

IPhO 1988

Theorieaufgaben und Lösungen · Bad Ischl, Österreich · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1988/

Aufgabe 1: Spektroskopie von Teilchengeschwindigkeiten

Grundlagen

Die Absorption und Emission eines Photons ist ein reversibler Prozess. Ein gutes Beispiel dafür ist die Anregung eines Atoms aus dem Grundzustand in einen Zustand höherer Energie und die anschließende Rückkehr des Atoms in den Grundzustand. In einem solchen Fall lässt sich die Absorption eines Photons anhand der spontanen Emission oder Fluoreszenz nachweisen. Einige modernere Messgeräte nutzen dieses Prinzip zur Identifizierung von Atomen sowie zur Messung oder Berechnung des Geschwindigkeitswertes im Geschwindigkeitsspektrum des Elektronenstrahls.

In einem idealisierten Experiment (siehe Abb. 19.1) bewegt sich ein einfach geladenes Ion mit der Geschwindigkeit v entgegen der Ausbreitungsrichtung des Lichts einer Laserquelle. Die Wellenlänge des Lichts der Laserquelle ist einstellbar. Ein Ion mit der Geschwindigkeit null kann durch Einstrahlung von Laserlicht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 600 \text{ nm}$ in einen Zustand höherer Energie angeregt werden. Soll ein bewegtes Ion angeregt werden, so wissen wir aufgrund des Dopplereffekts, dass dazu Laserlicht mit einer anderen als der oben angegebenen Wellenlänge verwendet werden muss.

Gegeben ist ein Geschwindigkeitsspektrum, das Geschwindigkeitsbeträge von $v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bis $v_2 = 6,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ umfasst. (siehe Abb. 19.1)

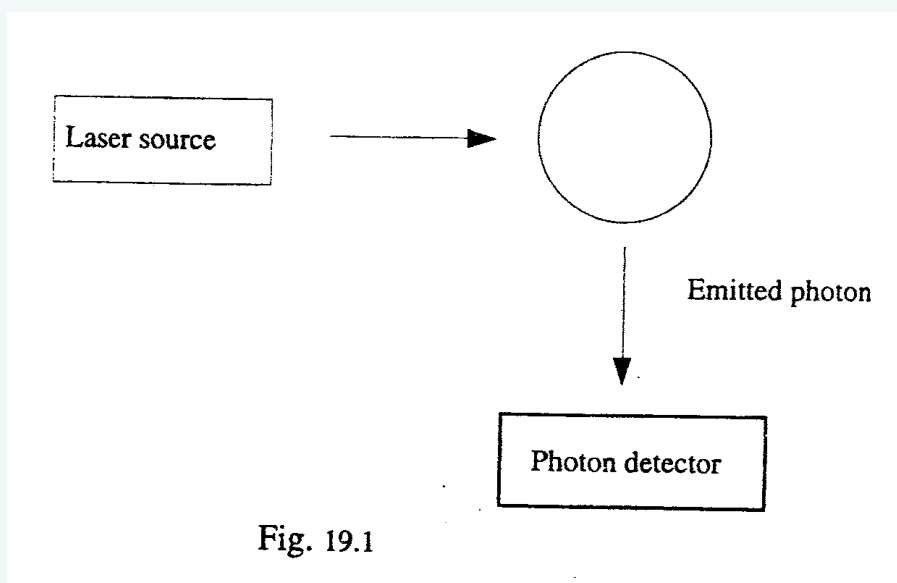


Abb. 19.1

Fragen

1.1

1.1.1

Welcher Wellenlängenbereich des Laserstrahls muss verwendet werden, um Ionen mit allen Geschwindigkeiten des oben angegebenen Geschwindigkeitsspektrums anzuregen?

1.1.2

Eine exakte Analyse des Problems erfordert die Anwendung der Beziehung aus der speziellen Relativitätstheorie

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

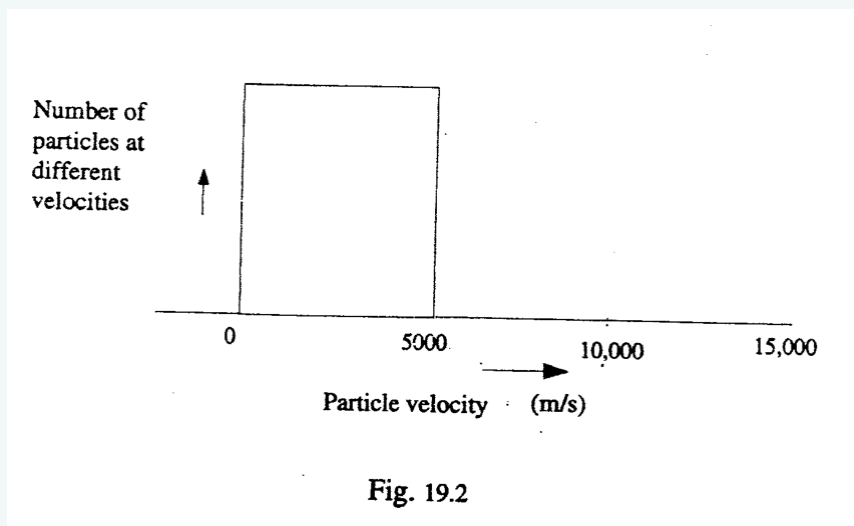
Bestimmen Sie den Fehler, der entsteht, wenn zur Lösung des Problems die klassische Formel für den Dopplereffekt verwendet wird.

1.2

Nehmen Sie an, dass die Ionen durch eine Spannung U beschleunigt werden, bevor sie durch den Laserstrahl angeregt werden. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen der Breite des Geschwindigkeitsspektrums des Ionenstrahls und der Beschleunigungsspannung. Vergrößert oder verkleinert die Beschleunigungsspannung die Breite des Geschwindigkeitsspektrums?

