

IPhO 1987

理论题与解答 · 德意志民主共和国耶拿 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1987/

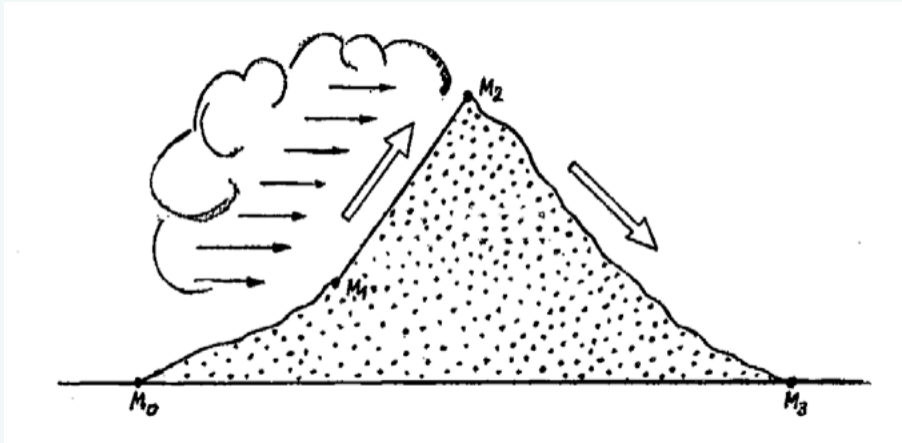
题目 1: 上升的湿空气

湿空气以绝热方式流过一条山脉，如图所示。

在气象站 M_0 和 M_3 测得的大气压相同，均为 100 kPa，而在气象站 M_2 测得的气压为 70 kPa。 M_0 处的空气温度为 20°C 。

空气上升时，在气压为 84.5 kPa 处开始形成云。

考虑一团沿山坡上升的湿空气，每平方米上方的空气质量为 2000 kg。这团湿空气经过 1500 秒后到达山脊（气象站 M_2 ）。在上升过程中，每千克空气中有 2.45 g 的水以雨的形式降下。



1. 求云底形成处 M_1 的温度 T_1 。
2. 假设大气密度随高度线性减小，云底（ M_1 处）相对于气象站 M_0 的高度 h_1 是多少？
3. 在山脊处测得的温度 T_2 是多少？
4. 假设 M_1 与 M_2 两点之间降雨均匀，求气流在 3 小时内产生的降水水柱高度（降水量）。
5. 在山脉背风面的气象站 M_3 测得的温度 T_3 是多少？讨论气象站 M_3 处的大气状态与气象站 M_0 处相比有何不同。

提示与数据

将大气视为理想气体。忽略水蒸气对比热容和大气密度的影响；同样忽略汽化比潜热随温度的变化。温度的计算精度要求为 1 K，云底高度的计算精度要求为 10 m，降水量的计算精度要求为 1 mm。

在所涉及的温度范围内，大气的比热容为：

$$c_p = 1005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

气象站 M_0 处，在 p_0 和 T_0 下的大气密度为：

$$\rho_0 = 1.189 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

云体内水的汽化比潜热为：

$$L_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$
$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1.4 \quad \text{且} \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

题目译自官方英文原文。

答案

1. $T_1 \approx 279 \text{ K}$, 即 6°C 。
2. $h_1 \approx 1410 \text{ m}$ 。
3. 在要求的精度下, $T_2 \approx 271 \text{ K}$, 即约 -2°C 。
4. 3 小时内的降水量约为 35 mm 。
5. $T_3 \approx 300 \text{ K}$, 即约 27°C 。空气比 M_0 处暖约 7 K , 且更加干燥：这就是焚风效应。

解答

热力学关系式中的所有温度均为绝对温度。令

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad \kappa = \frac{\chi - 1}{\chi} = \frac{2}{7}.$$

