

IPhO 1987

Теоретические задачи и решения · Йена, Германская Демократическая Республика · 3
теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1987/

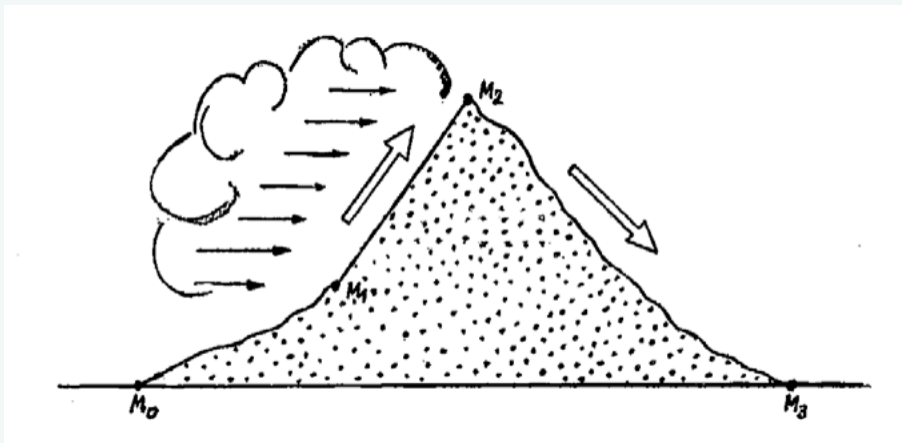
Задача 1: Подъём влажного воздуха

Влажный воздух адиабатически перетекает через горный хребет, как показано на рисунке.

На метеорологических станциях M_0 и M_3 измерены одинаковые значения атмосферного давления — 100 кПа, а на станции M_2 — давление 70 кПа. Температура воздуха на станции M_0 составляет 20°C .

При подъёме воздуха образование облаков начинается при давлении 84.5 кПа.

Рассмотрим порцию влажного воздуха, поднимающуюся по склону горы, масса которой составляет 2000 кг на каждый квадратный метр. Этот влажный воздух достигает гребня горного хребта (станции M_2) через 1500 секунд. За время подъёма на каждый килограмм воздуха выпадает 2.45 г воды в виде дождя.



1. Определите температуру T_1 на станции M_1 , где образуется нижняя граница облаков.
2. На какой высоте h_1 (на станции M_1) над станцией M_0 находится нижняя граница облаков, если считать, что плотность атмосферы убывает линейно?
3. Какая температура T_2 измеряется на гребне горного хребта?
4. Определите высоту столба воды (слоя осадков), выпавшей из воздушного потока за 3 часа, предполагая равномерное выпадение дождя между точками M_1 и M_2 .
5. Какая температура T_3 измеряется за горным хребтом на станции M_3 ? Обсудите состояние атмосферы на станции M_3 по сравнению с её состоянием на станции M_0 .

Указания и данные

Атмосферу следует рассматривать как идеальный газ. Влиянием водяного пара на удельную теплоёмкость и плотность атмосферы следует пренебречь; также следует пренебречь зависимостью удельной теплоты парообразования от температуры.

Температуры следует определить с точностью до 1 К, высоту нижней границы облаков — с точностью до 10 м, а высоту слоя осадков — с точностью до 1 мм.

Удельная теплоёмкость атмосферы в рассматриваемом диапазоне температур:

$$c_p = 1005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Плотность атмосферы при p_0 и T_0 на станции M_0 :

$$\rho_0 = 1.189 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Удельная теплота парообразования воды в объёме облака:

$$L_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1.4 \quad \text{и} \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. $T_1 \approx 279 \text{ K}$, или 6°C .
2. $h_1 \approx 1410 \text{ m}$.
3. $T_2 \approx 271 \text{ K}$, или приблизительно -2°C , с требуемой точностью.
4. Высота слоя осадков за 3 часа составляет приблизительно 35 mm .
5. $T_3 \approx 300 \text{ K}$, или приблизительно 27°C . Воздух примерно на 7 K теплее, чем на станции M_0 , и суше: это **фёновый эффект**.

