

IPhO 1987

Teorik sorular ve çözümler · Jena, Demokratik Alman Cumhuriyeti · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1987/

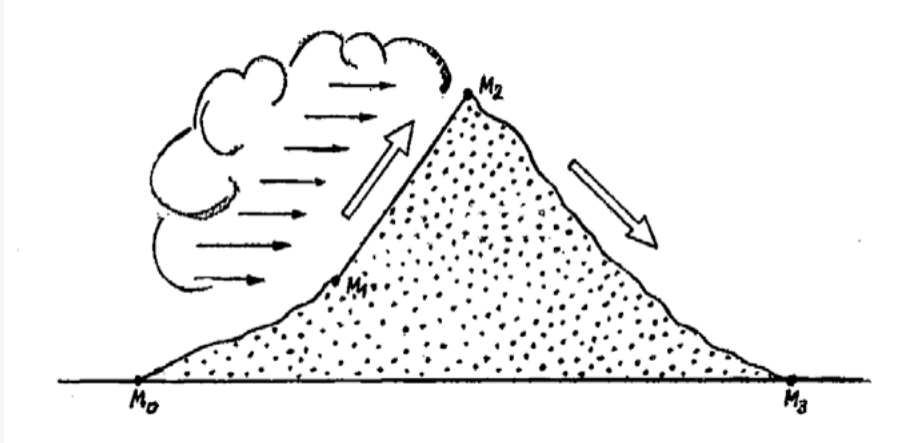
Soru 1: Yükselen nemli hava

Nemli hava, şekilde gösterildiği gibi bir sıradağın üzerinden adyabatik olarak akmaktadır.

M_0 ve M_3 meteoroloji istasyonlarında birbirine eşit ve 100 kPa değerinde atmosfer basınçları, M_2 istasyonunda ise 70 kPa basınç ölçülmektedir. M_0 'daki havanın sıcaklığı 20°C 'dir.

Hava yükselirken 84.5 kPa basınçta bulut oluşumu başlar.

Dağ boyunca yükselen ve her metrekare üzerinde 2000 kg kütleyle sahip bir miktar nemli havayı ele alın. Bu nemli hava 1500 saniye sonra dağ sırtına (M_2 istasyonuna) ulaşır. Bu yükseliş sırasında havanın her kilogramı başına 2.45 g su yağmur olarak düşer.



1. Bulut tabanının oluştuğu M_1 'deki T_1 sıcaklığını belirleyin.
2. Atmosfer yoğunluğunun doğrusal olarak azaldığını varsayarak bulut tabanının (M_1 'de) M_0 istasyonuna göre h_1 yüksekliğini bulun.
3. Sıradağın sırtında hangi T_2 sıcaklığı ölçülür?
4. M_1 ve M_2 noktaları arasında yağışın homojen olduğunu varsayarak hava akımının 3 saatte oluşturduğu yağışa karşılık gelen su sütununun yüksekliğini (yağış yüksekliğini) belirleyin.
5. Sıradağın arka tarafındaki M_3 istasyonunda hangi T_3 sıcaklığı ölçülür? M_3 istasyonundaki atmosferin durumunu M_0 istasyonundakiyle karşılaştırarak tartışın.

İpuçları ve Veriler

Atmosfer ideal gaz olarak ele alınacaktır. Su buharının özgül ısı kapasitesi ve atmosfer yoğunluğu üzerindeki etkileri ihmal edilecektir; aynı şekilde özgül buharlaşma gizli ısısının sıcaklığa bağımlılığı da ihmal edilecektir. Sıcaklıklar 1 K, bulut tabanının yüksekliği 10 m ve yağış yüksekliği 1 mm

doğrulukla belirlenecektir.

İlgili sıcaklık aralığında atmosferin özgül ısı kapasitesi:

$$c_p = 1005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

M_0 istasyonundaki p_0 ve T_0 için atmosfer yoğunluğu:

$$\rho_0 = 1.189 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Bulut hacmi içindeki suyun özgül buharlaşma gizli ısı:

$$L_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1.4 \quad \text{ve} \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. $T_1 \approx 279 \text{ K}$, yani 6°C .
2. $h_1 \approx 1410 \text{ m}$.
3. İstenen doğrulukla $T_2 \approx 271 \text{ K}$, yani yaklaşık -2°C .
4. 3 saatteki yağış yüksekliği yaklaşık 35 mm 'dir.
5. $T_3 \approx 300 \text{ K}$, yani yaklaşık 27°C . Hava, M_0 'dakinden yaklaşık 7 K daha sıcak ve daha kurudur: **fön etkisi**.