空气的比气体常数满足

$$R = c_p - c_v, \quad \frac{R}{c_p} = \kappa.$$

采用题目给出的近似, 即水不会显著改变空气的比热容或密度。凝结的水视为以雨的形式移出气团。

1. 开始形成云时的温度

在到达 M_1 之前, 不发生凝结。因此, 上升的空气虽然含有水蒸气, 仍遵循干绝热关系。

对于理想气体, 绝热变化过程中的热力学第一定律给出

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp.$$

因此,

$$\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}, \quad Tp^{-\kappa} = \text{常量}.$$

于是

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{84.5}{100} \right)^{2/7} = 279.38 \text{ K}.$$

因此,

$$\boxed{T_1 \approx 279 \text{ K} \approx 6^\circ\text{C}.$$

2. 云形成处的高度

首先求 M_1 处的密度。由 $p = \rho RT$,

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

因此

$$\rho_1 = 1.189 \left(\frac{84.5}{100} \right) \left(\frac{293.15}{279.38} \right) = 1.0542 \text{ kg m}^{-3}.$$

流体静力平衡要求

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

由于密度在 M_0 与 M_1 之间随高度线性减小, 其在这一高度区间内的平均值为

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

因此, 对流体静力学方程积分得到

$$p_0 - p_1 = g h_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

于是

$$h_1 = \frac{2(p_0 - p_1)}{g(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2(100000 - 84500)}{9.81(1.189 + 1.0542)} = 1408.7 \text{ m}.$$

按要求精确到 10 m,

$$\boxed{h_1 \approx 1410 \text{ m}.}$$

3. 山脊处的温度

在有云的上升过程中, 凝结释放潜热。虽然气团与周围环境没有热量交换, 但这种内部潜能的转化会减小其降温幅度。

每千克空气中凝结的水的质量为

$$\Delta r = 2.45 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

因此, 每千克空气中释放的潜热为

$$Q_\ell = L_v \Delta r = (2.500 \times 10^6)(2.45 \times 10^{-3}) = 6125 \text{ J kg}^{-1}.$$

若不发生凝结, 山脊处的温度将为

$$T_{2,\text{dry}} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{70}{100} \right)^{2/7} = 264.75 \text{ K}.$$

这些潜热对应的温升为

$$\frac{Q_\ell}{c_p} = \frac{6125}{1005} = 6.095 \text{ K}.$$

在最终气压下加上这一温升, 得到

$$T_2 \simeq T_{2,\text{dry}} + \frac{Q_\ell}{c_p} = 270.84 \text{ K}.$$

为检验这一近似是否满足规定的精度, 令 dr 为每千克空气中凝结水的质量增量。凝结过程中的热力学第一定律为

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = L_v dr.$$

乘以积分因子 $p^{-\kappa}$ 并积分, 得到

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa + \frac{L_v}{c_p} \int_0^{\Delta r} \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa dr.$$

凝结发生时的气压介于 p_1 与 p_2 之间, 因此

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa \leq \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa \leq 1.$$

因此,

$$270.52 \text{ K} \leq T_2 \leq 270.84 \text{ K}.$$

这一简单的潜热修正至多将 T_2 高估 0.32 K, 远小于允许的误差。因此

$$T_2 \approx 271 \text{ K} \quad (\text{约为 } -2^\circ\text{C}).$$

4. 3 小时内的降水量

每平方米所对应的空气质量为

$$\Sigma = 2000 \text{ kg m}^{-2}.$$

在题目所述的一个 1500 s 时间间隔内, 它产生的单位面积降雨质量为

$$\Sigma \Delta r = 2000(2.45 \times 10^{-3}) = 4.90 \text{ kg m}^{-2}.$$

因此, 对于稳定的气流, 在 3 h = 10800 s 内累积的降雨为

$$\frac{m_w}{A} = 4.90 \frac{10800}{1500} = 35.28 \text{ kg m}^{-2}.$$

取液态水通常的密度

$$\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3},$$

相应的水柱高度为

$$H = \frac{m_w/A}{\rho_w} = \frac{35.28}{1000} = 0.03528 \text{ m}.$$

降雨均匀意味着指定降雨区域内各处的降水量均相同:

$$H \approx 35 \text{ mm 在 3 小时内.}$$

5. M_3 处的温度和大气状况

凝结水以雨的形式移出气团后, 下降的空气因受压缩而升温, 变为未饱和状态。因此, 其下降过程是干绝热过程:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\kappa.$$