Решение

Все температуры в термодинамических соотношениях являются абсолютными. Положим

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad \kappa = \frac{\chi - 1}{\chi} = \frac{2}{7}.$$

Удельная газовая постоянная воздуха удовлетворяет соотношениям

$$R = c_p - c_v, \quad \frac{R}{c_p} = \kappa.$$

Используем указанное в условии приближение, согласно которому вода не оказывает заметного влияния на теплоёмкости и плотность воздуха. Считаем, что сконденсировавшаяся вода удаляется в виде дождя.

1. Температура в начале образования облаков

До достижения станции M_1 конденсация не происходит. Поэтому подъём воздуха подчиняется сухоадиабатическому соотношению, несмотря на то что воздух содержит водяной пар.

Для идеального газа первое начало термодинамики при адиабатическом изменении даёт

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp.$$

Следовательно,

$$\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}, \quad Tp^{-\kappa} = \text{постоянная}.$$

Таким образом,

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{84.5}{100} \right)^{2/7} = 279.38 \text{ K}.$$

Следовательно,

$$T_1 \approx 279 \text{ K} \approx 6^\circ \text{C}.$$

2. Высота уровня образования облаков

Сначала определим плотность на станции M_1 . Из соотношения $p = \rho RT$ получаем

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

Отсюда

$$\rho_1 = 1.189 \left(\frac{84.5}{100} \right) \left(\frac{293.15}{279.38} \right) = 1.0542 \text{ kg m}^{-3}.$$

Условие гидростатического равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

При линейном убывании плотности между станциями M_0 и M_1 её среднее значение в этом интервале высот равно

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Поэтому интегрирование уравнения гидростатики даёт

$$p_0 - p_1 = g h_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Таким образом,

$$h_1 = \frac{2(p_0 - p_1)}{g(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2(100000 - 84500)}{9.81(1.189 + 1.0542)} = 1408.7 \text{ m}.$$

С требуемой точностью до 10 м получаем

$$h_1 \approx 1410 \text{ m}.$$

3. Температура на гребне горного хребта

При подъёме воздуха в облаке конденсация сопровождается выделением скрытой теплоты. Хотя порция воздуха не обменивается теплотой с окружающей средой, это внутреннее преобразование скрытой энергии уменьшает её охлаждение.

Масса сконденсировавшейся воды на килограмм воздуха составляет

$$\Delta r = 2.45 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

поэтому скрытая энергия, выделившаяся на килограмм воздуха, равна

$$Q_\ell = L_v \Delta r = (2.500 \times 10^6)(2.45 \times 10^{-3}) = 6125 \text{ J kg}^{-1}.$$

Без конденсации температура на гребне была бы равна

$$T_{2,\text{dry}} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{70}{100} \right)^{2/7} = 264.75 \text{ K}.$$

Скрытой энергии соответствует повышение температуры

$$\frac{Q_\ell}{c_p} = \frac{6125}{1005} = 6.095 \text{ K}.$$

Добавляя это повышение при конечном давлении, получаем

$$T_2 \simeq T_{2,\text{dry}} + \frac{Q_\ell}{c_p} = 270.84 \text{ K}.$$

Чтобы проверить, что это приближение обеспечивает заданную точность, обозначим через dr приращение массы сконденсировавшейся воды на килограмм воздуха. Первое начало термодинамики при конденсации имеет вид

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = L_v dr.$$

Умножая на интегрирующий множитель $p^{-\kappa}$ и интегрируя, получаем

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa + \frac{L_v}{c_p} \int_0^{\Delta r} \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa dr.$$

Конденсация происходит при давлениях между p_1 и p_2 , поэтому

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa \leq \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa \leq 1.$$

Следовательно,

$$270.52 \text{ K} \leq T_2 \leq 270.84 \text{ K}.$$

Простая поправка на скрытую теплоту завышает T_2 не более чем на 0.32 K, что значительно меньше допустимой погрешности. Таким образом,

$$\boxed{T_2 \approx 271 \text{ K} \quad (\text{приблизительно} - 2^\circ \text{C}).}$$