Çözüm

Termodinamik bağıntılardaki tüm sıcaklıklar mutlak sıcaklıklardır. Şu tanımları yapalım:

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad \kappa = \frac{\chi - 1}{\chi} = \frac{2}{7}.$$

Havanın özgül gaz sabiti şu bağıntıları sağlar:

$$R = c_p - c_v, \quad \frac{R}{c_p} = \kappa.$$

Suyun, havanın ısı kapasitelerini veya yoğunluğunu kayda değer ölçüde değiştirmedeği yönündeki verilen yaklaşımı kullanıyoruz. Yoğuşan suyun yağmur olarak ortamdan uzaklaştığı kabul edilir.

1. Bulut oluşumunun başlangıcındaki sıcaklık

M_1 'e ulaşılmadan önce yoğuşma gerçekleşmez. Bu nedenle yükselen hava, su buharı içermesine rağmen kuru adyabatik bağıntıya uyar.

İdeal bir gaz için termodinamiğin birinci yasası, adyabatik bir değişimde şu bağıntıyı verir:

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}, \quad Tp^{-\kappa} = \text{sabit}.$$

Böylece

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{84.5}{100} \right)^{2/7} = 279.38 \text{ K.}$$

O hâlde,

$$\boxed{T_1 \approx 279 \text{ K} \approx 6^\circ \text{C.}}$$

2. Bulut oluşum seviyesinin yüksekliği

Önce M_1 'deki yoğunluğu belirleyelim. $p = \rho RT$ bağıntısından,

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

Buna göre

$$\rho_1 = 1.189 \left(\frac{84.5}{100} \right) \left(\frac{293.15}{279.38} \right) = 1.0542 \text{ kg m}^{-3}.$$

Hidrostatik denge şu koşulu gerektirir:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

Yoğunluk M_0 ile M_1 arasında doğrusal olarak azaldığından, bu yükseklik aralığındaki ortalaması

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Bu nedenle hidrostatik denklemin integrali alındığında

$$p_0 - p_1 = g h_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Böylece

$$h_1 = \frac{2(p_0 - p_1)}{g(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2(100000 - 84500)}{9.81(1.189 + 1.0542)} = 1408.7 \text{ m.}$$

İstenen 10 m doğrulukla,

$$\boxed{h_1 \approx 1410 \text{ m.}}$$

3. Dağ sırtındaki sıcaklık

Bulutlu yükseliş sırasında yoğuşma gizli ısı açığa çıkarır. Hava parseli çevresiyle ısı alışverişi yapmasa da gizli enerjinin bu iç dönüşümü soğumayı azaltır.

Havanın her kilogramı başına yoğuşan kütle

$$\Delta r = 2.45 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

olduğundan, havanın her kilogramı başına açığa çıkan gizli enerji

$$Q_\ell = L_v \Delta r = (2.500 \times 10^6)(2.45 \times 10^{-3}) = 6125 \text{ J kg}^{-1}.$$

Yoğuşma olmasaydı dağ sırtındaki sıcaklık

$$T_{2,\text{dry}} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{70}{100} \right)^{2/7} = 264.75 \text{ K.}$$

Gizli enerji şu sıcaklık artışına karşılık gelir:

$$\frac{Q_\ell}{c_p} = \frac{6125}{1005} = 6.095 \text{ K}.$$

Bu artış son basınçta eklendiğinde

$$T_2 \simeq T_{2,\text{dry}} + \frac{Q_\ell}{c_p} = 270.84 \text{ K}.$$

Bu yaklaşımın belirtilen doğruluğu sağladığını kontrol etmek için dr , havanın her kilogramı başına yoğuşan su miktarındaki artış olsun. Yoğuşma sırasında birinci yasa

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = L_v dr.$$

$p^{-\kappa}$ integral çarpanıyla çarpıp integral alınırsa

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa + \frac{L_v}{c_p} \int_0^{\Delta r} \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa dr.$$

Yoğuşma p_1 ile p_2 arasındaki basınçlarda gerçekleştiğinden

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa \leq \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa \leq 1.$$

