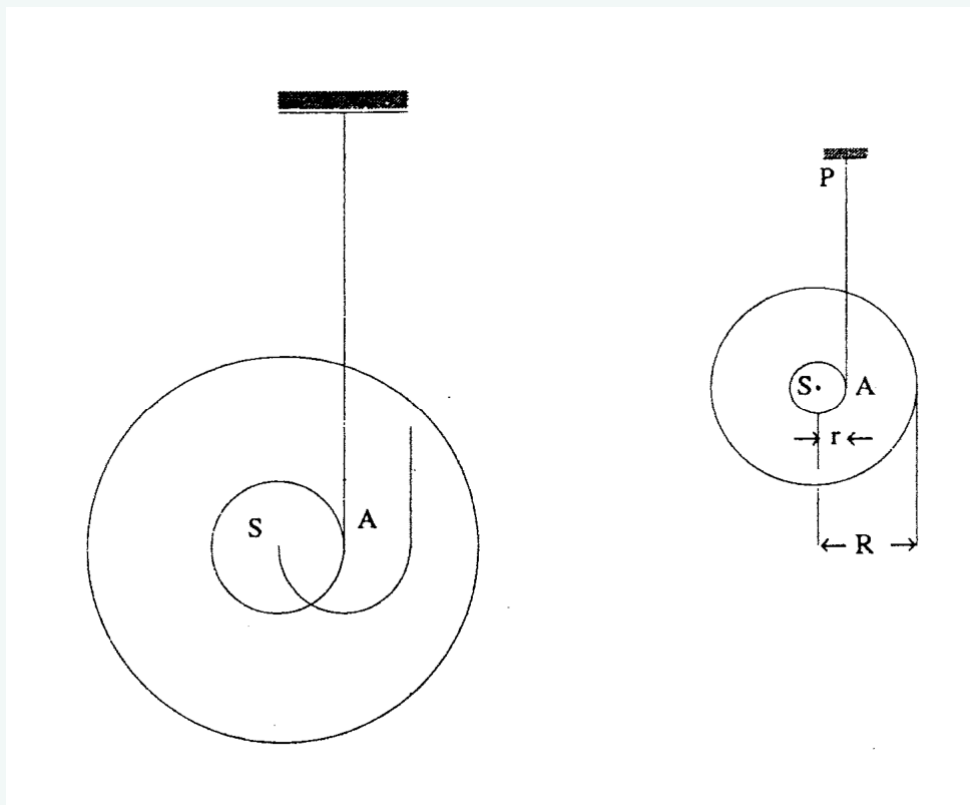


Fig. 19.6

2.5

Si la cuerda puede soportar una tensión máxima $T_m = 10$ N, halle la longitud máxima de cuerda que la rueda puede desenrollar sin romperla.

Respuestas

Aquí $r = 0.0030 \text{ m}$, y en los cálculos numéricos se utiliza $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Para la inversión del movimiento, sea ℓ el descenso rectilíneo precedente y definamos $\Phi = 0$ a la entrada, $\Phi = \pi/2$ en el punto más bajo y $\Phi = \pi$ a la salida. Los apartados 2.4–2.5 utilizan la inversión semicircular con contacto fijo representada en la Fig. 19.6; se trata de una idealización: salvo en $\Phi = \pi/2$, la reacción de contacto necesaria tiene una componente horizontal, que las cuerdas verticales no pueden proporcionar.

- 2.1

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

Para $s = 0.50 \text{ m}$, $\omega = 73.6 \text{ rad s}^{-1}$.

- 2.2

$$E_r = \frac{Mgs}{201} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

Midiendo la energía potencial gravitatoria desde el suelo,

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Por tanto, $E_r/E_{\text{rot}} = 1/200$, y $E_r/(Mgs) = 1/201$.

- 2.3 La tensión en **cada** cuerda durante el desenrollado descendente ordinario es

$$T = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)} = 1.95 \text{ N} \simeq 2.0 \text{ N}.$$

- 2.4

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

Tomando como origen la posición del centro a la entrada, con x hacia la derecha e y hacia arriba,

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi,$$

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi, \quad v = r\omega'.$$

La trayectoria es una semicircunferencia inferior. La rapidez es simétrica respecto a $\pi/2$ y alcanza allí su máximo.