4. Высота слоя осадков за 3 часа

Масса воздуха, приходящаяся на каждый квадратный метр, равна

$$\Sigma = 2000 \text{ kg m}^{-2}.$$

За один указанный интервал времени 1500 с из него выпадает следующая масса дождевой воды на единицу площади:

$$\Sigma \Delta r = 2000(2.45 \times 10^{-3}) = 4.90 \text{ kg m}^{-2}.$$

Поэтому при стационарном потоке масса дождевой воды, накопившаяся за $3 \text{ h} = 10800 \text{ s}$, составляет

$$\frac{m_w}{A} = 4.90 \frac{10800}{1500} = 35.28 \text{ kg m}^{-2}.$$

Используя обычное значение плотности жидкой воды

$$\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3},$$

получаем соответствующую высоту столба воды:

$$H = \frac{m_w/A}{\rho_w} = \frac{35.28}{1000} = 0.03528 \text{ m}.$$

При равномерном выпадении дождя высота слоя осадков одинакова во всей указанной области выпадения дождя:

$$H \approx 35 \text{ mm за 3 часа.}$$

5. Температура и состояние атмосферы на станции M_3

Поскольку сконденсировавшаяся вода удалена в виде дождя, опускающийся воздух становится ненасыщенным по мере повышения его температуры при сжатии. Поэтому его спуск происходит сухоадиабатически:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\kappa.$$

Используя приближение из пункта 3, получаем

$$T_3 \simeq 270.84 \left(\frac{100}{70} \right)^{2/7} = 299.90 \text{ K}.$$

Более точные границы из пункта 3 дают

$$299.54 \text{ K} \leq T_3 \leq 299.90 \text{ K},$$

так что неопределённость, обусловленная ходом конденсации, остаётся меньше 1 K.

Следовательно,

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \approx 27^\circ \text{C}.$$

По сравнению со станцией M_0 , воздух на станции M_3 :

- приблизительно на 7 K теплее;
- потерял 2.45 g воды на килограмм воздуха;
- имеет более низкую относительную влажность как из-за потери воды, так и из-за более высокой температуры.

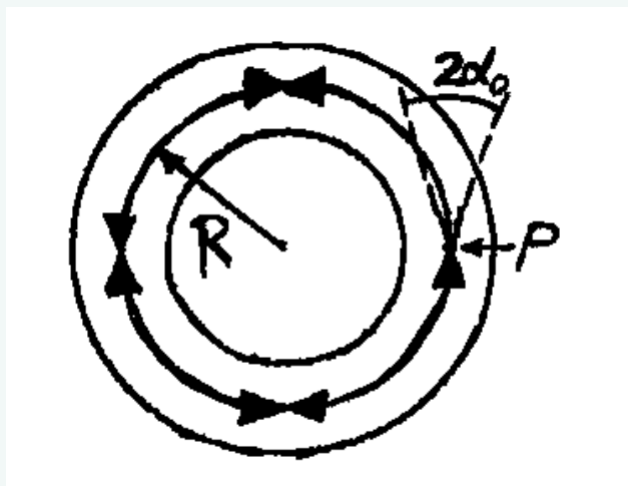
Скрытая теплота, выделяющаяся при подъёме, уменьшает охлаждение, тогда как удалённая в виде дождя вода не может вызвать соответствующее испарительное охлаждение при спуске. Возникающий в результате тёплый сухой нисходящий ветер представляет собой **фёновый эффект**.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Электроны в магнитном поле

Пучок электронов, испускаемых точечным источником P , входит в магнитное поле $\vec{B}$ тороидальной катушки (тороида) в направлении силовых линий. Угол раствора пучка $2 \cdot \alpha_0$ считается малым ($2 \cdot \alpha_0 \ll 1$). Электроны инжектируются на среднем радиусе R тороида после ускорения напряжением V_0 .