Dolayısıyla,

$$270.52 \text{ K} \leq T_2 \leq 270.84 \text{ K}.$$

Basit gizli ısı düzeltmesi, T_2 'yi en fazla 0.32 K fazla tahmin eder; bu fark istenen doğruluk sınırının oldukça içindedir. Böylece

$$T_2 \approx 271 \text{ K} \quad (\text{yaklaşık } -2^\circ\text{C}).$$

4. 3 saatteki yağış yüksekliği

Her metrekareye karşılık gelen hava kütlesi

$$\Sigma = 2000 \text{ kg m}^{-2}.$$

Belirtilen 1500 s'lik bir zaman aralığında bu hava, birim alan başına şu yağmur kütlesini sağlar:

$$\Sigma \Delta r = 2000(2.45 \times 10^{-3}) = 4.90 \text{ kg m}^{-2}.$$

Dolayısıyla kararlı akış için 3 h = 10800 s süresince biriken yağmur miktarı

$$\frac{m_w}{A} = 4.90 \frac{10800}{1500} = 35.28 \text{ kg m}^{-2}.$$

Sıvı suyun alışılmış yoğunluğu olan

$$\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3},$$

kullanıldığında, buna karşılık gelen su sütunu yüksekliği

$$H = \frac{m_w/A}{\rho_w} = \frac{35.28}{1000} = 0.03528 \text{ m}.$$

Yağışın homojen olması, belirtilen yağış bölgesinin tamamında aynı yağış yüksekliğini verir:

$$H \approx 35 \text{ mm 3 saatte.}$$

5. M_3 'teki sıcaklık ve atmosfer koşulları

Yoğuşan su yağmur olarak uzaklaştığından, alçalan hava sıkışma sonucu sıcaklığı arttıkça doymamış hâle gelir. Bu nedenle alçılması kuru adyabatiktir:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\kappa.$$

3. kısımdaki yaklaşım kullanılırsa,

$$T_3 \simeq 270.84 \left(\frac{100}{70} \right)^{2/7} = 299.90 \text{ K}.$$

4. kısımdaki daha hassas sınırlar

$$299.54 \text{ K} \leq T_3 \leq 299.90 \text{ K},$$

sonucunu verdiğiinden, yoğuşmanın nasıl gerçekleştiğinden kaynaklanan belirsizlik 1 K'in altında kalır.

Buna göre

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \approx 27^\circ\text{C}.$$

M_0 'dakiyle karşılaştırıldığında M_3 'teki hava:

- yaklaşık 7 K daha sıcaktır;
- havanın her kilogramı başına 2.45 g su kaybetmiştir;
- hem su kaybı hem de daha yüksek sıcaklığı nedeniyle daha düşük bağıl neme sahiptir.

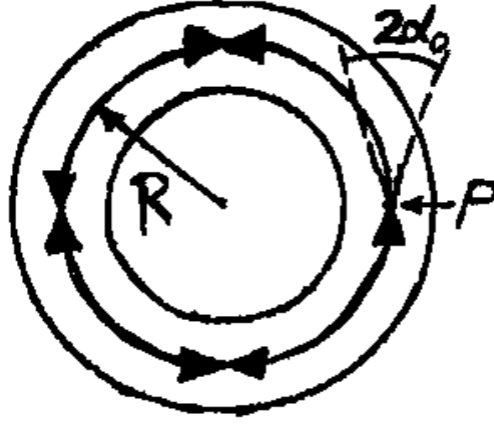
Yükseliş sırasında açığa çıkan gizli ısı soğumayı azaltırken, ortamdan uzaklaşan yağmur alçalış sırasında buna karşılık gelen buharlaşma kaynaklı soğumayı sağlayamaz. Bunun sonucunda oluşan sıcak ve kuru alçalıcı rüzgâr **fön etkisi**dir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Manyetik alanda elektronlar

Noktasal bir P kaynağından yayılan bir elektron demeti, toroidal bir bobinin (toroidin) $\vec{B}$ manyetik alanına alan çizgileri doğrultusunda girer. Demetin açıklık açısının $2 \cdot \alpha_0$ küçük olduğu varsayılmaktadır ($2 \cdot \alpha_0 \ll 1$). Elektronlar, V_0 hızlandırma gerilimiyle toroidin ortalama yarıçapı R üzerinde içeri gönderilir.

Elektronlar arasındaki tüm etkileşimleri ihmal edin. $\vec{B}$ 'nin büyüklüğü B'nin sabit olduğu varsayılmaktadır.