- **2.5** La longitud desenrollada de **cada** cuerda limitada por su resistencia es

$$\ell_{\max} = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r = 1.23 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m}.$$

El suelo impone un límite menor en la configuración indicada:

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \approx 0.94 \text{ m}.$$

En ese límite de separación respecto al suelo, la tensión máxima es de solo 8.1 N por cuerda.

Solución

Suponemos que la rueda se suelta desde el reposo, que las cuerdas son inextensibles, que no hay deslizamiento durante el enrollado o el desenrollado y que las pérdidas por disipación son despreciables.

El momento de inercia de la rueda respecto a su eje es

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

El espesor d no interviene en este momento de inercia. Conviene definir

$$J = I + Mr^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right).$$

Para las dimensiones dadas,

$$\frac{I}{Mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} = 200, \quad \frac{J}{Mr^2} = 201.$$

2.1

Cuando se desenrolla un ángulo $d\theta$, el centro desciende una distancia $ds = r d\theta$. Por tanto,

$$v = r\omega.$$

La conservación de la energía mecánica tras un descenso s da

$$Mgs = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2.$$

En consecuencia,

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{2Mgs}{I + Mr^2}} = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

Numéricamente,

$$\omega(s) = (104.1 \text{ rad s}^{-1}) \sqrt{\frac{s}{1 \text{ m}}}.$$

2.2

La energía cinética de traslación es

$$E_r = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{Mr^2}{J}Mgs = \frac{Mgs}{201}.$$

Para $s = 0.50$ m,

$$Mgs = 0.40(9.81)(0.50) = 1.962 \text{ J},$$

de modo que

$$E_r = 0.009761 \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

La energía de rotación es

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

y, por tanto,

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}}} = \frac{Mr^2}{I} = \frac{1}{200}.$$

Su valor numérico es

$$E_{\text{rot}} = 1.95224 \text{ J}.$$

El centro se encuentra ahora a $h - s = 0.50$ m sobre el suelo. Tomando el suelo como nivel cero de la energía potencial gravitatoria,

$$U = Mg(h - s) = 1.962 \text{ J}.$$

Así, las tres energías presentes están en la proporción

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

La energía inicial era $Mgh = 3.924$ J, y la comprobación del balance energético es

$$0.009761 + 1.952239 + 1.962 = 3.924 \text{ J}.$$

La energía de traslación es $1/201$ de la energía gravitatoria liberada. Si «energía en cualquier otra forma» se refiere a la suma de las energías de rotación y gravitatoria restantes, la razón correspondiente es

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}} + U} = \frac{1}{401}.$$

2.3

Sea T la tensión en cada cuerda y tomemos como positiva la aceleración a hacia abajo. La segunda ley de Newton da

$$Mg - 2T = Ma.$$

Las dos tensiones producen el momento de fuerza

$$2Tr = I\alpha,$$

mientras que la condición de desenrollado da $a = r\alpha$. Por tanto,

$$2T = \frac{I}{r^2}a,$$

y

$$a = \frac{Mg}{M + I/r^2} = \frac{g}{201} = 0.0488 \text{ m s}^{-2}.$$

Se deduce que

$$T = \frac{M(g - a)}{2} = \frac{Mg}{2} \frac{200}{201} = 1.95224 \text{ N.}$$

Esta tensión es constante durante el descenso rectilíneo. La fuerza, mucho mayor, que actúa durante la inversión del movimiento debe considerarse por separado.

2.4

Interpretamos la trayectoria curva de la Fig. 19.6 como una breve inversión del movimiento durante la cual la línea de contacto que pasa por A permanece fija y el centro S describe una semicircunferencia de radio r alrededor de ella. Esta geometría impuesta es la idealización de la inversión del movimiento utilizada aquí.