1.3

Für jedes Ion gilt $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$; es besitzt zwei Energieniveaus, die der Wellenlänge $\lambda^{(1)} = 600 \text{ nm}$ beziehungsweise der Wellenlänge $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 10^{-3} \text{ nm}$ entsprechen. Zeigen Sie, dass sich die zur Anregung der Ionen verwendeten Lichtwellenlängenbereiche der beiden Übergänge überlappen, wenn keine Beschleunigungsspannung angelegt wird. Kann durch eine Beschleunigungsspannung erreicht werden, dass die beiden zur Anregung der Ionen verwendeten Laserlichtspektren getrennt werden und sich nicht mehr überlappen? Falls ja, berechnen Sie den erforderlichen Mindestwert der Spannung.



Antworten

- **1.1.1:** Der erforderliche Wellenlängenbereich des Lasers ist

$$600.000 \text{ nm} \leq \lambda_L \leq 600.012 \text{ nm},$$

mit einer Breite von 0.012 nm .

- **1.1.2:** Die klassische Formel unterschätzt die obere Wellenlängengrenze um ungefähr

$$1.2 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

Der maximale relative Fehler der Wellenlänge beträgt 2.0×10^{-10} ; der relative Fehler der Breite des durchzustimmenden Wellenlängenbereichs beträgt 1.0×10^{-5} .

- **1.2:** Nach der Beschleunigung beträgt die Breite des Geschwindigkeitsspektrums

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Sie nimmt mit steigender Beschleunigungsspannung ab.

- **1.3:** Ohne Beschleunigung lauten die beiden Wellenlängenintervalle näherungsweise

$$[600.000, 600.012] \text{ nm}, \quad [600.001, 600.013] \text{ nm},$$

sodass sie sich überlappen. Durch Beschleunigung lassen sie sich trennen; der Schwellenwert beträgt

$$U_{\min} \approx 160 \text{ V}.$$

Am Schwellenwert berühren sich die Bänder gerade; eine geringfügig höhere Spannung erzeugt einen endlichen Abstand.

Lösung

Wir verwenden $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Mit λ_0 bezeichnen wir die Resonanzwellenlänge eines ruhenden Ions und mit λ_L die Laserwellenlänge im Labor. Für die idealisierten Spektren wird angenommen, dass sie keine intrinsische Linienbreite besitzen.

1.1.1

Das Ion bewegt sich dem einfallenden Licht entgegen und nimmt daher eine höhere Frequenz als die Laserfrequenz im Labor wahr. In der klassischen Näherung für einen bewegten Beobachter gilt

$$\nu' = \nu_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Für die Anregung muss die vom Ion wahrgenommene Frequenz gleich seiner Resonanzfrequenz im Ruhezustand sein:

$$\nu' = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

Wegen $\nu_L = c/\lambda_L$ gilt

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_L} \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

und somit

$$\boxed{\lambda_L(v) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}.$$

Die Laserwellenlänge im Labor muss also mit der Ionengeschwindigkeit zunehmen. An den Grenzen des Intervalls gilt

$$\begin{aligned} \lambda_L(0) &= 600 \text{ nm}, \\ \lambda_L(6000) &= 600 \left(1 + \frac{6000}{3.00 \times 10^8}\right) \text{ nm} = 600.012 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Die erforderliche Breite des durchzustimmenden Wellenlängenbereichs beträgt folglich

$$\boxed{\Delta\lambda_L = \frac{\lambda_0(v_2 - v_1)}{c} = 0.012 \text{ nm}}.$$

1.1.2

Wir setzen $\beta = v/c$. Aus der angegebenen relativistischen Formel folgt die Resonanzbedingung

$$\nu_0 = \nu_L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

sodass für die exakt erforderliche Wellenlänge gilt

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \lambda_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Der klassische Wert ist $\lambda_{\text{cl}} = \lambda_0(1 + \beta)$. Die relative Unterschätzung, bezogen auf die exakte Wellenlänge, beträgt daher

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_{\text{rel}} - \lambda_{\text{cl}}}{\lambda_{\text{rel}}} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \simeq \frac{\beta^2}{2}.$$

Dieser Fehler ist bei $v_2 = 6000 \text{ m s}^{-1}$ am größten; hierfür gilt

$$\beta_2 = 2.00 \times 10^{-5}, \quad \boxed{\epsilon_{\lambda, \text{max}} \simeq 2.00 \times 10^{-10}}.$$

Gleichwertig ergibt die Entwicklung der exakten Wellenlänge,

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3)\right),$$

die maximale absolute Korrektur

$$\delta\lambda_{\text{max}} \simeq \frac{\lambda_0 \beta_2^2}{2} = 600 \text{ nm} \times 2.00 \times 10^{-10} = \boxed{1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}}.$$

Die relativistische obere Intervallgrenze beträgt somit ungefähr

$$600.01200012 \text{ nm}.$$

An der unteren Intervallgrenze gibt es keine Korrektur, da $v_1 = 0$. Daher beträgt auch der absolute Fehler der Breite des durchzustimmenden Wellenlängenbereichs $1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}$; dies entspricht

$$\frac{\delta(\Delta\lambda_L)}{\Delta\lambda_L} \simeq \frac{1.20 \times 10^{-7}}{0.012} = \boxed{1.00 \times 10^{-5}}$$

oder 0.001%.

1.2

Es sei u die Geschwindigkeit eines Ions nach der Beschleunigung. Jedes einfach geladene Ion gewinnt dieselbe kinetische Energie eU . Aus der nichtrelativistischen Energieerhaltung folgt

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU,$$

also

$$u(v, U) = \sqrt{v^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Diese Funktion wächst mit der Anfangsgeschwindigkeit v , sodass für die Grenzen der Verteilung nach der Beschleunigung gilt

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}, \quad u_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Folglich gilt

$$\Delta v(U) = u_2 - u_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

Durch Erweitern mit dem konjugierten Ausdruck wird die Spannungsabhängigkeit besonders deutlich:

$$\Delta v(U) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} + \sqrt{v_1^2 + 2eU/m}}.$$

Der Zähler ist konstant, und der Nenner wächst mit U . Die Beschleunigung verschiebt also die gesamte Verteilung zu höheren Geschwindigkeiten und **verringert dabei ihre Breite**.

