

المسألة 1: مطيافية سرعات الجسيمات

المعطيات الأساسية

إن امتصاص الفوتون وانبعثه عمليتان عكسيتان. ومن الأمثلة الجيدة على ذلك إثارة ذرة من الحالة الأرضية إلى حالة ذات طاقة أعلى، ثم عودة الذرة لاحقاً إلى الحالة الأرضية. وفي هذه الحالة يمكننا الكشف عن امتصاص فوتون من خلال ظاهرة الانبعاث التلقائي أو الفلورة. وتستفيد بعض الأجهزة الحديثة من هذا المبدأ للتعرف على الذرات، وكذلك لقياس قيمة السرعة في طيف سرعات حزمة الإلكترونات أو حسابها.

في تجربة مثالية (انظر الشكل 19.1)، يتحرك أيون أحادي الشحنة بسرعة v في الاتجاه المعاكس لاتجاه الضوء القادم من مصدر ليزر. ويمكن ضبط الطول الموجي للضوء الصادر عن مصدر الليزر. ويمكن إثارة أيون سرعته صفر إلى حالة ذات طاقة أعلى بتعريضه لضوء ليزر ذي طول موجي $\lambda = 600 \text{ nm}$. وإذا أردنا إثارة أيون متحرك، فإن معرفتنا بتأثير دوبلر تدلنا على ضرورة استخدام ضوء ليزر ذي طول موجي يختلف عن القيمة المعطاة أعلاه.

لدينا طيف سرعات يشمل مقادير السرعة من $v_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ إلى $v_2 = 6,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. (انظر الشكل 19.1)

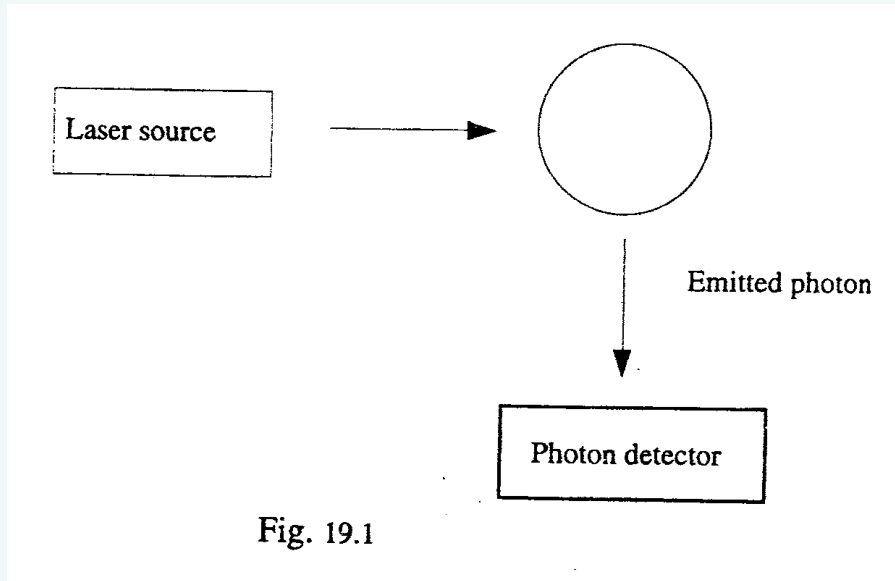


Fig. 19.1

الشكل 19.1

الأسئلة

1.1

1.1.1

ما مجال الأطوال الموجية لحزمة الليزر الذي يجب استخدامه لإثارة الأيونات ذات جميع السرعات في طيف السرعات المعطى أعلاه؟

1.1.2

يتطلب التحليل الدقيق للمسألة تطبيق العلاقة التالية من النظرية النسبية الخاصة

$$\nu' = \nu \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

حدّد الخطأ الناجم عن استخدام الصيغة الكلاسيكية لتأثير دوبلر في حل المسألة.

1.2

بافتراض أن الأيونات تُسرّع بفرق جهد U قبل إثارتها بحزمة الليزر، حدّد العلاقة بين عرض طيف سرعات حزمة الأيونات وفرق جهد التسريع. هل يزيد فرق جهد التسريع عرض طيف السرعات أم يقلله؟

1.3

لكل أيون القيمة $\frac{e}{m} = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$ ، ومستويان للطاقة يقابلان الطول الموجي $\lambda^{(1)} = 600 \text{ nm}$ والطول الموجي $\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} + 10^{-3} \text{ nm}$. بين أن طيفي الضوء المستخدم لإثارة الأيونات عند هذين الطولين الموجيين يتداخلان عندما لا يُطبّق فرق جهد للتسريع. هل يمكن استخدام فرق جهد التسريع لفصل طيفي ضوء الليزر المستخدم لإثارة الأيونات بحيث لا يعودان متداخلين؟ إذا كانت الإجابة بالإيجاب، فاحسب القيمة الدنيا لفرق الجهد المطلوب.

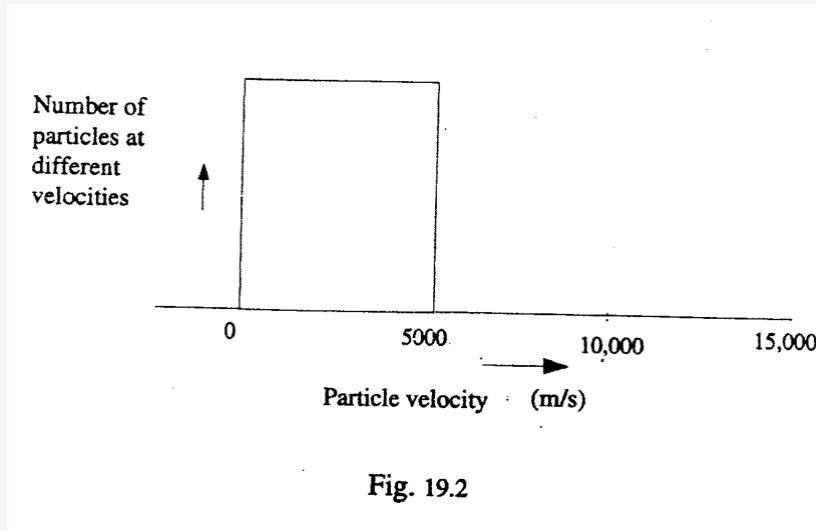


Fig. 19.2

الشكل 19.2

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• 1.1.1: مجال الأطوال الموجية المطلوب لليزر هو

$$600.000 \text{ nm} \leq \lambda_L \leq 600.012 \text{ nm},$$

وعرضه 0.012 nm .