Sea ℓ el descenso rectilíneo anterior a la inversión. A la entrada,

$$\omega_0^2 = \frac{2Mg\ell}{J}.$$

Elijamos como origen la posición de S a la entrada, con x hacia la derecha e y hacia arriba. Entonces $A = (r, 0)$. Definamos Φ de modo que aumente de 0 a π mientras el centro pasa por debajo de A . Las coordenadas son

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi.$$

Estas satisfacen

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0.$$

Como se trata de una rotación alrededor de A ,

$$\dot{\Phi} = \omega', \quad v = r\omega'.$$

El momento de inercia respecto a la línea de contacto es $J = I + Mr^2$. El centro ha descendido una distancia adicional $r \sin \Phi$, por lo que la conservación de la energía da

$$\frac{1}{2} J \omega'^2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2 + Mgr \sin \Phi.$$

Por tanto,

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mgr}{J} \sin \Phi} = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}.$$

Derivando las coordenadas,

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi.$$

Así,

$$v(\Phi) = r\omega'(\Phi) = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell} \sin \Phi}, \quad v_0 = r\omega_0.$$

La aceleración angular, útil para el cálculo de la fuerza, es

$$\ddot{\Phi} = \frac{Mgr}{J} \cos \Phi.$$

Los esbozos solicitados pueden especificarse del siguiente modo:

Φ	x	y	v_x	v_y	Rapidez
0	0	0	0	$-v_0$	v_0
$\pi/2$	r	$-r$	$v_{\max}$	0	$v_{\max}$
π	$2r$	0	0	$+v_0$	v_0

Aquí

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}, \quad \omega'_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}.$$

La trayectoria espacial consta de un descenso vertical, una semicircunferencia inferior de radio $r = 3.0 \text{ mm}$ y un ascenso vertical desplazado horizontalmente en $2r = 6.0 \text{ mm}$. Como funciones de Φ , x aumenta suavemente de 0 a $2r$, mientras que y describe una semionda sinusoidal negativa con mínimo $-r$. Tanto v como ω' forman arcos simétricos, con valores iguales en los extremos y sus máximos en $\pi/2$.

En el punto más bajo, la **velocidad vertical es cero**, pero la **rapidez es máxima**: en este modelo semicircular, el centro se mueve entonces horizontalmente.

2.5

En el punto medio de la inversión del movimiento, el centro se encuentra directamente debajo de A . Su aceleración tangencial se anula porque $\cos \Phi = 0$, y su aceleración es vertical hacia arriba:

$$a_{\text{bottom}} = \frac{v_{\max}^2}{r} = r\omega_{\max}'^2.$$

Por tanto, la ecuación de fuerzas verticales es

$$2T_{\text{peak}} - Mg = Mr\omega_{\max}'^2.$$

Utilizando el resultado de 2.4,

$$\omega_{\max}'^2 = \frac{2Mg(\ell + r)}{J},$$

obtenemos

$$T_{\text{peak}} = \frac{Mg}{2} + \frac{M^2gr(\ell + r)}{J}.$$

El punto más bajo es, efectivamente, el punto de máxima fuerza de ligadura en el modelo con A fijo. Para comprobarlo, hagamos

$$\epsilon = \frac{Mr^2}{J}, \quad b = \frac{r\omega_0^2}{g}, \quad u = \sin \Phi.$$

Descomponiendo la reacción total de contacto F en sus componentes radial y tangencial, se obtiene

$$\frac{F^2}{M^2g^2} = b^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2b(1 + 2\epsilon)u + 3\epsilon(2 + \epsilon)u^2.$$

Todos los coeficientes de u y u^2 son no negativos, por lo que el máximo se produce en $u = 1$, donde la reacción es vertical y se reparte por igual entre las cuerdas.