使用第 3 问中的近似值,

$$T_3 \simeq 270.84 \left(\frac{100}{70} \right)^{2/7} = 299.90 \text{ K}.$$

第 3 问中更精确的上下界给出

$$299.54 \text{ K} \leq T_3 \leq 299.90 \text{ K},$$

因此，凝结过程的具体情况所带来的不确定度仍小于 1 K。

所以

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \approx 27^\circ\text{C}.$$

与 M_0 处相比， M_3 处的空气：

- 温度高约 7 K；
- 每千克空气损失了 2.45 g 的水；
- 由于水分减少且温度升高，相对湿度更低。

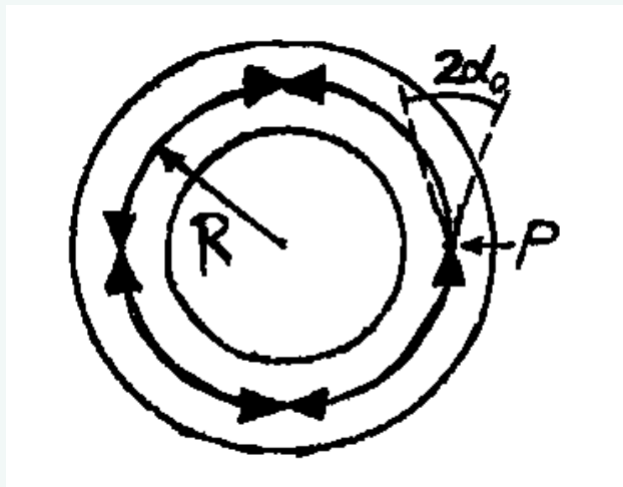
上升过程中释放的潜热减小了降温幅度，而已降下的雨水无法在下降过程中产生相应的蒸发冷却。由此形成温暖、干燥的下坡风，这就是**焚风效应**。

解答已与官方解答核对。

题目 2：磁场中的电子

由点源 P 发射的一束电子沿磁感线方向进入环形线圈（螺绕环）的磁场 $\vec{B}$ 。假设电子束的张角 $2 \cdot \alpha_0$ 很小 ($2 \cdot \alpha_0 \ll 1$)。电子在螺绕环的平均半径 R 处注入，加速电压为 V_0 。

忽略电子之间的任何相互作用。假设 $\vec{B}$ 的大小 B 为常量。



1. 为使电子在环形磁场中沿环运动，需要一个均匀的偏转磁场 $\vec{B}_1$ 。对于在环内沿半径为 R 的圆形轨道运动的电子，计算所需的 $\vec{B}_1$ 。

2. 确定 $\vec{B}$ 的大小，使电子束如图所示形成四个相隔 $\pi/2$ 的聚焦点。

注：考虑电子轨迹时，可以忽略磁场的弯曲。

3. 没有偏转磁场 $\vec{B}_1$ 时，电子束无法保持在螺绕环内，而会沿垂直于螺绕环平面的方向发生定向运动（漂移），从而离开螺绕环。

a) 证明电子相对于注入半径的径向偏移是有限的。

b) 确定漂移速度的方向。

注：可以忽略电子束的张角。使用能量守恒定律和角动量守恒定律。

数据：

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad V_0 = 3 \text{ kV}; \quad R = 50 \text{ mm}$$

题目译自官方英文原文。

答案

令 $e > 0$ 表示电子电荷量的绝对值。取 $\hat{\phi}$ 沿注入电子束和环形磁场的方向，并定义 $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\phi}$ ；对于图示的注入方向， $\hat{z}$ 指向纸面外。

- 1. 均匀偏转磁场垂直于螺绕环平面：

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T } \hat{z}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