• 1.1.2: تعطي الصيغة الكلاسيكية قيمة للطول الموجي الأعلى تقل عن القيمة الصحيحة بمقدار تقريبي قدره

$$1.2 \times 10^{-7} \text{ nm}.$$

أقصى خطأ نسبي في الطول الموجي هو 2.0×10^{-10} ؛ والخطأ النسبي في عرض المسح هو 1.0×10^{-5} .

• 1.2: بعد التسريع، يكون عرض طيف السرعات

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

وهو يتناقص بزيادة فرق جهد التسريع.

• 1.3: من دون تسريع، يكون مجالا الأطوال الموجية تقريباً

$$[600.000, 600.012] \text{ nm}, \quad [600.001, 600.013] \text{ nm},$$

ولذلك فهما يتداخلان. ويمكن للتسريع أن يفصلهما، عند عتبة مقدارها

$$U_{\min} \approx 160 \text{ V}.$$

عند العتبة يتلامس النطاقان فقط؛ ويؤدي فرق جهد أكبر قليلاً إلى نشوء فجوة ذات عرض غير صفري بينهما.

الحل

نستخدم $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. ليكن λ_0 الطول الموجي لرنين أيون ساكن، وليكن λ_L الطول الموجي لليزر في المختبر. نفترض أن الأطياف المثالية ليس لها عرض خط طيفي ذاتي.

1.1.1

يتحرك الأيون نحو الضوء الوارد، ولذلك يرصد تردداً أعلى من تردد الليزر في المختبر. وفي التقريب الكلاسيكي للراصد المتحرك،

$$\nu' = \nu_L \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

تتطلب الإثارة أن يساوي التردد الذي يرصده الأيون تردد رنينه في حالة السكون:

$$\nu' = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

بما أن $\nu_L = c/\lambda_L$ ، فإن

$$\frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_L} \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

ومن ثم

$$\lambda_L(v) = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

إذن يجب أن يزداد الطول الموجي لليزر في المختبر بزيادة سرعة الأيون. وعند طرفي المجال،

$$\lambda_L(0) = 600 \text{ nm},$$

$$\lambda_L(6000) = 600 \left(1 + \frac{6000}{3.00 \times 10^8}\right) \text{ nm} = 600.012 \text{ nm}.$$

وعليه يكون عرض المسح المطلوب

$$\Delta \lambda_L = \frac{\lambda_0(v_2 - v_1)}{c} = 0.012 \text{ nm}.$$

1.1.2

نضع $\beta = v/c$. تعطي الصيغة النسبية المعطاة شرط الرنين

$$\nu_0 = \nu_L \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

ولذلك فإن القيمة الدقيقة للطول الموجي المطلوب هي

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

القيمة الكلاسيكية هي $\lambda_{\text{cl}} = \lambda_0(1+\beta)$. ومن ثم فإن النقص النسبي في تقديرها، مقاسًا بالنسبة إلى الطول الموجي الدقيق، هو

$$\epsilon_\lambda = \frac{\lambda_{\text{rel}} - \lambda_{\text{cl}}}{\lambda_{\text{rel}}} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} \simeq \frac{\beta^2}{2}.$$

يبلغ هذا الخطأ أقصاه عند $v_2 = 6000 \text{ m s}^{-1}$ ، حيث

$$\beta_2 = 2.00 \times 10^{-5}, \quad \boxed{\epsilon_{\lambda, \text{max}} \simeq 2.00 \times 10^{-10}}.$$

وبصورة مكافئة، فإن توسيع التعبير الدقيق للطول الموجي،

$$\lambda_{\text{rel}} = \lambda_0 \left(1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^3) \right),$$

يعطي أقصى تصحيح مطلق

$$\delta\lambda_{\text{max}} \simeq \frac{\lambda_0 \beta_2^2}{2} = 600 \text{ nm} \times 2.00 \times 10^{-10} = \boxed{1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}}.$$

إذن تكون النهاية العليا النسبية للمجال تقريبًا

$$600.01200012 \text{ nm}.$$

لا يوجد تصحيح للنهاية الدنيا لأن $v_1 = 0$. ولذلك فإن الخطأ المطلق في عرض المسح يساوي أيضًا $1.20 \times 10^{-7} \text{ nm}$ ، وهو يقابل

$$\frac{\delta(\Delta\lambda_L)}{\Delta\lambda_L} \simeq \frac{1.20 \times 10^{-7}}{0.012} = \boxed{1.00 \times 10^{-5}}$$

أي 0.001%.

1.2

لتكن u سرعة أيون بعد التسريع. يكتسب كل أيون أحادي الشحنة الطاقة الحركية نفسها eU . وباستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة غير النسبي،

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + eU,$$

فنحصل على

$$u(v, U) = \sqrt{v^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

تزداد هذه الدالة بزيادة السرعة الابتدائية v ، ولذلك فإن طرفي التوزيع بعد التسريع هما

$$u_1 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}, \quad u_2 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}}.$$

وبالتالي،

$$\boxed{\Delta v(U) = u_2 - u_1 = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{v_1^2 + \frac{2eU}{m}}}.$$

ويجعل الضرب في المرافق اعتماده على فرق الجهد واضحًا بوجه خاص:

$$\Delta v(U) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} + \sqrt{v_1^2 + 2eU/m}}.$$

البسط ثابت، والمقام يزداد بزيادة U . ومن ثم فإن التسريع يزيح التوزيع كله نحو سرعات أعلى مع تقليل عرضه.