1. Elektronu toroidal alanda yönlendirmek için düzgün bir $\vec{B}_1$ manyetik saptırma alanı gereklidir. Toroid içinde R yarıçaplı dairesel bir yörüngede hareket eden bir elektron için $\vec{B}_1$ 'i hesaplayın.
2. Şekilde gösterildiği gibi aralarında $\pi/2$ açısal uzaklık bulunan dört odaklanma noktası sağlayan $\vec{B}$ 'nin değerini belirleyin.

Not: Elektronların yörüngelerini incelerken manyetik alanın eğriliğini göz ardı edebilirsiniz.

3. Elektron demeti, bir $\vec{B}_1$ saptırma alanı olmadan toroid içinde kalamaz; toroid düzlemine dik, sistematik bir hareketle (sürüklenme) toroidin dışına çıkar.

a) Elektronların giriş yarıçapından radyal sapmasının sonlu olduğunu gösterin.

b) Sürüklenme hızının yönünü belirleyin.

Not: Elektron demetinin açıklık açısı ihmal edilebilir. Enerjinin ve açısal momentumun korunumu yasalarını kullanın.

Veriler:

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad V_0 = 3 \text{ kV}; \quad R = 50 \text{ mm}$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$e > 0$, elektronun yükünün büyüklüğünü göstereceksin. $\hat{\phi}$ yönünü, içeri gönderilen demet ve toroidal alan boyunca al ve $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\phi}$ olarak tanımla; gösterilen giriş yönü için bu vektör sayfa düzleminden dışarı doğrudur.

- 1. Düzgün saptırma alanı toroid düzlemine diktir:

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T } \hat{z}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

- 2. Belirtilen yaklaşımda,

$$B = \frac{4mv_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

- 3(a). Radyal sapma sınırlıdır:

$$0 \leq r - R \leq \frac{mv_0}{eB}.$$

2. kısımdaki alan için bu sınır 12.5 mm'dir. Sabit B modelinde gerçek maksimum sapma 5.37 mm'dir.

- 3(b). Sürüklenme, 1. kısımda gereken saptırma alanının ters yönünde, **sayfa düzleminin içine doğrudur**:

$$\vec{v}_{\text{drift}} \parallel -\hat{\mathbf{z}}.$$

Çözüm

1. Saptırma alanı

Görelili olmayan mekanik kullanıldığında, V_0 gerilimi altında hızlandırma

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0,$$

bağıntısını verir; buradan

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{e}{m} \right) V_0} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11})(3.00 \times 10^3)} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Dairesel yörüngedeki referans elektronun hızı toroidal alana paraleldir. Dolayısıyla bu alan, söz konusu elektrona kuvvet uygulamaz.

Saptırma alanı, içeri yönelen merkezci kuvveti sağlamalıdır. $\vec{B}_1 = B_1 \hat{\mathbf{z}}$ için elektrona etki eden Lorentz kuvveti

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_1 = -ev_0 B_1 \hat{\mathbf{r}},$$

olup çemberin her noktasında içeri yönelir. Dolayısıyla

$$ev_0 B_1 = \frac{mv_0^2}{R}.$$

Böylece

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{\mathbf{z}},$$

ve büyüklüğü

$$B_1 = \frac{3.2496 \times 10^7}{(1.76 \times 10^{11})(0.050)} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

Gereken alan düzgündür ve şeklin düzleminden dışarı doğru yönelir.

2. Dört odaklanma noktası

Bu kısımda, belirtildiği üzere yönlendirici alanın eğriliğini ihmal edin. Yerel olarak bir elektron, alan doğrultusu etrafında helisel bir yörünge izler. Başlangıçta alanla yaptığı açı α ise

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \simeq v_0, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_0 \alpha.$$

Enine hareketin siklotron açısal frekansı ve periyodu

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Dönme yarıçapı α 'ya bağlı olsa da periyot bağlı değildir. Bir tam dönmenin ardından her elektron başlangıçtaki enine konumuna geri döner.

Dolayısıyla demet boyunca bir sonraki odağa olan uzaklık, küçük açıklık açısında birinci mertebeye kadar,

$$\ell = v_{\parallel} T \simeq v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

$v_{\parallel}$ 'deki farklar yalnızca ihmal edilen α^2 mertebesinde ortaya çıkar.