- 2. 在规定的近似下，

$$B = \frac{4mv_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

- 3(a). 径向偏移有界：

$$0 \leq r - R \leq \frac{mv_0}{eB}.$$

对于第 2 问中的磁场，该上界为 12.5 mm。在 B 为常量的模型中，实际最大偏移为 5.37 mm。

- 3(b). 漂移方向指向纸面内，与第 1 问中所需的偏转磁场方向相反：

$$\vec{v}_{\text{drift}} \parallel -\hat{z}.$$

解答

1. 偏转磁场

根据非相对论力学，电子经电压 V_0 加速后有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0,$$

因此

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{e}{m} \right) V_0} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11})(3.00 \times 10^3)} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

对于沿圆形轨道运动的参考电子，其速度与环形磁场平行。因此，该磁场对这个电子不产生作用力。

偏转磁场必须提供指向圆心的向心力。当 $\vec{B}_1 = B_1 \hat{z}$ 时，电子所受的洛伦兹力为

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_1 = -ev_0 B_1 \hat{r},$$

在圆周上各处都指向圆心。因此

$$ev_0 B_1 = \frac{mv_0^2}{R}.$$

所以

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{\mathbf{z}},$$

其大小为

$$B_1 = \frac{3.2496 \times 10^7}{(1.76 \times 10^{11})(0.050)} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

所需的磁场是均匀磁场，方向垂直于图面向外。

2. 四个聚焦点

本问按题目要求忽略引导磁场的弯曲。在局部，电子绕磁场方向做螺旋运动。若其初速度与磁场的夹角为 α ，则

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \simeq v_0, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_0 \alpha.$$

横向运动的回旋角频率和周期为

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

虽然回旋半径取决于 α ，但周期与其无关。完成一整圈回旋后，每个电子都回到各自的初始横向位置。

因此，保留小张角的一阶项时，沿电子束方向到下一个焦点的距离为

$$\ell = v_{\parallel} T \simeq v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

$v_{\parallel}$ 的差异仅在 α^2 阶出现，在此忽略。

四个等间隔聚焦点要求

$$\ell = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

令这两个距离相等，得到

$$\frac{2\pi m v_0}{eB} = \frac{\pi R}{2},$$

所以

$$B = \frac{4m v_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

电子束依次在方位角增加 $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ 时重新聚焦；最后一个聚焦点与 P 重合。因此，沿螺绕环共有四个不同的聚焦位置，包括 P。

3(a). 无偏转磁场时的有限径向偏移

现在撤去 $\vec{B}_1$ ，并忽略电子束的张角。以螺绕环的对称轴为轴建立柱坐标系：

$$\vec{B} = B\hat{\phi}, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}.$$

初始时，

$$r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad r\dot{\phi} = v_0.$$

磁场不做功，因此速率保持不变：

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad (1)$$

磁场力没有方位角方向的分量。因此，关于对称轴的角动量守恒：

$$mr^2 \dot{\phi} = mRv_0, \quad r \dot{\phi} = \frac{Rv_0}{r}. \quad (2)$$

由于方位角方向的速率不可能超过总速率，由式 (2) 立即得到

$$r \geq R. \quad (3)$$

为求得上界，利用洛伦兹力的轴向分量：

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = eB\dot{z}\hat{r} - eB\dot{r}\hat{z}.$$

因此

$$m\ddot{z} = -eB\dot{r}.$$

由于 B 为常量，积分并代入初始条件，得到

$$\dot{z} = -\frac{eB}{m}(r - R) = -\omega(r - R). \quad (4)$$

将式 (2) 和式 (4) 代入能量守恒关系，得到

$$\boxed{\dot{r}^2 + \frac{R^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2 (r - R)^2 = v_0^2.} \quad (5)$$

左边每一项都非负。因此，

$$\omega^2 (r - R)^2 \leq v_0^2.$$

结合式 (3)，便证明了

$$\boxed{0 \leq r - R \leq \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}.}$$