بالنسبة إلى القيمة المعطاة $v_1 = 0$,

$$\Delta v(U) = \sqrt{v_2^2 + \frac{2eU}{m}} - \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

عندما يكون $v_2^2 \gg 2eU/m$ ، يصبح ذلك

$$\Delta v(U) \simeq \frac{v_2^2}{2\sqrt{2eU/m}} \propto U^{-1/2}.$$

1.3

نكتب

$$\lambda_1 = 600 \text{ nm}, \quad \lambda_2 = 600.001 \text{ nm}, \quad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.001 \text{ nm}.$$

من دون تسريع، يقابل كل طول موجي في حالة السكون مجالاً للإثارة بالليزر

$$\mathcal{I}_i(0) = \left[\lambda_i, \lambda_i \left(1 + \frac{v_2}{c} \right) \right].$$

عددياً،

$$\mathcal{I}_1(0) = [600.000, 600.012] \text{ nm},$$

$$\mathcal{I}_2(0) \simeq [600.001, 600.013] \text{ nm}.$$

والمجال المشترك بينهما هو تقريباً

$$[600.001, 600.012] \text{ nm},$$

ولذلك يتضح أن الطيفين يتداخلان.

بعد التسريع، يصبح المجالان

$$\mathcal{I}_i(U) = \left[\lambda_i \left(1 + \frac{u_1}{c} \right), \lambda_i \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) \right].$$

بما أن $\lambda_2 > \lambda_1$ ، يحدث الانفصال عندما تقع الحافة العليا للمجال الأول دون الحافة الدنيا للمجال الثاني. والشرط الحدي هو

$$\lambda_1 \left(1 + \frac{u_2}{c} \right) = \lambda_2 \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

وبصورة مكافئة،

$$u_2 - u_1 = \frac{c \delta\lambda}{\lambda_1} \left(1 + \frac{u_1}{c} \right).$$

عند الاقتصار على الرتبة الأولى في تأثير دوبلر، يكون $u_1/c \ll 1$ ، ولذلك فإن العرض الحدي المطلوب لطيف السرعات هو

$$d \equiv \frac{c \delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{(3.00 \times 10^8)(0.001)}{600} \text{ m s}^{-1} = \boxed{500 \text{ m s}^{-1}}.$$

يمكن للتسريع تحقيق ذلك لأنه يضيق توزيع السرعات بصورة مستمرة.

عندما يكون $v_1 = 0$ ، يعطي انحفاظ الطاقة أيضاً

$$u_2^2 - u_1^2 = v_2^2.$$

عند عتبة الانفصال، يكون $u_2 - u_1 \simeq d$ ، ومن ثم

$$u_2 + u_1 \simeq \frac{v_2^2}{d} = \frac{6000^2}{500} = 72,000 \text{ m s}^{-1}.$$

وبحل المعادلتين لإيجاد السرعتين،

$$u_1 \simeq \frac{72,000 - 500}{2} = 35,750 \text{ m s}^{-1},$$

$$u_2 \simeq 36,250 \text{ m s}^{-1}.$$

وأخيراً، باستخدام $e/m = 4 \times 10^6 \text{ C kg}^{-1}$

$$U_{\min} \simeq \frac{u_1^2}{2(e/m)} = \frac{(35,750)^2}{8 \times 10^6} \text{ V} \approx \boxed{160 \text{ V}}.$$

تحقق السرعات الناتجة العلاقة $u/c \approx 1.2 \times 10^{-4}$ ، بما يتفق مع التقريبات المستخدمة. ولا يغيّر الاحتفاظ بالعامل الصغير $1 + u_1/c$ في الشرط الكلاسيكي لطرفي المجال قيمة فرق الجهد المذكورة.

عند فرق الجهد الحدي تتطابق الحافتان الطيفيتان. ويتطلب الانفصال التام فرق جهد أعلى قليلاً من هذه العتبة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: عجلة ماكسويل

مقدمة

عجلة أسطوانية متجانسة الكثافة، كتلتها $M = 0,40 \text{ kg}$ ، ونصف قطرها $R = 0,060 \text{ m}$ ، وسُمكها $d = 0,010 \text{ m}$ ، معلقة من السقف بخيطين خفيفين متساويين في الطول. يلتف كل خيط حول محور العجلة. وكتلة المحور مهملة، شأنها شأن كتلة الخيطين. عندما تُدار العجلة يدوياً، يلتف الخيطان حول المحور حتى يرتفع مركز الكتلة إلى ارتفاع $1,0 \text{ m}$ فوق الأرضية. وإذا تُركت العجلة تتحرك رأسياً إلى أسفل بفعل قوة الجاذبية، ينفك التفاف الخيطين حتى يمتد بكامل طولهما، وتصل العجلة إلى أدنى نقطة. ثم يبدأ الخيطان بالتفاف في الاتجاه المعاكس، مما يؤدي إلى ارتفاع العجلة إلى أعلى.

حلّ الأسئلة الآتية وأجب عنها، مفترضاً أن الخيطين رأسيان، وأن نقطتي تلامسهما مع المحور تقعان مباشرة أسفل نقطتي تعليقهما، كل على حدة (انظر الشكل 19.5).