Für den gegebenen Wert $v_1 = 0$ gilt

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Für $2eU/m \gg v_2^2$ wird daraus

$$\Delta v(U) \simeq \frac{v_2^2}{2\sqrt{2eU/m}} \propto U^{-1/2}.$$

1.3

Wir schreiben

$$\lambda_1 = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = 600.001 \text{ nm}, \quad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.001 \text{ nm}.$$

Ohne Beschleunigung ergibt sich für jede Ruhewellenlänge ein Wellenlängenintervall zur Laseranregung

$$\mathcal{I}_i(0) = \left[\lambda_i, \lambda_i \left(1 + \frac{v_2}{c} \right) \right].$$

Numerisch gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(0) &= [600.000, 600.012] \text{ nm}, \\ \mathcal{I}_2(0) &\simeq [600.001, 600.013] \text{ nm}. \end{aligned}$$

Ihr gemeinsames Intervall ist näherungsweise

$$[600.001, 600.012] \text{ nm},$$

sodass sich die beiden Spektren eindeutig überlappen.

Nach der Beschleunigung lauten die Intervalle

$$\mathcal{I}_i(U) = \left[\lambda_i \left(1 + \frac{u_1}{c} \right), \lambda_i \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) \right].$$

Da $\lambda_2 > \lambda_1$, sind die Intervalle getrennt, wenn die obere Grenze des ersten Intervalls unterhalb der unteren Grenze des zweiten liegt. Die Grenzbedingung lautet

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

Gleichwertig gilt

$$u_2 - u_1 = \frac{c \delta \lambda}{\lambda_1} \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

In führender Ordnung des Dopplereffekts gilt $u_1/c \ll 1$, sodass sich für die erforderliche Grenzbreite des Geschwindigkeitsspektrums ergibt

$$d \equiv \frac{c \delta \lambda}{\lambda_1} = \frac{(3.00 \times 10^8)(0.001)}{600} \text{ m s}^{-1} = \boxed{500 \text{ m s}^{-1}}.$$

Durch Beschleunigung lässt sich dies erreichen, da sie die Geschwindigkeitsverteilung kontinuierlich verschmälert.

Mit $v_1 = 0$ ergibt die Energieerhaltung außerdem

$$u_2^2 - u_1^2 = v_2^2.$$

An der Trennschwelle gilt $u_2 - u_1 \simeq d$, und daher

$$u_2 + u_1 \simeq \frac{v_2^2}{d} = \frac{6000^2}{500} = 72,000 \text{ m s}^{-1}.$$

Auflösen nach den beiden Geschwindigkeiten ergibt

$$\begin{aligned} u_1 &\simeq \frac{72,000 - 500}{2} = 35,750 \text{ m s}^{-1}, \\ u_2 &\simeq 36,250 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir mit $e/m = 4 \times 10^6 \text{ C kg}^{-1}$

$$U_{\min} \simeq \frac{u_1^2}{2(e/m)} = \frac{(35,750)^2}{8 \times 10^6} \text{ V} \approx \boxed{160 \text{ V}}.$$

Die resultierenden Geschwindigkeiten erfüllen $u/c \approx 1.2 \times 10^{-4}$, was mit den verwendeten Näherungen vereinbar ist. Die Berücksichtigung des kleinen Faktors $1 + u_1/c$ in der klassischen Bedingung für die Intervallgrenzen ändert den angegebenen Spannungswert nicht.

Bei der Grenzspannung fallen die beiden Spektralränder zusammen. Für eine strikte Trennung ist eine Spannung geringfügig oberhalb dieses Schwellenwerts erforderlich.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Maxwellsches Rad

Einleitung

Ein zylindrisches Rad mit gleichmäßiger Dichte, der Masse $M = 0,40 \text{ kg}$, dem Radius $R = 0,060 \text{ m}$ und der Dicke $d = 0,010 \text{ m}$ ist an zwei leichten Fäden gleicher Länge an der Decke aufgehängt. Jeder Faden ist um die Achse des Rades gewickelt. Wie die Masse der Fäden ist auch die Masse der Achse vernachlässigbar. Durch Drehen des Rades von Hand werden die Fäden aufgewickelt, bis der Schwerpunkt auf eine Höhe von $1,0 \text{ m}$ über dem Boden angehoben ist. Lässt man das Rad unter dem Einfluss der Schwerkraft senkrecht nach unten laufen, so werden die Fäden über ihre gesamte Länge abgewickelt, und das Rad erreicht seinen tiefsten Punkt. Anschließend beginnen sich die Fäden in entgegengesetzter Richtung aufzuwickeln, wodurch das Rad wieder angehoben wird.

Untersuchen und beantworten Sie die folgenden Fragen unter der Annahme, dass die Fäden senkrecht verlaufen und die Berührungspunkte der Fäden mit der Achse unmittelbar unter den jeweiligen Aufhängepunkten liegen (siehe Abb. 19.5).