对于第 2 问求得的磁场， $\omega = 4v_0/R$ ，从而得到有限的上界

$$r - R \leq \frac{R}{4} = 12.5 \text{ mm}.$$

式 (5) 还可以给出实际的外侧转向点。令 $\dot{r} = 0$ ，并记 $x = (r - R)/R$ 。于是

$$16x^2 + \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

除初始转向点 $x = 0$ 外，正根满足

$$16x(1+x)^2 = x + 2,$$

解得

$$x = 0.107403, \quad \boxed{r_{\max} - R = 5.37 \text{ mm}.}$$

3(b). 漂移方向

由式 (3) 和式 (4) 得

$$\dot{z} = -\omega(r - R) \leq 0.$$

因此，轴向速度绝不会指向 $+\hat{z}$ 方向。

电子确实会离开 $r = R$ 的位置：初始时，速度与 $\vec{B}$ 平行，因而磁场力为零，径向运动方程给出

$$\ddot{r}(0) = \frac{v_0^2}{R} > 0.$$

因此，注入后不久便有 $r > R$ 且 $\dot{z} < 0$ 。当径向运动在两个转向点之间振荡时，轴向位移持续向负方向累积：

$$\langle \dot{z} \rangle = -\omega \langle r - R \rangle < 0.$$

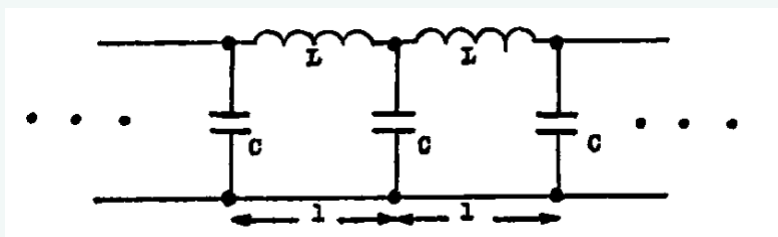
所以，定向漂移的方向为

指向纸面内，方向相反于 $\vec{B}_1$ 。

解答已与官方解答核对。

题目 3：无限 LC 梯形网络

当正弦波在无限 LC 梯形网络中传播时（见下图），相邻两个电容器两端交流电压的相位相差 Φ 。



- 确定 Φ 与 ω 、 L 和 C 的关系（ ω 为正弦波的角频率）。
- 若每个单元的长度为 l ，求波的传播速度。
- 说明在什么条件下波的传播速度几乎与 ω 无关。求此时的速度。
- 提出一个与上述电路相类比的简单力学模型，并推导方程以证明该模型的合理性。

公式：

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 色散关系为

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

取主值范围内的相位滞后 $0 \leq \Phi \leq \pi$,

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

相位滞后为实数要求 $0 \leq \omega \leq \omega_c = 2/\sqrt{LC}$ 。

- b) 正弦波的相速度为

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin \left(\omega \sqrt{LC}/2 \right)}.$$

为完整起见, 窄频带波包的群速度为

$$v_g = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

- c) 当 $\omega \sqrt{LC} \ll 1$, 即 $\Phi \ll 1$ 时, 传播速度近似与频率无关:

$$v_{\text{ph}} \simeq v_g \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

- d) 由质量均为 m 、间距为 ℓ 的相同质点组成的无限长链, 相邻质点由劲度系数为 κ 的相同无质量弹簧连接, 可作为类比模型。其方程

$$m \ddot{x}_n = \kappa (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

与电路方程

$$L \ddot{q}_n = \frac{1}{C} (q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

相对应, 其中 $\dot{q}_n$ 为流过第 n 个电感器的电流。因此, 对应关系为 $m \leftrightarrow L$ 、 $\kappa \leftrightarrow 1/C$ 。

解答

假设电感器和电容器均为理想元件, 各电感器彼此相同, 各电容器也彼此相同, 且电阻可忽略不计。用整数 n 对电容器编号。设 $u_n(t)$ 为电容器 n 两端的电压, $i_n(t)$ 为从节点 n 经电感器流向节点 $n+1$ 的电流。

a)

在节点 n 处应用基尔霍夫电流定律, 得

$$C \frac{du_n}{dt} = i_{n-1} - i_n.$$

每个电感器的电压与电流关系给出

$$L \frac{di_n}{dt} = u_n - u_{n+1}.$$

对第一个方程求导，并代入电感器的关系式，得

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = (u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1}),$$