Пренебрегите любым взаимодействием между электронами. Модуль $\vec{B}$, B , считается постоянным.



1. Для удержания электрона на траектории в тороидальном поле необходимо однородное отклоняющее магнитное поле $\vec{B}_1$. Рассчитайте $\vec{B}_1$ для электрона, движущегося в тороиде по круговой орбите радиуса R .
2. Определите значение $\vec{B}$, при котором возникают четыре точки фокусировки, разделённые угловыми промежутками $\pi/2$, как показано на рисунке.

Примечание: При рассмотрении траекторий электронов можно пренебречь кривизной магнитного поля.

3. Без отклоняющего поля $\vec{B}_1$ электронный пучок не может оставаться в тороиде: он будет выходить из него вследствие направленного движения (дрейфа) перпендикулярно плоскости тороида.

- а) Покажите, что радиальное отклонение электронов от радиуса инжекции конечно.
- б) Определите направление скорости дрейфа.

Примечание: Углом раствора электронного пучка можно пренебречь. Используйте законы сохранения энергии и момента импульса.

Данные:

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad V_0 = 3 \text{ kV}; \quad R = 50 \text{ mm}$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть $e > 0$ обозначает модуль заряда электрона. Направим $\hat{\phi}$ вдоль инжектируемого пучка и тороидального поля и определим $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\phi}$; при показанном на рисунке направлении инъекции этот вектор направлен из плоскости рисунка к наблюдателю.

- 1. Однородное отклоняющее поле перпендикулярно плоскости тороида:

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{\mathbf{z}} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ Т } \hat{\mathbf{z}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 3.25 \times 10^7 \text{ м с}^{-1}.$$

- 2. В указанном приближении

$$B = \frac{4mv_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ Т}.$$

- 3(a). Радиальное отклонение ограничено:

$$0 \leq r - R \leq \frac{mv_0}{eB}.$$

Для поля из пункта 2 эта граница равна 12.5 mm. Фактическое максимальное отклонение в модели с постоянным B составляет 5.37 mm.

- 3(b). Дрейф направлен **за плоскость рисунка**, противоположно отклоняющему полю, необходимому в пункте 1:

$$\vec{v}_{\text{drift}} \parallel -\hat{\mathbf{z}}.$$

Решение

1. Отклоняющее поле

В нерелятивистской механике ускорение напряжением V_0 даёт

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{e}{m} \right) V_0} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11})(3.00 \times 10^3)} = 3.25 \times 10^7 \text{ м с}^{-1}.$$

Для электрона, движущегося по рассматриваемой круговой орбите, скорость параллельна тороидальному полю. Следовательно, это поле не действует на данный электрон с какой-либо силой.

Отклоняющее поле должно создавать направленную к центру центростремительную силу. При $\vec{B}_1 = B_1 \hat{\mathbf{z}}$ сила Лоренца, действующая на электрон, равна

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_1 = -ev_0 B_1 \hat{\mathbf{r}},$$

и в любой точке окружности направлена к центру. Таким образом,

$$ev_0 B_1 = \frac{mv_0^2}{R}.$$

Следовательно,

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z},$$

а модуль поля равен

$$B_1 = \frac{3.2496 \times 10^7}{(1.76 \times 10^{11})(0.050)} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ Т.}$$

Требуемое поле однородно и направлено из плоскости рисунка к наблюдателю.

2. Четыре точки фокусировки

В этом пункте, согласно указанию, пренебрежём кривизной направляющего поля. Локально электрон движется по винтовой линии вокруг направления поля. Если начальный угол между его скоростью и полем равен α , то

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \simeq v_0, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_0 \alpha.$$

Циклотронная угловая частота и период поперечного движения равны

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Хотя радиус вращения зависит от α , период от него не зависит. После одного полного оборота каждый электрон возвращается в исходное поперечное положение.

Поэтому расстояние вдоль пучка до следующего фокуса в первом порядке по малому углу раствора равно

$$\ell = v_{\parallel} T \simeq v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

Различия в $v_{\parallel}$ появляются лишь в порядке α^2 , которым мы пренебрегаем.