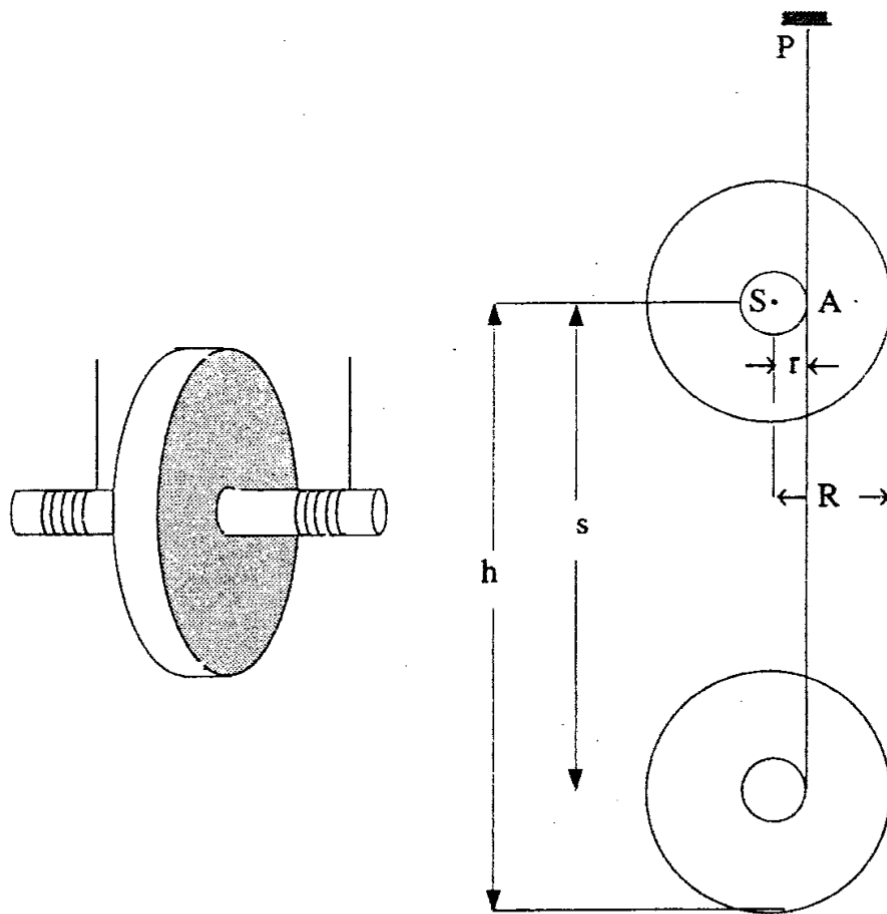


Fig. 19.5

Abb. 19.5

Fragen

2.1

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Rades, wenn sein Schwerpunkt die vertikale Strecke s zurückgelegt hat.

2.2

Bestimmen Sie die kinetische Energie der Translationsbewegung des Schwerpunkts E_r , nachdem das Rad eine Strecke $s = 0,50$ m zurückgelegt hat, und berechnen Sie das Verhältnis zwischen E_r und der bis zu diesem Zeitpunkt in jeder anderen Form vorliegenden Energie in dieser Aufgabe.

Radius der Achse = 0,0030 m

2.3

Bestimmen Sie die Fadenspannung, während sich das Rad abwärts bewegt.

2.4

Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω' als Funktion des Winkels Φ , wenn die Fäden beginnen, sich in entgegengesetzter Richtung abzuwickeln, wie in Abb. 19.6 dargestellt.

Skizzieren Sie die Größen, die die Bewegung beschreiben (in einem für die Aufgabe geeigneten kartesischen Koordinatensystem), sowie den Betrag der Geschwindigkeit des Schwerpunkts als Funktion von Φ .

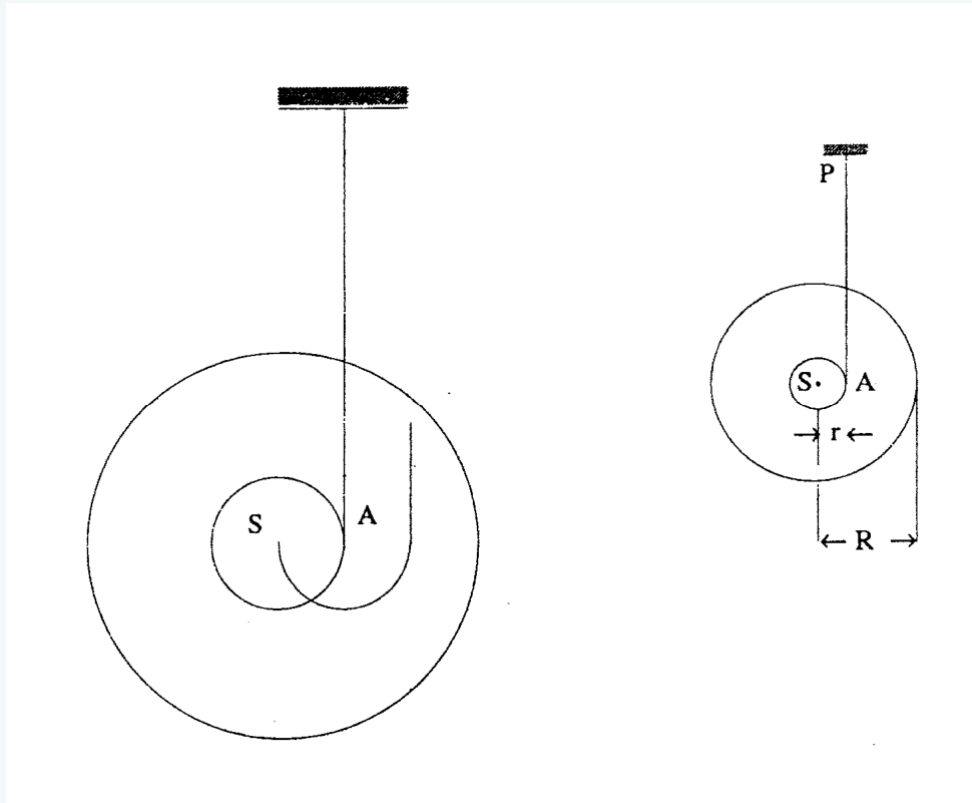


Abb. 19.6

2.5

Wenn der Faden einer maximalen Spannung von $T_m = 10 \text{ N}$ standhält, bestimmen Sie die maximale Fadenlänge, die durch das Rad abgewickelt werden kann, ohne dass der Faden reißt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier ist $r = 0.0030 \text{ m}$; für die numerischen Auswertungen wird $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ verwendet. Für die Bewegungsumkehr sei ℓ die vorangegangene geradlinige Abwärtsstrecke; wir definieren $\Phi = 0$ beim Eintritt, $\Phi = \pi/2$ am tiefsten Punkt und $\Phi = \pi$ beim Austritt. In den Teilen 2.4–2.5 wird die in Abb. 19.6 dargestellte halbkreisförmige Bewegungsumkehr mit festem Kontaktpunkt verwendet; dies ist eine Idealisierung: Außer bei $\Phi = \pi/2$ hat die erforderliche Kontaktkraft eine horizontale Komponente, die senkrechte Fäden nicht aufbringen können.

• 2.1

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

Bei $s = 0.50 \text{ m}$ ist $\omega = 73.6 \text{ rad s}^{-1}$.