因此

$$LC \ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}.$$

对于每经过一个单元相位滞后 Φ 的正弦行波，可写为

$$u_n(t) = U \cos(\omega t - n\Phi).$$

相邻电容器的电压满足

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \cos \Phi,$$

同时 $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ 。因此

$$-\omega^2 LC = 2 \cos \Phi - 2,$$

即

$$\cos \Phi = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}.$$

利用 $1 - \cos \Phi = 2 \sin^2(\Phi/2)$ ，得

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

在主值分支上，

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

将传播方向反转，相位滞后的符号也随之反转。

由于 $\sin^2(\Phi/2) \leq 1$ ，相位差为实数的行波模式仅可能存在于以下截止频率所限定的频带内：

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

高于此截止频率时，不存在 Φ 为实数的传播模式。

b)

相位保持不变时满足

$$\omega t - n\Phi = \text{常数}.$$

因此，同一相位前进一个单元所需的时间为

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}.$$

由于单元长度为 ℓ ，相速度为

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}.$$

等价地，波数为 $k = \Phi/\ell$ ，且 $v_{\text{ph}} = \omega/k$ 。

题目指定的是正弦波，因此所求速度就是这一相速度。若改为考察窄频带波包的包络，其速度则为群速度。由

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\ell}{2}, \quad 0 \leq k\ell \leq \pi,$$

可得

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

在截止频率处，相邻电容器的电压反相振荡，即 $\Phi = \pi$ ，群速度为零。

c)

当一个单元两端的相位变化很小时，

$$\Phi \ll 1,$$

可以使用近似

$$\sin \frac{\Phi}{2} \simeq \frac{\Phi}{2}.$$

色散关系于是变为

$$\omega^2 LC \simeq \Phi^2, \quad \Phi \simeq \omega \sqrt{LC}.$$

因此，所要求的频率条件为

$$\omega \sqrt{LC} \ll 1,$$

且

$$v_{\text{ph}} \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

群速度也有相同的极限。从物理上看，这对应于长波长情形：一个波长内包含许多单元，因此这一离散网络近似表现为连续传输线。

例如，相速度的最低阶修正为

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{24} + O((\omega^2 LC)^2) \right].$$

因此，在上述条件下，其对频率的依赖很弱。由于 LC 的单位为 s^2 ， $\ell/\sqrt{LC}$ 具有速度的单位。

d)

考虑由质量均为 m 的相同质点组成的无限长直链，质点在平衡时的间距为 ℓ 。将每对相邻质点用劲度系数为 κ 的无质量弹簧连接。质点沿纵向无摩擦地运动，弹簧遵循胡克定律。

设 $x_n(t)$ 为质点 n 相对平衡位置的位移。右侧弹簧施加的力为

$$\kappa(x_{n+1} - x_n),$$

左侧弹簧施加的力为

$$-\kappa(x_n - x_{n-1}).$$

因此, 牛顿第二定律给出

$$\boxed{m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})}.$$

为建立与电路的直接对应关系, 定义 $q_n(t)$ 为通过电感器 n 的电荷量, 从而

$$i_n = \dot{q}_n.$$

各物理量均取相对于平衡状态的变化量, 由电容器 n 处的电荷守恒可得

$$Cu_n = q_{n-1} - q_n.$$

电感器方程于是变为

$$L\ddot{q}_n = u_n - u_{n+1} = \frac{q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}}{C}.$$

因此

$$\boxed{L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1})},$$

在以下对应关系下, 该方程与力学方程的形式完全相同:

$$\boxed{x_n \leftrightarrow q_n, \quad m \leftrightarrow L, \quad \kappa \leftrightarrow \frac{1}{C}}.$$

能量表达式进一步证实了这一对应关系:

$$E_{\text{LC}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} L \dot{q}_n^2 + \frac{(q_{n-1} - q_n)^2}{2C} \right],$$
$$E_{\text{mech}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_{n-1} - x_n)^2 \right].$$

电感器储存的能量对应于动能, 电容器储存的能量对应于弹性势能。

最后, 将 $x_n = A \cos(\omega t - n\Phi)$ 代入力学方程, 得

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

当 $\kappa/m = 1/(LC)$ 时, 这与 LC 电路的色散关系完全相同。

解答已与官方解答核对。