Eşit aralıklı dört odaklanma noktası için

$$\ell = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Bu uzaklıklar eşitlendiğinde

$$\frac{2\pi m v_0}{eB} = \frac{\pi R}{2},$$

dolayısıyla

$$B = \frac{4m v_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

Ardışık yeniden odaklanmalar, azimut açısındaki ilerleme $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ olduğunda gerçekleşir; sonuncusu P ile çakışır. Böylece toroid boyunca, P dahil, dört farklı odaklanma konumu bulunur.

3(a). Saptırma alanı olmadan sonlu radyal sapma

Şimdi $\vec{B}_1$ 'i kaldırın ve demetin açıklık açısını ihmal edin. Toroidin simetri eksenini etrafında silindirik koordinatları kullanın:

$$\vec{B} = B\hat{\phi}, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}.$$

Başlangıçta,

$$r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad r\dot{\phi} = v_0.$$

Manyetik alan iş yapmadığından sürat sabit kalır:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad (1)$$

Manyetik kuvvetin azimut doğrultusunda bileşeni yoktur. Bu nedenle simetri eksenine göre açısal momentum korunur:

$$mr^2\dot{\phi} = mRv_0, \quad r\dot{\phi} = \frac{Rv_0}{r}. \quad (2)$$

Azimut doğrultusundaki sürat toplam sürati aşamayacağından, denklem (2) doğrudan

$$r \geq R. \quad (3)$$

sonucunu verir.

Bir üst sınır elde etmek için Lorentz kuvvetinin eksenel bileşenini kullanın:

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = eB\dot{z}\hat{r} - eB\dot{r}\hat{z}.$$

Dolayısıyla

$$m\ddot{z} = -eB\dot{r}.$$

B sabit olduğundan, başlangıç koşulları kullanılarak integral alındığında

$$\dot{z} = -\frac{eB}{m}(r - R) = -\omega(r - R). \quad (4)$$

Denklem (2) ve (4) enerjinin korunumu bağıntısında yerine konulduğunda

$$\dot{r}^2 + \frac{R^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2(r - R)^2 = v_0^2. \quad (5)$$

Sol taraftaki her terim sıfır ya da pozitifdir. Sonuç olarak,

$$\omega^2(r - R)^2 \leq v_0^2.$$

Denklem (3) ile birlikte bu,

$$0 \leq r - R \leq \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}.$$

eşitsizliğini kanıtlar.

2. kısımda bulunan alan için $\omega = 4v_0/R$ olduğundan sonlu sınır

$$r - R \leq \frac{R}{4} = 12.5 \text{ mm}.$$

Denklem (5), gerçek dış dönüm noktasını da verir. $\dot{r} = 0$ alın ve $x = (r - R)/R$ yazın. Bu durumda

$$16x^2 + \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

Başlangıçtaki $x = 0$ dönüm noktasının yanı sıra, pozitif kök

$$16x(1+x)^2 = x + 2,$$

bağıntısını sağlar ve buradan

$$x = 0.107403, \quad r_{\max} - R = 5.37 \text{ mm}.$$

3(b). Sürüklenmenin yönü

Denklem (3) ve (4),

$$\dot{z} = -\omega(r - R) \leq 0.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla eksenel hız hiçbir zaman $+\hat{z}$ yönünde değildir.

Hareket gerçekten de $r = R$ 'den uzaklaşır: başlangıçta hız $\vec{B}$ 'ye paralel olduğundan manyetik kuvvet sıfırdır ve radyal hareket denklemi

$$\ddot{r}(0) = \frac{v_0^2}{R} > 0.$$

sonucunu verir. Bu nedenle girişten kısa bir süre sonra $r > R$ ve $\dot{z} < 0$ olur. Radyal hareket dönüm noktaları arasında salınırken aksel yer değiştirme negatif yönde birikmeye devam eder:

$$\langle \dot{z} \rangle = -\omega \langle r - R \rangle < 0.$$

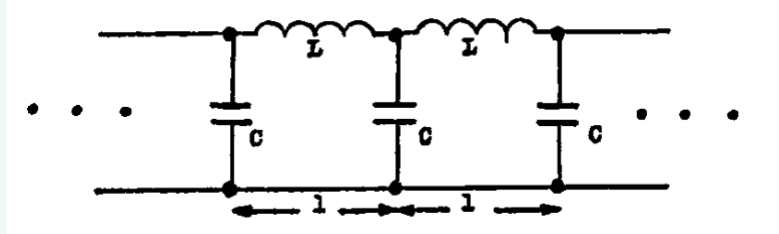
Dolayısıyla sistematik sürüklenme

sayfa düzleminin içine doğru, şu alana zıt yönde: $\vec{B}_1$.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Sonsuz LC ağı

Sinüs dalgaları sonsuz bir LC ağında (aşağıdaki şekle bakınız) yayılırken, ardışık iki kondansatörün uçları arasındaki alternatif gerilimlerin fazları arasında Φ kadar fark vardır.