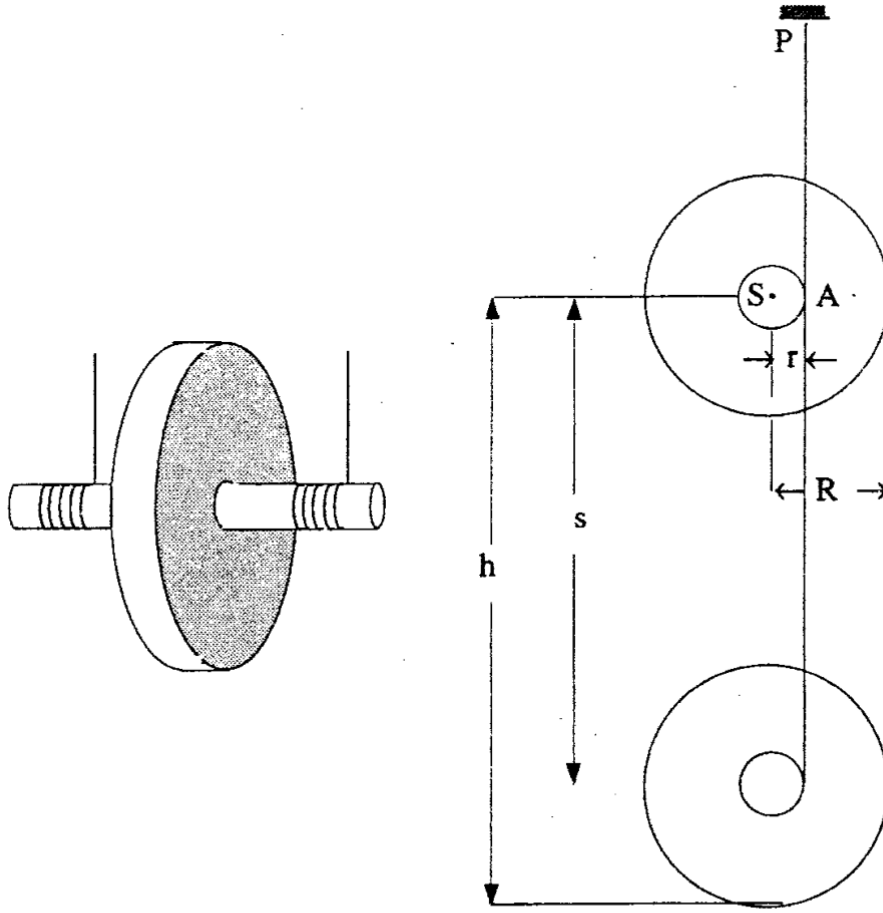


Fig. 19.5

الشكل 19.5

الأسئلة

2.1

أوجد السرعة الزاوية للعجلة عندما يقطع مركز كتلتها المسافة الرأسية s .

2.2

أوجد الطاقة الحركية للحركة الخطية لمركز الكتلة E_r بعد أن تقطع العجلة مسافة $s = 0,50 \text{ m}$ ، واحسب النسبة بين E_r والطاقة في أي صورة أخرى في هذه المسألة حتى هذه اللحظة.

نصف قطر المحور = $0,0030 \text{ m}$

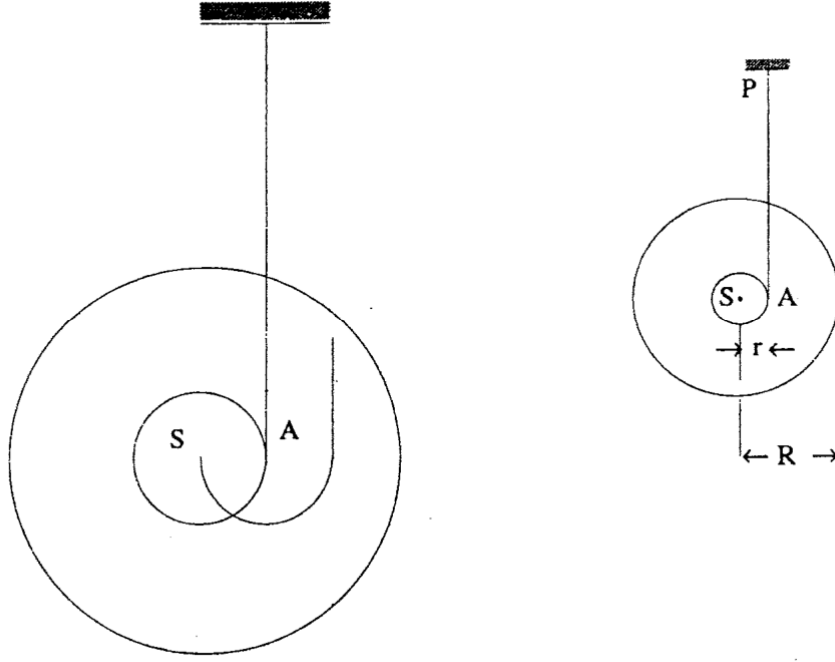
2.3

أوجد قوة الشد في الخيط أثناء حركة العجلة إلى أسفل.

2.4

احسب السرعة الزاوية ω' بدلالة الزاوية Φ عندما يبدأ الخيطان بفك التقافهما في الاتجاه المعاكس، كما هو موضح في الشكل 19.6.

ارسم رسماً بيانياً تقريبياً للمتغيرات التي تصف الحركة (في جهاز إحداثيات ديكارتي مناسب للمسألة)، وكذلك لمقدار سرعة مركز الكتلة بدلالة Φ .



الشكل 19.6

2.5

إذا كان الخيط يتحمل قوة شد قصوى $T_m = 10 \text{ N}$ ، فأوجد أقصى طول من الخيط يمكن أن تفك العجلة التفافه دون أن ينقطع.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

هنا $r = 0.0030 \text{ m}$ ، وتستخدم القيمة $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ في الحسابات العددية. بالنسبة إلى انعكاس اتجاه الحركة، لتكن ℓ مسافة الهبوط المستقيم السابق له، ونعرّف $\Phi = 0$ عند الدخول، و $\Phi = \pi/2$ عند أدنى نقطة، و $\Phi = \pi$ عند الخروج. يستخدم الجزآن 2.4–2.5 نموذج انعكاس الاتجاه على مسار نصف دائري مع ثبات التلامس، الموضح في الشكل 19.6؛ وهذا نموذج مثالي: فباستثناء الموضع $\Phi = \pi/2$ ، يكون لقوة رد الفعل اللازمة عند التلامس مركبة أفقية لا يستطيع الخيطان الرأسيان توفيرها.

2.1 •

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

عند $s = 0.50 \text{ m}$ ، تكون $\omega = 73.6 \text{ rad s}^{-1}$.

2.2 •

$$E_r = \frac{Mgs}{201} = 9.76 \times 10^{-3} \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

عند قياس طاقة وضع الجاذبية انطلاقاً من الأرضية،

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

ومن ثم $E_r/(Mgs) = 1/201$ ، و $E_r/E_{\text{rot}} = 1/200$.

• 2.3 قوة الشد في كل خيط أثناء فك الالتفاف المعتاد نزولاً هي

$$T = \frac{MgR^2}{2(R^2 + 2r^2)} = 1.95 \text{ N} \simeq 2.0 \text{ N}.$$

• 2.4

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}, \quad 0 \leq \Phi \leq \pi.$$

باتخاذ موضع المركز عند الدخول أصلاً للإحداثيات، وتوجيه x نحو اليمين و y نحو الأعلى،

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi,$$

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi, \quad v = r\omega'.$$

المسار نصف دائرة سفلي. ومقدار السرعة متماثل حول $\pi/2$ ، ويبلغ قيمته العظمى عندها.