Для получения четырёх равноотстоящих точек фокусировки необходимо, чтобы

$$\ell = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Приравнявая эти расстояния, получаем

$$\frac{2\pi m v_0}{eB} = \frac{\pi R}{2},$$

так что

$$B = \frac{4m v_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ Т.}$$

Последовательные повторные фокусировки происходят при приращениях азимутального угла $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$; последняя точка совпадает с Р. Таким образом, вдоль тороида имеются четыре различные точки фокусировки, включая Р.

3(а). Конечность радиального отклонения в отсутствие отклоняющего поля

Теперь уберём $\vec{B}_1$ и пренебрежём углом раствора пучка. Введём цилиндрические координаты относительно оси симметрии тороида:

$$\vec{B} = B \hat{\phi}, \quad \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{z}.$$

В начальный момент

$$r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad r\dot{\phi} = v_0.$$

Магнитное поле не совершает работы, поэтому модуль скорости остаётся постоянным:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad (1)$$

Магнитная сила не имеет азимутальной составляющей. Следовательно, момент импульса относительно оси симметрии сохраняется:

$$mr^2\dot{\phi} = mRv_0, \quad r\dot{\phi} = \frac{Rv_0}{r}. \quad (2)$$

Поскольку азимутальная составляющая скорости не может превышать модуль полной скорости, из уравнения (2) сразу следует

$$r \geq R. \quad (3)$$

Чтобы получить верхнюю границу, воспользуемся осевой составляющей силы Лоренца:

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = eB\dot{z}\hat{r} - eB\dot{r}\hat{z}.$$

Таким образом,

$$m\ddot{z} = -eB\dot{r}.$$

Поскольку B постоянно, интегрирование с учётом начальных условий даёт

$$\dot{z} = -\frac{eB}{m}(r - R) = -\omega(r - R). \quad (4)$$

Подстановка уравнений (2) и (4) в закон сохранения энергии даёт

$$\boxed{\dot{r}^2 + \frac{R^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2(r - R)^2 = v_0^2.} \quad (5)$$

Каждое слагаемое в левой части неотрицательно. Следовательно,

$$\omega^2(r - R)^2 \leq v_0^2.$$

Вместе с уравнением (3) это доказывает, что

$$\boxed{0 \leq r - R \leq \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}.}$$

Для поля, найденного в пункте 2, $\omega = 4v_0/R$, что даёт конечную границу

$$r - R \leq \frac{R}{4} = 12.5 \text{ mm}.$$

Уравнение (5) также позволяет найти фактическую внешнюю точку поворота. Положим $\dot{r} = 0$ и введём $x = (r - R)/R$. Тогда

$$16x^2 + \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

Помимо начальной точки поворота $x = 0$, имеется положительный корень, удовлетворяющий уравнению

$$16x(1+x)^2 = x+2,$$

откуда

$$x = 0.107403, \quad \boxed{r_{\max} - R = 5.37 \text{ mm}}.$$

3(b). Направление дрейфа

Уравнения (3) и (4) дают

$$\dot{z} = -\omega(r - R) \leq 0.$$

Таким образом, осевая составляющая скорости никогда не направлена вдоль $+\hat{z}$.

Электрон действительно уходит с радиуса $r = R$: в начальный момент магнитная сила равна нулю, поскольку скорость параллельна $\vec{B}$, а радиальное уравнение движения даёт

$$\ddot{r}(0) = \frac{v_0^2}{R} > 0.$$

Следовательно, вскоре после инъекции $r > R$ и $\dot{z} < 0$. Пока радиальная координата колеблется между точками поворота, осевое смещение продолжает накапливаться в отрицательном направлении:

$$\langle \dot{z} \rangle = -\omega \langle r - R \rangle < 0.$$

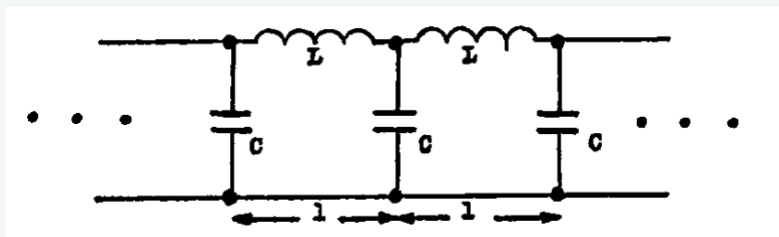
Следовательно, направленный дрейф происходит

$$\boxed{\text{за плоскость рисунка, противоположно } \vec{B}_1.}$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Бесконечная LC-цепочка

При распространении синусоидальных волн в бесконечной LC-цепочке (см. рисунок ниже) фазы переменных напряжений на двух последовательных конденсаторах различаются на Φ .



- Определите, как Φ зависит от ω , L и C (ω — угловая частота синусоидальной волны).
- Определите скорость распространения волн, если длина каждого звена равна ℓ .
- Укажите, при каких условиях скорость распространения волн почти не зависит от ω . Определите скорость в этом случае.
- Предложите простую механическую модель, аналогичную приведённой выше цепи, и выведите уравнения, подтверждающие справедливость этой аналогии.

Формулы:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Выбирая главное значение фазового запаздывания $0 \leq \Phi \leq \pi$, получаем

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

Для вещественного фазового запаздывания необходимо выполнение условия $0 \leq \omega \leq \omega_c = 2/\sqrt{LC}$.

- **b)** Фазовая скорость синусоидальной волны равна

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin \left(\omega \sqrt{LC}/2 \right)}.$$

Для полноты приведём также групповую скорость волнового пакета с узким спектром:

$$v_g = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

- **c)** При $\omega \sqrt{LC} \ll 1$, или, что равносильно, при $\Phi \ll 1$, скорость распространения практически не зависит от частоты:

$$v_{\text{ph}} \simeq v_g \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

- **d)** Аналогом служит бесконечная цепочка одинаковых тел массой m , расположенных на расстоянии ℓ друг от друга и соединённых одинаковыми невесомыми пружинами жёсткости κ . Её уравнение

$$m \ddot{x}_n = \kappa (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

соответствует уравнению электрической цепи

$$L \ddot{q}_n = \frac{1}{C} (q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

где $\dot{q}_n$ — ток через n -ю катушку индуктивности. Таким образом, соответствие имеет вид $m \leftrightarrow L$, $\kappa \leftrightarrow 1/C$.

Решение

Будем считать катушки индуктивности и конденсаторы идеальными и одинаковыми, а сопротивлением пренебрежём. Пронумеруем конденсаторы целым числом n . Пусть $u_n(t)$ — напряжение на конденсаторе n , а $i_n(t)$ — ток, текущий через катушку индуктивности от узла n к узлу $n + 1$.

а)

Первый закон Кирхгофа для узла n даёт

$$C \frac{du_n}{dt} = i_{n-1} - i_n.$$

Связь между напряжением и током для каждой катушки индуктивности имеет вид

$$L \frac{di_n}{dt} = u_n - u_{n+1}.$$

Дифференцируя первое уравнение и подставляя соотношения для катушек индуктивности, получаем

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = (u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1}),$$

откуда

$$LC \ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}.$$

Для синусоидальной бегущей волны с фазовым запаздыванием Φ на одно звено запишем

$$u_n(t) = U \cos(\omega t - n\Phi).$$

Напряжения на соседних конденсаторах удовлетворяют соотношению

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \cos \Phi,$$

при этом $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$. Следовательно,

$$-\omega^2 LC = 2 \cos \Phi - 2,$$

или

$$\cos \Phi = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}.$$

Используя $1 - \cos \Phi = 2 \sin^2(\Phi/2)$, получаем

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

На главной ветви

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

При изменении направления распространения на противоположное знак фазового запаздывания меняется.