- Φ 'nin ω , L ve C 'ye nasıl bağlı olduğunu belirleyiniz (ω , sinüs dalgasının açısal frekansıdır).
- Her bir birimin uzunluğu ℓ ise dalgaların yayılma hızını belirleyiniz.
- Dalgaların yayılma hızının hangi koşullarda ω 'dan hemen hemen bağımsız olduğunu belirtiniz. Bu durumda hızı belirleyiniz.
- Yukarıdaki devrenin analoğu olan basit bir mekanik model öneriniz ve modelinizin geçerliliğini ortaya koyan denklemleri türetiniz.

Formüller:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **a)** Dispersiyon bağıntısı

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

biçimindedir. Faz gecikmesi esas aralıkta, $0 \leq \Phi \leq \pi$, alındığında,

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

Gerçek bir faz gecikmesi için $0 \leq \omega \leq \omega_c = 2/\sqrt{LC}$ gerekir.

- **b)** Sinüzoidal dalganın faz hızı

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin \left(\omega \sqrt{LC}/2 \right)}.$$

biçimindedir. Tamamlayıcı bilgi olarak, dar bir dalga paketinin grup hızı

$$v_g = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

biçimindedir.

- **c)** $\omega \sqrt{LC} \ll 1$ olduğunda, eşdeğer olarak $\Phi \ll 1$ olduğunda, yayılma hızı frekanstan yaklaşık olarak bağımsızdır:

$$v_{\text{ph}} \simeq v_g \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

- **d)** Aralarında ℓ uzaklığı bulunan ve yay sabiti κ olan özdeş, kütsüz yaylarla birbirine bağlanmış özdeş m kütlelerinden oluşan sonsuz bir zincir, devrenin analogudur. Bu zincirin

$$m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

denklemini,

$$L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

devre denklemiyle örtüşür; burada $\dot{q}_n$, n . bobinden geçen akımdır. Dolayısıyla karşılıklık $m \leftrightarrow L$, $\kappa \leftrightarrow 1/C$ şeklindedir.

Çözüm

Bobinlerin ve kondansatörlerin ideal ve kendi aralarında özdeş olduğunu, direncin de ihmal edilebildiğini varsayalım. Kondansatörleri n tam sayısı ile numaralandıralım. $u_n(t)$, n numaralı kondansatörün uçları arasındaki gerilim; $i_n(t)$ ise bobinden n düğümünden $n+1$ düğümüne doğru akan akım olsun.

a)

n düğümünde Kirchhoff'un akım yasası

$$C \frac{du_n}{dt} = i_{n-1} - i_n$$

bağıntısını verir. Her bir bobin için gerilim–akım bağıntısı ise

$$L \frac{di_n}{dt} = u_n - u_{n+1}$$

şeklindedir.

İlk denklemin türevini alıp bobin bağıntılarını yerine koyarsak,

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = (u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1}),$$

dolayısıyla

$$LC \ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}$$

elde edilir.

Hücre başına faz gecikmesi Φ olan sinüzoidal bir ilerleyen dalga için

$$u_n(t) = U \cos(\omega t - n\Phi)$$

yazalım. Komşu gerilimler

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \cos \Phi,$$

bağıntısını sağlarken $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ olur. Dolayısıyla

$$-\omega^2 LC = 2 \cos \Phi - 2,$$

ya da

$$\cos \Phi = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}$$

elde edilir.

$1 - \cos \Phi = 2 \sin^2(\Phi/2)$ özdeşliği kullanılarak,

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}$$

bulunur. Esas dal üzerinde,

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

Yayıma yönü tersine çevrildiğinde faz gecikmesinin işareti de tersine döner.

$\sin^2(\Phi/2) \leq 1$ olduğundan, gerçek ilerleyen dalga modları yalnızca üst sınırı

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

olan frekans bandında mümkündür. Bu kesim frekansının üzerinde, gerçek Φ değerine sahip yayılan bir mod yoktur.

b)

Sabit bir faz,

$$\omega t - n\Phi = \text{sabit}$$

koşulunu sağlar. Buna göre, aynı fazın bir hücre ilerlemesi için geçen süre

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}$$

olur. Hücre uzunluğu ℓ olduğundan faz hızı

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}$$

olarak bulunur.