• 2.2

$$E_r = \frac{Mgs}{201} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ.}$$

Wird die potenzielle Energie im Schwerfeld vom Boden aus gemessen, gilt

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Somit sind $E_r/E_{\text{rot}} = 1/200$ und $E_r/(Mgs) = 1/201$.

- 2.3 Die Spannung in **jedem** Faden beim gewöhnlichen Abwickeln während der Abwärtsbewegung beträgt

$$T = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)} = 1.95 \text{ N} \simeq 2.0 \text{ N.}$$

• 2.4

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

Wählt man die Position des Mittelpunkts beim Eintritt als Ursprung, wobei x nach rechts und y nach oben gerichtet ist, gilt

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi,$$

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi, \quad v = r\omega'.$$

Die Bahn ist ein unterer Halbkreis. Der Geschwindigkeitsbetrag ist symmetrisch bezüglich $\pi/2$ und erreicht dort sein Maximum.

- 2.5 Die durch die Reißfestigkeit begrenzte abgewickelte Länge **jedes** Fadens beträgt

$$\ell_{\text{max}} = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r = 1.23 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m.}$$

Im beschriebenen Aufbau ergibt sich durch den Boden eine kleinere Grenzlänge:

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \approx 0.94 \text{ m.}$$

Bei diesem gerade noch ausreichenden Bodenabstand beträgt die maximale Spannung nur 8.1 N pro Faden.

Lösung

Wir nehmen an, dass das Rad aus der Ruhe losgelassen wird, die Fäden undeformierbar sind, beim Auf- und Abwickeln kein Gleiten auftritt und dissipative Verluste vernachlässigbar sind.

Das Trägheitsmoment des Rades bezüglich seiner Achse beträgt

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

Die Dicke d geht in dieses Trägheitsmoment nicht ein. Zweckmäßigerweise definieren wir

$$J = I + Mr^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right).$$

Für die gegebenen Abmessungen gilt

$$\frac{I}{Mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} = 200, \quad \frac{J}{Mr^2} = 201.$$

2.1

Beim Abwickeln um einen Winkel $d\theta$ sinkt der Mittelpunkt um $ds = r d\theta$. Daher gilt

$$v = r\omega.$$

Aus der Erhaltung der mechanischen Energie nach einer Abwärtsstrecke s folgt

$$Mgs = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2.$$

Folglich ist

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{2Mgs}{I + Mr^2}} = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\omega(s) = (104.1 \text{ rad s}^{-1}) \sqrt{\frac{s}{1 \text{ m}}}.$$

2.2

Die kinetische Energie der Translationsbewegung beträgt

$$E_r = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{Mr^2}{J}Mgs = \frac{Mgs}{201}.$$

Bei $s = 0.50 \text{ m}$ gilt

$$Mgs = 0.40(9.81)(0.50) = 1.962 \text{ J},$$

also

$$E_r = 0.009761 \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

Die Rotationsenergie beträgt

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

und damit gilt

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}}} = \frac{Mr^2}{I} = \frac{1}{200}.$$

Ihr Zahlenwert ist

$$E_{\text{rot}} = 1.95224 \text{ J}.$$

Der Mittelpunkt befindet sich nun $h - s = 0.50 \text{ m}$ über dem Boden. Wählt man den Boden als Nullniveau der potenziellen Energie im Schwerfeld, gilt

$$U = Mg(h - s) = 1.962 \text{ J}.$$

Somit stehen die drei vorhandenen Energien im Verhältnis

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

Die Anfangsenergie betrug $Mgh = 3.924 \text{ J}$, und die Kontrolle der Energiebilanz ergibt

$$0.009761 + 1.952239 + 1.962 = 3.924 \text{ J}.$$

Die Translationsenergie beträgt $1/201$ der freigesetzten potenziellen Energie. Wenn mit „Energie in jeder anderen Form“ die Summe der verbleibenden Rotationsenergie und potenziellen Energie im Schwerfeld gemeint ist, lautet das entsprechende Verhältnis

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}} + U} = \frac{1}{401}.$$

2.3

Sei T die Spannung in jedem Faden, und die nach unten gerichtete Beschleunigung a sei positiv. Das zweite Newtonsche Gesetz liefert

$$Mg - 2T = Ma.$$

Die beiden Fadenspannungen erzeugen das Drehmoment

$$2Tr = I\alpha,$$

während aus der Abwickelbedingung $a = r\alpha$ folgt. Daher gilt

$$2T = \frac{I}{r^2}a,$$

und

$$a = \frac{Mg}{M + I/r^2} = \frac{g}{201} = 0.0488 \text{ m s}^{-2}.$$

Daraus folgt

$$T = \frac{M(g - a)}{2} = \frac{Mg}{2} \frac{200}{201} = 1.95224 \text{ N}.$$

Diese Spannung ist während der geradlinigen Abwärtsbewegung konstant. Die wesentlich größere Kraft während der Bewegungsumkehr muss gesondert betrachtet werden.

2.4

Wir deuten die gekrümmte Bahn in Abb. 19.6 als eine kurze Bewegungsumkehr, während der die Kontaktlinie durch A fest bleibt und der Mittelpunkt S einen Halbkreis mit dem Radius r um sie beschreibt. Diese vorgegebene Geometrie ist die hier verwendete Idealisierung der Bewegungsumkehr.