Поскольку $\sin^2(\Phi/2) \leq 1$, бегущие волны с вещественным фазовым запаздыванием возможны только в полосе частот, ограниченной сверху частотой

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Выше этой частоты отсечки распространяющихся мод с вещественным Φ нет.

b)

Условие постоянства фазы имеет вид

$$\omega t - n\Phi = \text{постоянная}.$$

Следовательно, время, за которое точка с заданной фазой перемещается на одно звено, равно

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}.$$

Поскольку длина звена равна ℓ , фазовая скорость равна

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}.$$

То же самое можно выразить через волновое число $k = \Phi/\ell$: $v_{\text{ph}} = \omega/k$.

В условии задачи речь идёт о синусоидальных волнах, поэтому искомой скоростью является именно эта фазовая скорость. Если же следить за огибающей волнового пакета с узким спектром, то её скорость будет групповой скоростью. Из соотношения

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\ell}{2}, \quad 0 \leq k\ell \leq \pi,$$

получаем

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

На частоте отсечки напряжения на соседних конденсаторах колеблются в противофазе, $\Phi = \pi$, а групповая скорость обращается в нуль.

c)

Если изменение фазы на одном звене мало,

$$\Phi \ll 1,$$

можно использовать приближение

$$\sin \frac{\Phi}{2} \simeq \frac{\Phi}{2}.$$

Тогда дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 LC \simeq \Phi^2, \quad \Phi \simeq \omega \sqrt{LC}.$$

Таким образом, необходимое условие для частоты имеет вид

$$\omega \sqrt{LC} \ll 1,$$

и

$$v_{\text{ph}} \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

Групповая скорость имеет тот же предел. Физически это длинноволновый режим: на одну длину волны приходится много звеньев, поэтому дискретная цепочка ведёт себя приближённо как непрерывная линия передачи.

Например, главная поправка к фазовой скорости определяется выражением

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{24} + O((\omega^2 LC)^2) \right].$$

Следовательно, при указанном условии её зависимость от частоты мала. Поскольку LC измеряется в s^2 , величина $\ell/\sqrt{LC}$ имеет размерность скорости.

d)

Рассмотрим бесконечную прямолинейную цепочку одинаковых тел массой m , расстояние между которыми в положении равновесия равно ℓ . Соединим каждую пару соседних тел невесомой пружиной жёсткости κ . Тела движутся вдоль цепочки без трения, а пружины подчиняются закону Гука.

Пусть $x_n(t)$ — смещение тела n из положения равновесия. Правая пружина действует на него с силой

$$\kappa(x_{n+1} - x_n),$$

а левая пружина — с силой

$$-\kappa(x_n - x_{n-1}).$$

Поэтому второй закон Ньютона даёт

$$m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}).$$

Чтобы установить прямое соответствие с электрической цепью, определим $q_n(t)$ как заряд, прошедший через катушку индуктивности n , так что

$$i_n = \dot{q}_n.$$

Отсчитывая величины от их равновесных значений, из закона сохранения заряда для конденсатора n получаем

$$Cu_n = q_{n-1} - q_n.$$

Следовательно, уравнение для катушки индуктивности принимает вид

$$L\ddot{q}_n = u_n - u_{n+1} = \frac{q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}}{C}.$$

Таким образом,

$$L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

что в точности совпадает по форме с механическим уравнением при соответствии

$$x_n \leftrightarrow q_n, \quad m \leftrightarrow L, \quad \kappa \leftrightarrow \frac{1}{C}.$$

Выражения для энергии подтверждают это соответствие:

$$E_{\text{LC}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} L \dot{q}_n^2 + \frac{(q_{n-1} - q_n)^2}{2C} \right],$$
$$E_{\text{mech}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_{n-1} - x_n)^2 \right].$$

Энергии катушек индуктивности соответствует кинетическая энергия, а энергии конденсаторов — потенциальная энергия пружин.

Наконец, подстановка $x_n = A \cos(\omega t - n\Phi)$ в механическое уравнение даёт

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

что совпадает с дисперсионным соотношением для LC-цепочки при $\kappa/m = 1/(LC)$.

Решение проверено по официальному решению.