Eşdeğer olarak, dalga sayısı $k = \Phi/\ell$ ve $v_{\text{ph}} = \omega/k$ olur.

Soruda sinüs dalgaları belirtildiğinden, istenen hız bu faz hızıdır. Bunun yerine dar bir dalga paketinin zarfı izlenirse, bu zarfın hızı grup hızıdır.

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\ell}{2}, \quad 0 \leq k\ell \leq \pi,$$

bağıntısından

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}$$

elde edilir.

Kesim frekansında, komşu kondansatörlerin gerilimleri zıt fazda salınır, $\Phi = \pi$, ve grup hızı sıfır olur.

c)

Bir hücre boyunca faz değişimi küçük olduğunda,

$$\begin{aligned} \Phi &\ll 1, \\ \sin \frac{\Phi}{2} &\simeq \frac{\Phi}{2} \end{aligned}$$

yaklaşımını kullanabiliriz. Dispersiyon bağıntısı bu durumda

$$\omega^2 LC \simeq \Phi^2, \quad \Phi \simeq \omega \sqrt{LC}$$

haline gelir. Dolayısıyla gerekli frekans koşulu

$$\omega \sqrt{LC} \ll 1,$$

olur ve

$$v_{\text{ph}} \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}$$

elde edilir.

Grup hızı da aynı limite sahiptir. Fiziksel olarak bu, uzun dalga boyu rejimidir: bir dalga boyu içinde çok sayıda hücre bulunur; dolayısıyla kesikli ağ, yaklaşık olarak sürekli bir iletim hattı gibi davranır.

Örneğin, faz hızının en düşük mertebeden düzeltilmesi

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{24} + O((\omega^2 LC)^2) \right]$$

şeklindedir. Dolayısıyla belirtilen koşul altında frekans bağımlılığı küçüktür. LC 'nin birimi s^2 olduğundan, $\ell/\sqrt{LC}$ 'nin birimi hız birimidir.

d)

Denge konumları arasındaki uzaklık ℓ olan özdeş m kütlelerinden oluşan sonsuz, doğrusal bir zincir düşünelim. Her komşu kütle çiftini, yay sabiti κ olan kütsüz bir yayla bağlayalım. Kütleler sürtünmesiz olarak boyuna hareket etsin ve yaylar Hooke yasasına uysun.

$x_n(t)$, n numaralı kütlenin denge konumundan yer değiştirmesi olsun. Sağdaki yay

$$\kappa(x_{n+1} - x_n),$$

kuvvetini, soldaki yay ise

$$-\kappa(x_n - x_{n-1})$$

kuvvetini uygular. Dolayısıyla Newton'un ikinci yasası

$$m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

denklemini verir.

Devreyle doğrudan bir karşılıklık kurmak için $q_n(t)$ 'yi n numaralı bobinden geçmiş olan yük olarak tanımlayalım; böylece

$$i_n = \dot{q}_n$$

olur. Nicelikler denge durumuna göre alındığında, n numaralı kondansatörde yükün korunumu

$$Cu_n = q_{n-1} - q_n$$

bağıntısını verir. Buna göre bobin denklemini

$$L\ddot{q}_n = u_n - u_{n+1} = \frac{q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}}{C}$$

haline gelir. Dolayısıyla

$$L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

denklemini,

$$x_n \leftrightarrow q_n, \quad m \leftrightarrow L, \quad \kappa \leftrightarrow \frac{1}{C}$$

eşleştirmeleri altında mekanik denklemle tam olarak aynı biçimdedir.

Enerji ifadeleri bu karşılıklılığı doğrular:

$$E_{\text{LC}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} L \dot{q}_n^2 + \frac{(q_{n-1} - q_n)^2}{2C} \right],$$

$$E_{\text{mech}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_{n-1} - x_n)^2 \right].$$

Bobinde depolanan enerji kinetik enerjiye, kondansatör enerjisi ise yayın potansiyel enerjisine karşılık gelir.

Son olarak, mekanik denklemde $x_n = A \cos(\omega t - n\Phi)$ yerine konulduğunda

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

elde edilir; bu, $\kappa/m = 1/(LC)$ olduğunda LC dispersiyon bağıntısıyla aynıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.