Sei ℓ die geradlinige Abwärtsstrecke vor der Bewegungsumkehr. Beim Eintritt gilt

$$\omega_0^2 = \frac{2Mg\ell}{J}.$$

Wir wählen die Position von S beim Eintritt als Ursprung, wobei x nach rechts und y nach oben gerichtet ist. Dann ist $A = (r, 0)$. Wir definieren Φ so, dass der Winkel von 0 bis π zunimmt, während der Mittelpunkt unter A hindurchläuft. Die Koordinaten lauten

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi.$$

Sie erfüllen

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0.$$

Da es sich um eine Drehung um A handelt, gilt

$$\dot{\Phi} = \omega', \quad v = r\omega'.$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der Kontaktlinie ist $J = I + Mr^2$. Der Mittelpunkt ist um die zusätzliche Strecke $r \sin \Phi$ abgesunken, sodass aus der Energieerhaltung folgt

$$\frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + Mgr \sin \Phi.$$

Daher gilt

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mgr}{J} \sin \Phi} = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}.$$

Durch Differenzieren der Koordinaten ergibt sich

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi.$$

Somit ist

$$v(\Phi) = r\omega'(\Phi) = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell} \sin \Phi}, \quad v_0 = r\omega_0.$$

Die für die Kraftberechnung nützliche Winkelbeschleunigung beträgt

$$\ddot{\Phi} = \frac{Mgr}{J} \cos \Phi.$$

Die geforderten Skizzen lassen sich wie folgt angeben:

Φ	x	y	v_x	v_y	Geschwindigkeitsbetrag
0	0	0	0	$-v_0$	v_0
$\pi/2$	r	$-r$	$v_{\max}$	0	$v_{\max}$
π	$2r$	0	0	$+v_0$	v_0

Hier gilt

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}, \quad \omega'_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}.$$

Die räumliche Bahn besteht aus einer senkrechten Abwärtsbewegung, einem unteren Halbkreis mit dem Radius $r = 3.0 \text{ mm}$ und einer senkrechten Aufwärtsbewegung, die horizontal um $2r = 6.0 \text{ mm}$ versetzt ist. Als Funktion von Φ nimmt x glatt von 0 bis $2r$ zu, während y eine negative Sinushalbwellenlinie mit dem Minimum $-r$ beschreibt. Sowohl v als auch ω' bilden symmetrische Bögen mit gleichen Werten an den Endpunkten und ihren Maxima bei $\pi/2$.

Am tiefsten Punkt ist die **vertikale Geschwindigkeit null**, der **Geschwindigkeitsbetrag jedoch maximal**: In diesem Halbkreismodell bewegt sich der Mittelpunkt dann horizontal.

2.5

In der Mitte der Bewegungsumkehr liegt der Mittelpunkt unmittelbar unter A . Seine Tangentialbeschleunigung verschwindet, weil $\cos \Phi = 0$ ist, und seine Beschleunigung ist senkrecht nach oben gerichtet:

$$a_{\text{bottom}} = \frac{v_{\text{max}}^2}{r} = r\omega_{\text{max}}'^2.$$

Die vertikale Kräftegleichung lautet daher

$$2T_{\text{peak}} - Mg = Mr\omega_{\text{max}}'^2.$$

Mit dem Ergebnis aus 2.4,

$$\omega_{\text{max}}'^2 = \frac{2Mg(\ell + r)}{J},$$

erhalten wir

$$T_{\text{peak}} = \frac{Mg}{2} + \frac{M^2gr(\ell + r)}{J}.$$

Im Modell mit festem A ist der tiefste Punkt tatsächlich der Punkt mit der größten Zwangskraft. Zur Überprüfung setzen wir

$$\epsilon = \frac{Mr^2}{J}, \quad b = \frac{r\omega_0^2}{g}, \quad u = \sin \Phi.$$

Die Zerlegung der gesamten Kontaktkraft F in eine radiale und eine tangentielle Komponente ergibt

$$\frac{F^2}{M^2g^2} = b^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2b(1 + 2\epsilon)u + 3\epsilon(2 + \epsilon)u^2.$$

Alle Koeffizienten von u und u^2 sind nichtnegativ, sodass das Maximum bei $u = 1$ auftritt; dort ist die Kontaktkraft vertikal gerichtet und verteilt sich gleichmäßig auf die beiden Fäden.

Setzt man die maximale Spannung in jedem Faden gleich T_m , ergibt sich

$$2T_m = Mg + \frac{2M^2gr(\ell_{\text{max}} + r)}{J}.$$

Damit folgt

$$\ell_{\text{max}} = \frac{J(2T_m - Mg)}{2M^2gr} - r = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r.$$

Numerisch ergibt sich

$$\ell_{\text{max}} = \frac{0.060^2 + 2(0.0030)^2}{4(9.81)(0.0030)} \left(\frac{20}{0.40} - 9.81 \right) - 0.0030 = 1.2322 \text{ m.}$$

Die durch die Reißfestigkeit des Fadens gesetzte Grenze beträgt somit ungefähr

$$\ell_{\text{max}} \simeq 1.2 \text{ m.}$$

Außerdem gibt es eine geometrische Einschränkung durch den Boden. Während der Bewegungsumkehr beträgt die minimale Höhe des Mittelpunkts $h - \ell - r$. Damit das Rad über dem Boden bleibt, muss

$$h - \ell - r \geq R,$$

gelten, also

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \simeq 0.94 \text{ m.}$$

Setzt man diese Länge in die Formel für die maximale Fadenspannung ein, erhält man

$$T_{\text{peak}} = 8.08 \text{ N} < 10 \text{ N}.$$

Folglich begrenzt der Boden die mögliche Abwickelstrecke, bevor die durch die Reißfestigkeit des Fadens gesetzte Grenze erreicht wird.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 3: Rekombination positiver und negativer Ionen in ionisiertem Gas

Einleitung

Ein Gas besteht aus positiven Ionen eines Elements (bei hoher Temperatur) und Elektronen. Das positive Ion gehört zu einem Atom mit unbekannter Massenzahl Z . Es ist bekannt, dass dieses Ion nur ein Elektron in der Hülle (auf einer Bahn) besitzt.

Dieses Ion werde durch das Symbol $A^{(Z-1)+}$ dargestellt.

Konstanten:

Konstante	Wert
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
Elementarladung	$e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
	$q^2 = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 2,037 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$
Plancksches Wirkungsquantum	$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
(Ruhe-)Masse eines Elektrons	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Bohrscher Atomradius	$r_B = \frac{\hbar}{m \cdot q^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Rydberg-Energie	$E_R = \frac{q^2}{2 \cdot r_B} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
(Ruhe-)Masse eines Protons	$m_p \cdot c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

Fragen:

3.1

Nehmen Sie an, dass bei dem Ion nur noch ein Elektron in der Hülle verblieben ist.