Igualando la tensión máxima en cada cuerda a T_m ,

$$2T_m = Mg + \frac{2M^2gr(\ell_{\max} + r)}{J}.$$

Por consiguiente,

$$\ell_{\max} = \frac{J(2T_m - Mg)}{2M^2gr} - r = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r.$$

Numéricamente,

$$\ell_{\max} = \frac{0.060^2 + 2(0.0030)^2}{4(9.81)(0.0030)} \left(\frac{20}{0.40} - 9.81 \right) - 0.0030 = 1.2322 \text{ m.}$$

Así, el límite impuesto por la resistencia de la cuerda es aproximadamente

$$\ell_{\max} \simeq 1.2 \text{ m.}$$

También existe una restricción geométrica debida al suelo. Durante la inversión del movimiento, la altura mínima del centro es $h - \ell - r$. Para mantener la rueda por encima del suelo,

$$h - \ell - r \geq R,$$

de modo que

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \simeq 0.94 \text{ m.}$$

Sustituyendo esta longitud en la fórmula de la tensión máxima, se obtiene

$$T_{\text{peak}} = 8.08 \text{ N} < 10 \text{ N.}$$

En consecuencia, el suelo limita el desenrollado disponible antes de que se alcance el límite impuesto por la resistencia de la cuerda.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: Recombinación de iones positivos y negativos en un gas ionizado

Introducción

Un gas está formado por iones positivos de un elemento (a alta temperatura) y electrones. El ion positivo pertenece a un átomo de número másico desconocido Z . Se sabe que este ion tiene un solo electrón en la capa (órbita).

Representemos este ion mediante el símbolo $A^{(Z-1)+}$

Constantes:

Constante	Valor
permitividad eléctrica del vacío	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
carga elemental	$e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
	$q^2 = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 2,037 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$

Constante	Valor
constante de Planck	$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
masa (en reposo) de un electrón	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
radio atómico de Bohr	$r_B = \frac{\hbar}{m \cdot q^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
energía de Rydberg	$E_R = \frac{q^2}{2 \cdot r_B} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
masa (en reposo) de un protón	$m_p \cdot c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

Preguntas:

3.1

Suponga que el ion al que solo le queda un electrón en la capa, $A^{(Z-1)+}$, se encuentra en el estado fundamental.

En el estado de menor energía, el cuadrado de la distancia media del electrón al núcleo, o r^2 , cuyas componentes a lo largo de los ejes x, y y z son $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ y $(\Delta z)^2$, respectivamente, viene dado por

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

y el cuadrado del momento lineal medio, por

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2,$$

mientras que

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta y} \quad \text{y} \quad \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta z}.$$

Escriba en su forma completa una desigualdad que contenga $(p_0)^2 \cdot (r_0)^2$.

3.2

El ion representado por $A^{(Z-1)+}$ puede capturar un electrón adicional y, como consecuencia, emitir un fotón.

Escriba una ecuación que permita calcular la frecuencia del fotón emitido.

3.3

Calcule la energía del ion $A^{(Z-1)+}$ utilizando el valor de la energía mínima. El cálculo debe realizarse de forma aproximada basándose en los siguientes principios:

3.3.A

La energía potencial del ion debe expresarse en función del valor medio de $\frac{1}{r}$.

(Es decir, $\frac{1}{r_0}$; r_0 se da en el problema).

3.3.B

Para calcular la energía cinética del ion, utilice el valor medio del cuadrado del momento lineal dado en 3.1, tras simplificarlo mediante

$$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2 \approx (\hbar)^2$$

3.4

Calcule la energía del ion $A^{(Z-2)+}$, que se supone en el estado fundamental, utilizando el mismo principio que para calcular la energía de $A^{(Z-1)+}$. Denotando por r_1 y r_2 las distancias medias de cada uno de los dos electrones de la capa más externa (análogas a r_0 dado en 3.3), suponga que la distancia media entre los dos electrones viene dada por $r_1 + r_2$ y que el valor medio del cuadrado del momento lineal de cada electrón satisface el principio de incertidumbre, es decir,

$$p_1^2 \cdot r_1^2 \approx \hbar^2 \quad \text{y} \quad p_2^2 \cdot r_2^2 \approx \hbar^2$$

Indicación: Utilice el dato de que en el estado fundamental $r_1 = r_2$

3.5

Considere, en particular, que el ion $A^{(Z-2)+}$ está en reposo en el estado fundamental cuando captura un electrón adicional y que el electrón capturado también está en reposo antes de la captura. Determine el valor numérico de Z si la frecuencia del fotón emitido que acompaña a la captura del electrón es $2,057 \cdot 10^{17}$ rad/s. Identifique el elemento que da lugar al ion.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Definamos la escala de energía

$$\mathcal{R} = \frac{m_e(q^2)^2}{2\hbar^2}.$$

Con constantes coherentes, esta es la energía de Rydberg E_R . Las constantes impresas son incoherentes entre sí, por lo que a continuación se distinguen sus consecuencias numéricas.