• 2.5 الطول الأقصى الذي يمكن فك التفافه من كل خيط، وفق حدّ تحمله، هو

$$\ell_{\max} = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r = 1.23 \text{ m} \approx 1.2 \text{ m}.$$

تقرض الأرضية حداً أقصر في الوضع الموصوف:

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \approx 0.94 \text{ m}.$$

عند هذا الحد الذي يسمح بخلوص العجلة عن الأرضية، تبلغ قوة الشد القصوى 8.1 N فقط في كل خيط.

الحل

نفترض أن العجلة تُترك من السكون، وأن الخيطين غير قابلين للاستطالة، وأنه لا يحدث انزلاق أثناء الالتفاف أو فكه، وأن الفوائد التبديدية مهملة.

عزم القصور الذاتي للعجلة حول محورها هو

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = 7.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2.$$

لا يدخل السُّمك d في عزم القصور الذاتي هذا. ومن الملائم تعريف

$$J = I + Mr^2 = M \left(\frac{R^2}{2} + r^2 \right).$$

للأبعاد المعطاة،

$$\frac{I}{Mr^2} = \frac{R^2}{2r^2} = 200, \quad \frac{J}{Mr^2} = 201.$$

2.1

عندما ينفك الالتفاف بزاوية $d\theta$ ، يهبط المركز بمقدار $ds = r d\theta$. لذلك

$$v = r\omega.$$

يعطي انحفاظ الطاقة الميكانيكية بعد هبوط مسافة s

$$Mgs = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2.$$

وبالتالي،

$$\omega(s) = \sqrt{\frac{2Mgs}{I + Mr^2}} = \sqrt{\frac{4gs}{R^2 + 2r^2}}.$$

عدديًا،

$$\omega(s) = (104.1 \text{ rad s}^{-1}) \sqrt{\frac{s}{1 \text{ m}}}.$$

2.2

الطاقة الحركية الانتقالية هي

$$E_r = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Mr^2 \omega^2 = \frac{Mr^2}{J} Mgs = \frac{Mgs}{201}.$$

عند $s = 0.50 \text{ m}$ ،

$$Mgs = 0.40(9.81)(0.50) = 1.962 \text{ J},$$

ومن ثم

$$E_r = 0.009761 \text{ J} \simeq 9.8 \text{ mJ}.$$

الطاقة الدورانية هي

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

وبالتالي

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}}} = \frac{Mr^2}{I} = \frac{1}{200}.$$

وقيمتها العددية هي

$$E_{\text{rot}} = 1.95224 \text{ J}.$$

يقع المركز الآن على ارتفاع $h - s = 0.50 \text{ m}$ فوق الأرضية. وباتخاذ الأرضية مستوى الصفر لطاقة وضع الجاذبية،

$$U = Mg(h - s) = 1.962 \text{ J}.$$

إذن تكون النسبة بين الطاقات الثلاث الموجودة

$$E_r : E_{\text{rot}} : U = 1 : 200 : 201.$$

كانت الطاقة الابتدائية $Mgh = 3.924 \text{ J}$ ، ويكون التحقق من انحفاظ الطاقة كما يلي:

$$0.009761 + 1.952239 + 1.962 = 3.924 \text{ J}.$$

تساوي الطاقة الانتقالية $1/201$ من طاقة وضع الجاذبية المتحررة. وإذا كان المقصود بعبارة «الطاقة في أي صورة أخرى» مجموع الطاقة الدورانية وطاقة وضع الجاذبية المتبقيتين، فإن النسبة المقابلة هي

$$\frac{E_r}{E_{\text{rot}} + U} = \frac{1}{401}.$$

2.3

لتكن T قوة الشد في كل خيط، ولنعتبر التسارع a نحو الأسفل موجبًا. يعطي قانون نيوتن الثاني

$$Mg - 2T = Ma.$$

تولد قوتا الشد عزم الدوران

$$2Tr = I\alpha,$$

بينما يعطي شرط فك الالتفاف $a = r\alpha$. لذلك

$$2T = \frac{I}{r^2}a,$$

و

$$a = \frac{Mg}{M + I/r^2} = \frac{g}{201} = 0.0488 \text{ m s}^{-2}.$$

ينتج عن ذلك

$$T = \frac{M(g - a)}{2} = \frac{Mg}{2} \frac{200}{201} = 1.95224 \text{ N}.$$

تبقى قوة الشد هذه ثابتة أثناء الهبوط المستقيم. ويجب النظر على نحو منفصل في القوة الأكبر بكثير أثناء انعكاس اتجاه الحركة.

2.4

نفسر المسار المنحني في الشكل 19.6 بأنه انعكاس قصير لاتجاه الحركة يظل خلاله خط التلامس المار بالنقطة A ثابتاً، ويرسم المركز S نصف دائرة نصف قطرها r حوله. وهذه الهندسة المفروضة هي النموذج المثالي لانعكاس اتجاه الحركة المستخدم هنا.

لتكن ℓ مسافة الهبوط المستقيم قبل انعكاس اتجاه الحركة. عند الدخول،

$$\omega_0^2 = \frac{2Mg\ell}{J}.$$

نختار موضع S عند الدخول أصلاً للإحداثيات، مع توجيه x نحو اليمين و y نحو الأعلى. عندئذ تكون $A = (r, 0)$. ونعرّف Φ بحيث تزداد من 0 إلى π أثناء مرور المركز أسفل A . الإحداثيات هي

$$x = r(1 - \cos \Phi), \quad y = -r \sin \Phi.$$

وهي تحقق

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2, \quad y \leq 0.$$

بما أن هذه الحركة دوران حول A ،

$$\dot{\Phi} = \omega', \quad v = r\omega'.$$

عزم القصور الذاتي حول خط التلامس هو $J = I + Mr^2$. وقد هبط المركز مسافة إضافية $r \sin \Phi$ ، لذا يعطي انحفاظ الطاقة

$$\frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + Mgr \sin \Phi.$$

لذلك

$$\omega'(\Phi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2Mgr}{J} \sin \Phi} = \sqrt{\frac{4g(\ell + r \sin \Phi)}{R^2 + 2r^2}}.$$

باشتقاق الإحداثيات،

$$v_x = r\omega' \sin \Phi, \quad v_y = -r\omega' \cos \Phi.$$

ومن ثم

$$v(\Phi) = r\omega'(\Phi) = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell} \sin \Phi}, \quad v_0 = r\omega_0.$$