$A^{(Z-1)+}$ befindet sich im Grundzustand.

Im Zustand niedrigster Energie wird das Quadrat des mittleren Abstands des Elektrons vom Kern, also r^2 , durch die Komponenten $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ bzw. $(\Delta z)^2$ entlang der x-, y- und z-Achse beschrieben, wobei

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

gilt. Ebenso ist das Quadrat des mittleren Impulses gegeben durch

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2,$$

wobei

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta y} \quad \text{und} \quad \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta z}.$$

Schreiben Sie eine Ungleichung für $(p_0)^2 \cdot (r_0)^2$ in vollständiger Form auf.

3.2

Das durch $A^{(Z-1)+}$ dargestellte Ion kann ein zusätzliches Elektron einfangen und emittiert dabei ein Photon.

Schreiben Sie eine Gleichung auf, mit der die Frequenz des emittierten Photons berechnet werden kann.

3.3

Berechnen Sie die Energie des Ions $A^{(Z-1)+}$, indem Sie den niedrigsten Energiewert bestimmen. Die Berechnung soll näherungsweise auf den folgenden Grundlagen beruhen:

3.3.A

Die potenzielle Energie des Ions soll durch den Mittelwert von $\frac{1}{r}$ ausgedrückt werden.

(d. h. $\frac{1}{r_0}$; r_0 ist in der Aufgabe angegeben).

3.3.B

Verwenden Sie zur Berechnung der kinetischen Energie des Ions den in 3.1 angegebenen Mittelwert des Impulsquadrats, wobei die Vereinfachung

$$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2 \approx (\hbar)^2$$

vorgenommen wird.

3.4

Berechnen Sie die Energie des Ions $A^{(Z-2)+}$, das sich im Grundzustand befinden soll, nach demselben Prinzip wie bei der Berechnung der Energie von $A^{(Z-1)+}$. Die mittleren Abstände der beiden Elektronen in der äußersten Hülle (entsprechend r_0 aus 3.3) seien mit r_1 und r_2 bezeichnet. Nehmen Sie an, dass der mittlere Abstand zwischen den beiden Elektronen durch $r_1 + r_2$ gegeben ist und dass der Mittelwert des Impulsquadrats jedes Elektrons der Unschärferelation genügt, d. h.

$$p_1^2 \cdot r_1^2 \approx \hbar^2 \quad \text{und} \quad p_2^2 \cdot r_2^2 \approx \hbar^2$$

Hinweis: Nutzen Sie die Angabe, dass im Grundzustand $r_1 = r_2$ gilt.

3.5

Betrachten Sie insbesondere den Fall, dass das Ion $A^{(Z-2)+}$ beim Einfang eines zusätzlichen Elektrons im Grundzustand ruht und das eingefangene Elektron vor dem Einfang ebenfalls ruht. Bestimmen Sie den Zahlenwert von Z , wenn die Frequenz des beim Elektroneneinfang emittierten Photons $2,057 \cdot 10^{17}$ rad/s beträgt. Bestimmen Sie das Element, aus dem das Ion hervorgeht.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir definieren die Energieskala

$$\mathcal{R} = \frac{m_e(q^2)^2}{2\hbar^2}.$$

Bei konsistenten Konstanten ist dies die Rydberg-Energie E_R . Die abgedruckten Konstanten sind inkonsistent; daher werden ihre numerischen Konsequenzen im Folgenden getrennt angegeben.

- 3.1

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

- 3.2

$$h\nu = \hbar\omega = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f,$$

wobei E_i, E_f die inneren elektronischen Energien sind und die K die kinetischen Energien der Translationsbewegung bezeichnen.

- 3.3

$$E_1 = -Z^2 \mathcal{R} \quad (\text{üblicherweise } -Z^2 E_R).$$

- 3.3.A

$$U_1(r_0) \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

- 3.3.B

$$T_1(r_0) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}, \quad r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

- 3.4

$$E_2 = -2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{R}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

- **3.5** Für den beabsichtigten Einfang eines **zweiten** Elektrons gilt

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}$$

bei vernachlässigbarem Rückstoß. Der angegebene Wert von E_R ergibt $Z = 3.673$; die abgedruckten Werte von $q^2, m_e, \hbar$ ergeben $Z = 4.088$. Für beide ist die nächstgelegene ganze Zahl

$$Z = 4, \quad \text{Beryllium (Be).}$$

Diese Zuordnung ist näherungsweise und gilt nur unter der genannten Voraussetzung. In der abgedruckten Fassung beschreibt Teil 3.5 den Einfang eines dritten Elektrons, dessen Energie nicht angegeben wurde.

Lösung

Aus den Ladungszuständen folgt, dass der Kern die Ladung $+Ze$ besitzt. Wir betrachten seine Masse als groß gegenüber der Elektronenmasse, vernachlässigen seine Bewegung bei der Berechnung der elektronischen Energien und verwenden nichtrelativistische kinetische Energien für die Elektronen. Elektronische Bindungsenergien werden relativ zum Kern und den voneinander getrennten Elektronen gemessen.

3.1

Quadrieren und Addieren der drei Unschärfeungleichungen ergibt

$$p_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right].$$

Multiplikation mit dem angegebenen r_0^2 liefert den vollständigen Ausdruck

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[3 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta z)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right].$$

Die Summe jedes Paares reziproker Terme beträgt mindestens 2, da $u + u^{-1} \geq 2$ für $u > 0$ gilt. Somit

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

Gleichheit erfordert sowohl gleiche Ortsunschärfen,

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z,$$

als auch, dass in allen drei komponentenweisen Unschärferelationen Gleichheit gilt. Kugelsymmetrie allein gewährleistet Letzteres nicht.