• 3.1

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

• 3.2

$$h\nu = \hbar\omega = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f,$$

donde E_i, E_f son las energías electrónicas internas y las K son las energías cinéticas de traslación.

• 3.3

$$E_1 = -Z^2 \mathcal{R} \quad (\text{convencionalmente, } -Z^2 E_R).$$

• 3.3.A

$$U_1(r_0) \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

• 3.3.B

$$T_1(r_0) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}, \quad r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

• 3.4

$$E_2 = -2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{R}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

- 3.5 Para la captura de un **segundo** electrón que se pretende considerar,

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}$$

con un retroceso despreciable. El valor citado de E_R da $Z = 3.673$; los valores impresos de $q^2, m_e, \hbar$ dan $Z = 4.088$. En ambos casos, el entero más próximo es

$$Z = 4, \quad \text{berilio (Be).}$$

Esta identificación es condicional y aproximada. Tal como está impreso, el apartado 3.5 describe la captura de un tercer electrón, cuya energía no se ha especificado.

Solución

Los estados de carga implican un núcleo de carga $+Ze$. Consideramos que su masa es grande en comparación con la masa del electrón, despreciamos su movimiento al calcular las energías electrónicas y utilizamos energías cinéticas no relativistas para los electrones. Las energías de enlace electrónicas se miden con respecto al núcleo y los electrones separados.

3.1

Al elevar al cuadrado y sumar las tres desigualdades de incertidumbre, se obtiene

$$p_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right].$$

La multiplicación por el r_0^2 especificado da la expresión completa

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[3 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta z)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right].$$

La suma de cada par de términos recíprocos es al menos 2, puesto que $u + u^{-1} \geq 2$ para $u > 0$. Por tanto,

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

La igualdad exige tanto que las incertidumbres espaciales sean iguales,

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z,$$

como que se alcance la igualdad en las tres relaciones de incertidumbre para las componentes. La simetría esférica por sí sola no garantiza que se alcance dicha igualdad.

3.2

La reacción de captura radiativa es



Sean E_i, E_f las energías electrónicas internas inicial y final. Sean K_i, K_e las energías cinéticas iniciales del ion y del electrón, y K_f la energía cinética final del ion. La conservación de la energía da

$$E_i + K_i + K_e = E_f + K_f + \hbar\omega.$$

Así,

$$\boxed{\hbar\omega = h\nu = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Las energías en reposo del núcleo y de los electrones, comunes a ambos miembros, se cancelan. La conservación del momento lineal determina el retroceso del ion final. Si las energías cinéticas iniciales y el retroceso son despreciables, la expresión se reduce a

$$\boxed{\hbar\omega \approx E_i - E_f.}$$

3.3

Minimizamos ahora la energía electrónica total aproximada requerida por el problema.

3.3.A

El potencial atractivo de Coulomb es

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Zq^2}{r}.$$

Utilizando la aproximación prescrita para su valor esperado,

$$\boxed{U_1 \approx -Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

3.3.B

El electrón tiene un momento lineal medio nulo en el estado fundamental estacionario, por lo que el valor medio del cuadrado de su momento lineal está representado por p_0^2 . Por tanto, la estimación estipulada

$$p_0^2 r_0^2 \approx \hbar^2$$

da

$$\boxed{T_1 \approx \frac{p_0^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}.$$

Esta es una sustitución deliberadamente burda del resultado de incertidumbre: descarta el coeficiente numérico de 3.1 y no es una igualdad deducida de esa cota.