التسارع الزاوي، المفيد في حساب القوة، هو

$$\ddot{\Phi} = \frac{Mgr}{J} \cos \Phi.$$

يمكن تحديد الرسوم التقريبية المطلوبة على النحو الآتي:

مقدار السرعة	v_y	v_x	y	x	Φ
v_0	$-v_0$	0	0	0	0
$v_{\max}$	0	$v_{\max}$	$-r$	r	$\pi/2$
v_0	$+v_0$	0	0	$2r$	π

هنا

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}, \quad \omega'_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{r}{\ell}}.$$

يتألف المسار المكاني من هبوط رأسي، ونصف دائرة سفلي نصف قطره $r = 3.0 \text{ mm}$ ، وصعود رأسي مزاح أفقيًا بمقدار $2r = 6.0 \text{ mm}$. وبدلالة Φ ، تزداد x بسلسلة من 0 إلى $2r$ ، بينما تمثل y نصف موجة جيبية سالبة قيمتها الصغرى $-r$. ويشكل كل من v و ω' قوسًا متماثلاً، بقيمتين متساويتين عند الطرفين وقيمة عظمى عند $\pi/2$.

عند أدنى نقطة، تساوي مركبة السرعة الرأسية صفرًا، لكن مقدار السرعة يبلغ قيمته العظمى: ففي هذا النموذج نصف الدائري، يتحرك المركز حينئذ أفقيًا.

2.5

في منتصف مرحلة انعكاس اتجاه الحركة، يقع المركز مباشرة أسفل A . وينعدم تسارعه المماسي لأن $\cos \Phi = 0$ ، ويكون تسارعه رأسيًا نحو الأعلى:

$$a_{\text{bottom}} = \frac{v_{\max}^2}{r} = r\omega_{\max}'^2.$$

ولذلك تكون معادلة القوى الرأسية

$$2T_{\text{peak}} - Mg = Mr\omega_{\max}'^2.$$

باستخدام نتيجة 2.4،

$$\omega_{\max}'^2 = \frac{2Mg(\ell + r)}{J},$$

نحصل على

$$T_{\text{peak}} = \frac{Mg}{2} + \frac{M^2gr(\ell + r)}{J}.$$

أدنى نقطة هي بالفعل نقطة الحمل الأقصى الناشئ عن القيد في نموذج A الثابتة. للتحقق من ذلك، نضع

$$\epsilon = \frac{Mr^2}{J}, \quad b = \frac{r\omega_0^2}{g}, \quad u = \sin \Phi.$$

بتحليل قوة رد الفعل الكلية عند التلامس F إلى مركبتين شعاعية ومماسية، نحصل على

$$\frac{F^2}{M^2g^2} = b^2 + (1 - \epsilon)^2 + 2b(1 + 2\epsilon)u + 3\epsilon(2 + \epsilon)u^2.$$

جميع معاملات u و u^2 غير سالبة، لذا نتحقق القيمة العظمى عند $u = 1$ ، حيث تكون قوة رد الفعل رأسية ويتقاسمها الخيطان بالتساوي.

بمساواة قوة الشد القصوى في كل خيط بالقيمة T_m ،

$$2T_m = Mg + \frac{2M^2gr(\ell_{\max} + r)}{J}.$$

ومن ثم

$$\ell_{\max} = \frac{J(2T_m - Mg)}{2M^2gr} - r = \frac{R^2 + 2r^2}{4gr} \left(\frac{2T_m}{M} - g \right) - r.$$

عدديًا،

$$\ell_{\max} = \frac{0.060^2 + 2(0.0030)^2}{4(9.81)(0.0030)} \left(\frac{20}{0.40} - 9.81 \right) - 0.0030 = 1.2322 \text{ m.}$$

إذن الحد الذي تفرضه متانة الخيط هو تقريبًا

$$\ell_{\max} \simeq 1.2 \text{ m.}$$

يوجد أيضًا قيد هندسي تفرضه الأرضية. أثناء انعكاس اتجاه الحركة، يكون أدنى ارتفاع للمركز هو $h - \ell - r$. ولكي تبقى العجلة فوق الأرضية،

$$h - \ell - r \geq R,$$

ومن ثم

$$\ell \leq h - R - r = 0.937 \text{ m} \simeq 0.94 \text{ m.}$$

بتعويض هذا الطول في صيغة قوة الشد القصوى، نحصل على

$$T_{\text{peak}} = 8.08 \text{ N} < 10 \text{ N.}$$

وبالتالي، تحدّ الأرضية من طول الخيط المتاح لفك الالتفاف قبل بلوغ حدّ تحمّل الخيط.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 3: إعادة اتحاد الأيونات الموجبة والسالبة في غاز متأين

مقدمة

يتكون غاز من أيونات موجبة لعنصر ما (عند درجة حرارة مرتفعة) وإلكترونات. ينتمي الأيون الموجب إلى ذرة ذات عدد كتلي مجهول Z . ومن المعلوم أن هذا الأيون لا يحتوي إلا على إلكترون واحد في الغلاف (المدار).

لنرمز إلى هذا الأيون بالرمز $A^{(Z-1)+}$

الثوابت:

الثابت	القيمة
ثابت المجال الكهربائي	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$
الشحنة الأولية	$e = \pm 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
	$q^2 = \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} = 2,037 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}$
ثابت بلانك	$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
كتلة سكون الإلكترون	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
نصف قطر بور الذري	$r_B = \frac{\hbar}{m \cdot q^2} = 5,92 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
طاقة ريديرغ	$E_R = \frac{q^2}{2 \cdot r_B} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
كتلة سكون البروتون	$m_p \cdot c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}$

3.1

افترض أن الأيون الذي لم يتبق في غلافه سوى إلكترون واحد،
 $A^{(Z-1)+}$ ، في الحالة الأرضية.

في الحالة ذات أدنى طاقة، يُعطى مربع متوسط بُعد الإلكترون عن النواة، أي r^2 ، بمركبات على المحاور x و y و z هي $(\Delta x)^2$ و $(\Delta y)^2$ و $(\Delta z)^2$ على الترتيب، وتكون

$$r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

وكذلك يُعطى مربع متوسط الزخم بالعلاقة

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2,$$

حيث

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta y} \quad \text{و} \quad \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta z}.$$

اكتب متباينة تتضمن $(p_0)^2 \cdot (r_0)^2$ بصورتها الكاملة.