3.2

Die Reaktion beim Strahlungseinfang lautet

$$A^{(Z-1)+} + e^{-} \longrightarrow A^{(Z-2)+} + \gamma.$$

Es seien E_i, E_f die anfängliche und die endgültige innere elektronische Energie. Weiter seien K_i, K_e die anfänglichen kinetischen Energien des Ions und des Elektrons und K_f die endgültige kinetische Energie des Ions. Die Energieerhaltung liefert

$$E_i + K_i + K_e = E_f + K_f + \hbar\omega.$$

Damit gilt

$$\boxed{\hbar\omega = h\nu = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Die auf beiden Seiten gleichen Ruheenergien des Kerns und der Elektronen heben sich auf. Die Impulserhaltung bestimmt den Rückstoß des entstandenen Ions. Sind die anfänglichen kinetischen Energien und der Rückstoß vernachlässigbar, vereinfacht sich dies zu

$$\boxed{\hbar\omega \approx E_i - E_f.}$$

3.3

Wir minimieren nun die in der Aufgabe geforderte näherungsweise elektronische Gesamtenergie.

3.3.A

Die anziehende Coulomb-Potenzialenergie lautet

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Zq^2}{r}.$$

Mit der vorgeschriebenen Näherung für ihren Erwartungswert ergibt sich

$$\boxed{U_1 \approx -Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

3.3.B

Im stationären Grundzustand ist der mittlere Impuls des Elektrons null, sodass sein mittleres Impulsquadrat durch p_0^2 dargestellt wird. Die vorgegebene Abschätzung

$$p_0^2 r_0^2 \approx \hbar^2$$

liefert daher

$$\boxed{T_1 \approx \frac{p_0^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}.$$

Dies ist ein bewusst grober Ersatz für das Ergebnis aus der Unschärferelation: Der numerische Faktor aus 3.1 wird weggelassen, und es handelt sich nicht um eine aus dieser Schranke abgeleitete Gleichheit.

Die abgeschätzte Gesamtenergie ist folglich

$$E_1(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} - \frac{Zq^2}{r_0}.$$

Ihre stationäre Stelle erfüllt

$$\frac{dE_1}{dr_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{Zq^2}{r_0^2} = 0,$$

woraus folgt

$$r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

Die zweite Ableitung ist dort $\hbar^2/(m_e r_0^4) > 0$, es handelt sich also um ein Minimum. Einsetzen ergibt

$$T_{1,\min} = \frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2}, \quad U_{1,\min} = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{\hbar^2},$$

und damit

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2} = -Z^2 \mathcal{R}.$$

Mit konsistenten Werten für den Bohrschen Radius und die Rydberg-Energie ergeben sich die bekannten Formen

$$r_{0,\min} = \frac{r_B}{Z}, \quad E_1 = -Z^2 E_R.$$

3.4

Nun gibt es zwei kinetische Energien der Elektronen, zwei anziehende Elektron-Kern-Terme und einen abstoßenden Elektron-Elektron-Term. Mit der vorgeschriebenen Näherung für den Abstand gilt

$$E_2(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Zq^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{q^2}{r_1 + r_2}.$$

Mit der gegebenen Grundzustandsbedingung $r_1 = r_2 = r$ folgt

$$E_2(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2Zq^2}{r} + \frac{q^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r}.$$

Die Minimierung ergibt

$$-\frac{2\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r^2} = 0,$$

also

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

Bei diesem Radius gilt

$$E_2 = -\frac{m_e (q^2)^2}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 = -2\mathcal{R} \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2.$$

Somit ersetzt die Elektronenabstoßung in diesem Modell Z durch den effektiven Wert $Z - \frac{1}{4}$ in der Grundzustandsenergie jedes Elektrons.

3.5

Um diesen Teil mit den in 3.3 und 3.4 berechneten Energien zu verknüpfen, muss der Einfang als



interpretiert werden. Der in 3.5 wörtlich abgedruckte Ladungszustand beschreibt stattdessen einen anderen Prozess, nämlich den Einfang eines dritten Elektrons, dessen Energie in dieser Aufgabe nicht berechnet wird.

Für den beabsichtigten Prozess beträgt die freigesetzte Bindungsenergie

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_1 - E_2 \\ &= \left[2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 - Z^2 \right] \mathcal{R} \\ &= \left(Z^2 - Z + \frac{1}{8} \right) \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Obwohl beide einlaufenden Teilchen ruhen, muss das entstandene Ion einen Rückstoß erfahren. Ist seine Masse M , so ergibt die Impulserhaltung

$$p_{\text{ion}} = p_{\gamma} = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

Folglich

$$\Delta E = \hbar\omega + \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}.$$

Die angegebene Frequenz ist eine **Kreisfrequenz**, sodass sich für die Photonenenergie ergibt:

$$E_{\gamma} = \hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34})(2.057 \times 10^{17}) = \boxed{2.168 \times 10^{-17} \text{ J}}.$$

Mit $Mc^2 \geq m_p c^2$ erhält man für die relative Rückstoßkorrektur die Schranke

$$\frac{K_{\text{recoil}}}{E_{\gamma}} = \frac{E_{\gamma}}{2Mc^2} \leq \frac{2.168 \times 10^{-17}}{2(1.503 \times 10^{-10})} = 7.21 \times 10^{-8}.$$

Bei der Genauigkeit der Daten ist sie vollständig vernachlässigbar.

Daher gilt

$$Z^2 - Z + \frac{1}{8} = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}},$$

mit der physikalisch sinnvollen Lösung

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}.$$

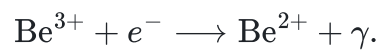
Die inkonsistenten Konstanten führen zu zwei numerischen Abschätzungen:

Für die Energieskala verwendete Konstanten	$\mathcal{R}$	Abgeschätztes Z
Angegebene Rydberg-Energie E_{R}	$2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$	3.673
Abgedruckte Werte von $q^2, m_e, \hbar$, über $m_e(q^2)^2/(2\hbar^2)$	$1.701 \times 10^{-18} \text{ J}$	4.088

Für beide Abschätzungen ist 4 die nächstgelegene ganze Zahl. Dementsprechend ergibt sich bei der beabsichtigten Interpretation des Einfangs und im Rahmen des Näherungsmodells als Element

$$\boxed{Z = 4, \quad \text{Beryllium,}}$$

mit dem Einfangprozess



Der vorliegende Text ermöglicht keine exakte, in sich konsistente Bestimmung einer ganzen Zahl.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.