En consecuencia, la energía total estimada es

$$E_1(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} - \frac{Zq^2}{r_0}.$$

Su punto estacionario satisface

$$\frac{dE_1}{dr_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{Zq^2}{r_0^2} = 0,$$

lo que da

$$r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

La segunda derivada en ese punto es $\hbar^2/(m_e r_0^4) > 0$, por lo que se trata de un mínimo. Al sustituir, se obtiene

$$T_{1,\min} = \frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2}, \quad U_{1,\min} = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{\hbar^2},$$

y, por tanto,

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2} = -Z^2 \mathcal{R}.$$

Con constantes de Bohr y de Rydberg coherentes, estas son las formas conocidas

$$r_{0,\min} = \frac{r_B}{Z}, \quad E_1 = -Z^2 E_R.$$

3.4

Ahora hay dos energías cinéticas electrónicas, dos términos atractivos electrón-núcleo y un término repulsivo electrón-electrón. Con la aproximación prescrita para la separación,

$$E_2(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Zq^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{q^2}{r_1 + r_2}.$$

Utilizando la condición dada para el estado fundamental, $r_1 = r_2 = r$,

$$E_2(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2Zq^2}{r} + \frac{q^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r}.$$

La minimización da

$$-\frac{2\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r^2} = 0,$$

de modo que

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

Para este radio,

$$E_2 = -\frac{m_e (q^2)^2}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 = -2\mathcal{R} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2.$$

Así, en este modelo, la repulsión entre electrones sustituye Z por el valor efectivo $Z - \frac{1}{4}$ en la energía del estado fundamental de cada electrón.

3.5

Para relacionar este apartado con las energías calculadas en 3.3 y 3.4, la captura debe interpretarse como



En cambio, el estado de carga impreso literalmente en 3.5 describe un proceso diferente: la captura de un tercer electrón, cuya energía no se calcula en este problema.

Para el proceso que se pretende considerar, la energía de enlace liberada es

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 \\ &= \left[2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 - Z^2 \right] \mathcal{R} \\ &= \boxed{\left(Z^2 - Z + \frac{1}{8} \right) \mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Aunque ambas partículas incidentes están en reposo, el ion final debe retroceder. Si su masa es M , la conservación del momento lineal da

$$p_{\text{ion}} = p_{\gamma} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

En consecuencia,

$$\Delta E = \hbar\omega + \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}.$$

La frecuencia proporcionada es una **frecuencia angular**, por lo que la energía del fotón es

$$E_{\gamma} = \hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34})(2.057 \times 10^{17}) = \boxed{2.168 \times 10^{-17} \text{ J}}.$$

Utilizando $Mc^2 \geq m_p c^2$, la corrección relativa debida al retroceso queda acotada por

$$\frac{K_{\text{recoil}}}{E_{\gamma}} = \frac{E_{\gamma}}{2Mc^2} \leq \frac{2.168 \times 10^{-17}}{2(1.503 \times 10^{-10})} = 7.21 \times 10^{-8}.$$

Es completamente despreciable con la precisión de los datos.

Por tanto,

$$Z^2 - Z + \frac{1}{8} = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}},$$

cuya raíz física es

$$\boxed{Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}}.$$

Las constantes incoherentes entre sí conducen a dos estimaciones numéricas:

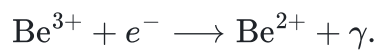
Constantes utilizadas para la escala de energía	$\mathcal{R}$	Z estimado
Energía de Rydberg citada E_R	$2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$	3.673

Constantes utilizadas para la escala de energía	$\mathcal{R}$	Z estimado
Valores impresos de $q^2, m_e, \hbar$, mediante $m_e(q^2)^2/(2\hbar^2)$	$1.701 \times 10^{-18} \text{ J}$	4.088

En ambas estimaciones, el entero más próximo es 4. Por consiguiente, bajo la interpretación de la captura que se pretende considerar y el modelo aproximado, el elemento inferido es

$$Z = 4, \quad \text{berilio,}$$

con la captura



El texto proporcionado no permite una determinación entera exacta e internamente coherente.

La solución se comprobó con la solución oficial.