3.2

قد يلتقط الأيون الممثل بالرمز $A^{(Z-1)+}$ إلكترونًا إضافيًا، فيبعث نتيجة لذلك فوتونًا.

اكتب معادلة تُستخدم لحساب تردد الفوتون المنبعث.

3.3

احسب طاقة الأيون $A^{(Z-1)+}$ باستخدام قيمة أدنى طاقة. ينبغي إجراء الحساب بصورة تقريبية استنادًا إلى المبادئ الآتية:

A.3.3

ينبغي التعبير عن طاقة وضع الأيون بدلالة متوسط قيمة $\frac{1}{r}$.

(أي $\frac{1}{r_0}$ ؛ حيث إن r_0 معطى في المسألة).

B.3.3

عند حساب الطاقة الحركية للأيون، استخدم متوسط مربع الزخم المعطى في 3.1 بعد تبسيطه بالعلاقة

$$(p_0)^2 \cdot (r_0)^2 \approx (\hbar)^2$$

3.4

احسب طاقة الأيون $A^{(Z-2)+}$ ، المفترض أنه في الحالة الأرضية، مستخدمًا المبدأ نفسه المتبع في حساب طاقة $A^{(Z-1)+}$. إذا رُمز إلى متوسط بُعد كل من الإلكترونين في الغلاف الخارجي (على غرار r_0 المعطى في 3.3) بالرمزين r_1 و r_2 ، فافترض أن متوسط المسافة بين الإلكترونين يُعطى بالعلاقة $r_1 + r_2$ ، وأن متوسط مربع زخم كل إلكترون يخضع لمبدأ عدم اليقين، أي

$$p_1^2 \cdot r_1^2 \approx \hbar^2 \quad \text{و} \quad p_2^2 \cdot r_2^2 \approx \hbar^2$$

تلميح: استند من المعلومة التي تفيد بأن $r_1 = r_2$ في الحالة الأرضية.

3.5

اعتبر على وجه الخصوص أن الأيون $A^{(Z-2)+}$ ساكن وفي الحالة الأرضية عندما يلتقط إلكترونًا إضافيًا، وأن الإلكترون الملتقط ساكن أيضًا قبل الالتقاط. حدد القيمة العددية لـ Z ، إذا كان تردد الفوتون المنبعث المصاحب لالتقاط الإلكترون هو $2.057 \cdot 10^{17}$ rad/s. حدد العنصر الذي ينشأ منه الأيون.

الإجابات

نعرف مقياس الطاقة

$$\mathcal{R} = \frac{m_e(q^2)^2}{2\hbar^2}.$$

عند استخدام ثوابت متسقة، يكون هذا المقياس هو طاقة ريدبرغ E_R . أما الثوابت المطبوعة فغير متسقة، لذا نميز فيما يلي بين النتائج العددية المترتبة عليها.

3.1 •

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

3.2 •

$$\hbar\nu = \hbar\omega = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f,$$

حيث إن E_i, E_f هما الطاقتان الإلكترونيتان الداخليتان، والكميات K هي الطاقات الحركية الانتقالية.

3.3 •

$$E_1 = -Z^2 \mathcal{R} \quad (\text{بالصيغة المعتادة } -Z^2 E_R).$$

A.3.3 •

$$U_1(r_0) \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

B.3.3 •

$$T_1(r_0) \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}, \quad r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Z q^2}.$$

3.4 •

$$E_2 = -2 \left(Z - \frac{1}{4} \right)^2 \mathcal{R}, \quad r_1 = r_2 = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

3.5 • بالنسبة إلى الالتقاط المقصود لإلكترون ثانٍ،

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}$$

مع إهمال الارتداد لصغره. تعطي قيمة E_R المذكورة $Z = 3.673$ ؛ بينما تعطي القيم المطبوعة لـ $\hbar, m_e, q^2$ النتيجة $Z = 4.088$. وأقرب عدد صحيح إلى كليهما هو

$$Z = 4, \quad (\text{Be}).$$

هذا تحديد تقريبي ومشروط. فوفقاً للنص المطبوع، يصف الجزء 3.5 التقاط إلكترون ثالث لم تُحدد طاقته.

الحل

تقتضي حالات الشحنة وجود نواة شحنتها $+Ze$. نعدّ كتلتها كبيرة مقارنة بكتلة الإلكترون، ونهمل حركتها عند حساب الطاقات الإلكترونية، ونستخدم تعبيرات الطاقة الحركية غير النسبية للإلكترونات. ونُقاس طاقات الارتباط الإلكترونية بالنسبة إلى النواة والإلكترونات المنفصلة.

3.1

بتربيع متباينات عدم اليقين الثلاث وجمعها نحصل على

$$p_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right].$$

وبالضرب في r_0^2 المحدد في المسألة نحصل على التعبير الكامل

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \left[3 + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta z)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta z)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta z)^2} \right].$$

مجموع كل زوج من الحدين المتبادلين لا يقل عن 2، لأن $u + u^{-1} \geq 2$ عندما $u > 0$. ومن ثم

$$p_0^2 r_0^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2.$$

تتطلب المساواة تساوي مقادير عدم اليقين المكانية،

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z,$$

وتحقق حد المساواة في علاقات عدم اليقين للمركبات الثلاث جميعاً. ولا يكفي التناظر الكروي وحده لإثبات تحقق هذا الحد.

3.2

تفاعل الالتقاط الإشعاعي هو

$$A^{(Z-1)+} + e^- \longrightarrow A^{(Z-2)+} + \gamma.$$

لنرمز بـ E_i, E_f إلى الطاقتين الإلكترونيتين الداخليتين الابتدائية والنهائية. ولتكن K_i, K_e الطاقتين الحركيتين الابتدائيتين للأيون والإلكترون، و K_f الطاقة الحركية النهائية للأيون. يعطي حفظ الطاقة

$$E_i + K_i + K_e = E_f + K_f + \hbar\omega.$$

إذن

$$\hbar\omega = h\nu = E_i - E_f + K_i + K_e - K_f, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

تُختزل طاقات سكون النواة والإلكترونات المشتركة بين الطرفين. ويحدد حفظ الزخم ارتداد الأيون النهائي. وإذا أمكن إهمال الطاقات الحركية الابتدائية والارتداد، اختزلت العلاقة إلى

$$\hbar\omega \approx E_i - E_f.$$

3.3

نوجد الآن القيمة الصغرى للطاقة الإلكترونية الكلية التقريبية المطلوبة في المسألة.

A.3.3

طاقة وضع التجاذب الكولومبي هي

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Zq^2}{r}.$$

وباستخدام التقريب المحدد لقيمتها المتوقعة،

$$U_1 \approx -Zq^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \approx -\frac{Zq^2}{r_0}.$$

B.3.3

متوسط زخم الإلكترون يساوي صفرًا في الحالة الأرضية المستقرة، ولذلك يُمثَّل متوسط مربع زخمه بـ p_0^2 . ومن ثم يعطي التقدير المفروض

$$p_0^2 r_0^2 \approx \hbar^2$$

العلاقة

$$T_1 \approx \frac{p_0^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2}.$$

هذا استبدال خشن متعمد لنتيجة عدم اليقين؛ إذ يهمل المعامل العددي الوارد في 3.1، وليس مساواة مشتقة من ذلك الحد. وبناءً على ذلك، تكون الطاقة الكلية المقدرة

$$E_1(r_0) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} - \frac{Zq^2}{r_0}.$$

وتحقق نقطتها الساكنة

$$\frac{dE_1}{dr_0} = -\frac{\hbar^2}{m_e r_0^3} + \frac{Zq^2}{r_0^2} = 0,$$

مما يعطي

$$r_{0,\min} = \frac{\hbar^2}{m_e Zq^2}.$$

المشتقة الثانية عند هذه النقطة هي $\hbar^2/(m_e r_0^4) > 0$ ، لذا فهي نقطة قيمة صغرى. وبالتعويض نحصل على

$$T_{1,\min} = \frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2}, \quad U_{1,\min} = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{\hbar^2},$$

ومن ثم

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 (q^2)^2}{2\hbar^2} = -Z^2 \mathcal{R}.$$

عند استخدام ثابتي بور وريدبرغ المتسقين، تأخذ هذه النتائج الصيغتين المألوفتين

$$r_{0,\min} = \frac{r_B}{Z}, \quad E_1 = -Z^2 E_R.$$

3.4

لدينا الآن طاقتان حركيتان للإلكترونين، وحدان لتجاذب الإلكترونين مع النواة، وحد واحد للتنافر بين الإلكترونين. ووفقًا للتقريب المحدد للمسافة الفاصلة،

$$E_2(r_1, r_2) = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) - Zq^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{q^2}{r_1 + r_2}.$$

وباستخدام شرط الحالة الأرضية المعطى $r_1 = r_2 = r$

$$E_2(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2Zq^2}{r} + \frac{q^2}{2r} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r}.$$

يعطي إيجاد القيمة الصغرى

$$-\frac{2\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{2q^2(Z - \frac{1}{4})}{r^2} = 0,$$

ومن ثم

$$r = \frac{\hbar^2}{m_e q^2 (Z - \frac{1}{4})}.$$

عند نصف القطر هذا،

$$E_2 = -\frac{m_e (q^2)^2}{\hbar^2} \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 = -2\mathcal{R} \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2.$$

إذن، في هذا النموذج، يؤدي تناثر الإلكترونين إلى استبدال Z بالقيمة الفعالة $Z - \frac{1}{4}$ في طاقة الحالة الأرضية لكل إلكترون.

3.5

لربط هذا الجزء بالطاقتين المحسويتين في 3.3 و 3.4، يجب تفسير الالتقاط على أنه

$$A^{(Z-1)+} + e^- \longrightarrow A^{(Z-2)+} + \gamma.$$

أما حالة الشحنة المطبوعة حرفياً في 3.5 فتصف عملية مختلفة، هي التقاط إلكترون ثالث لا تُحسب طاقته في هذه المسألة.

بالنسبة إلى العملية المقصودة، تكون طاقة الارتباط المتحررة

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - E_2 \\ &= \left[2 \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 - Z^2 \right] \mathcal{R} \\ &= \left(Z^2 - Z + \frac{1}{8} \right) \mathcal{R}. \end{aligned}$$

على الرغم من سكون كلا الجسيمين الواردين، فلا بد أن يرتد الأيون النهائي. وإذا كانت كتلته M ، فإن حفظ الزخم يعطي

$$p_{\text{ion}} = p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

وبناءً على ذلك،

$$\Delta E = \hbar\omega + \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}.$$

التردد المعطى هو تردد زاوي، لذا تكون طاقة الفوتون

$$E_\gamma = \hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34})(2.057 \times 10^{17}) = \boxed{2.168 \times 10^{-17} \text{ J}}.$$

وباستخدام $Mc^2 \geq m_p c^2$ ، يكون التصحيح النسبي الناتج عن الارتداد محدوداً بالعلاقة

$$\frac{K_{\text{recoil}}}{E_\gamma} = \frac{E_\gamma}{2Mc^2} \leq \frac{2.168 \times 10^{-17}}{2(1.503 \times 10^{-10})} = 7.21 \times 10^{-8}.$$

ويمكن إهماله تماماً عند مستوى دقة المعطيات.

وعليه

$$Z^2 - Z + \frac{1}{8} = \frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}},$$

وجذر هذه المعادلة المقبول فيزيائياً هو

$$Z = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\mathcal{R}} + \frac{1}{8}}.$$

تؤدي الثوابت غير المتسقة إلى تقديرين عدديين:

القيمة المقدرة لـ Z	$\mathcal{R}$	الثوابت المستخدمة لمقياس الطاقة
3.673	$2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$	طاقة ريديبرغ المذكورة E_R
4.088	$1.701 \times 10^{-18} \text{ J}$	القيم المطبوعة لـ $q^2, m_e, \hbar$ ، من خلال $m_e(q^2)^2/(2\hbar^2)$

أقرب عدد صحيح إلى كلا التقديرين هو 4. وبناءً على ذلك، ووفق تفسير الالتقاط المقصود والنموذج التقريبي، يكون العنصر المستنتج هو

$$Z = 4, \text{ البيريليوم}$$

ويكون تفاعل الالتقاط



لا يتيح النص المعطى تحديداً دقيقاً ومتسقاً داخلياً لقيمة صحيحة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.