

IPhO 1987

Problemas teóricos y soluciones · Jena, República Democrática Alemana · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1987/

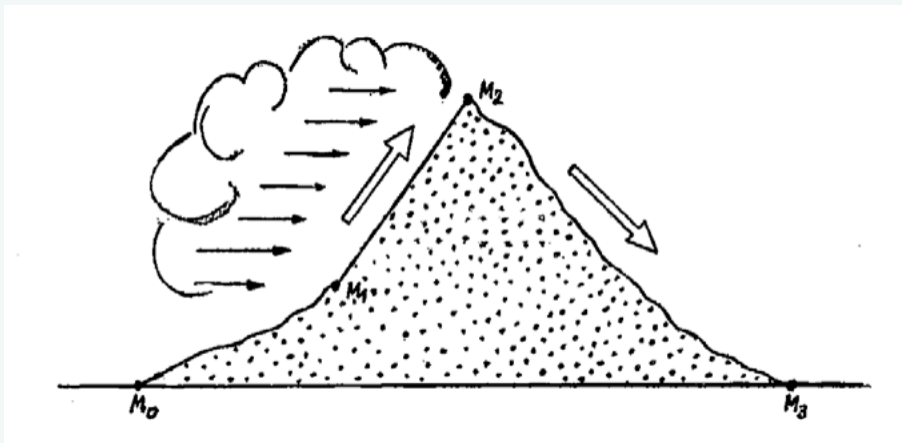
Problema 1: Ascenso de aire húmedo

Una corriente de aire húmedo atraviesa adiabáticamente una cordillera, como se indica en la figura.

En las estaciones meteorológicas M_0 y M_3 se miden presiones atmosféricas iguales de 100 kPa, y en la estación M_2 , una presión de 70 kPa. La temperatura del aire en M_0 es de 20°C .

A medida que el aire asciende, la formación de nubes comienza a una presión de 84.5 kPa.

Considérese una cantidad de aire húmedo que asciende por la montaña con una masa de 2000 kg sobre cada metro cuadrado. Este aire húmedo alcanza la cresta de la montaña (estación M_2) al cabo de 1500 segundos. Durante ese ascenso precipitan en forma de lluvia 2.45 g de agua por kilogramo de aire.



1. Determine la temperatura T_1 en M_1 , donde se forma la base de las nubes.
2. ¿Cuál es la altura h_1 (en M_1) de la base de las nubes sobre la estación M_0 , suponiendo una disminución lineal de la densidad atmosférica?
3. ¿Qué temperatura T_2 se mide en la cresta de la cordillera?
4. Determine la altura de la columna de agua (nivel de precipitación) que precipita de la corriente de aire en 3 horas, suponiendo una lluvia homogénea entre los puntos M_1 y M_2 .
5. ¿Qué temperatura T_3 se mide a sotavento de la cordillera, en la estación M_3 ? Analice el estado de la atmósfera en la estación M_3 en comparación con el de la estación M_0 .

Indicaciones y datos

La atmósfera debe tratarse como un gas ideal. Deben despreciarse los efectos del vapor de agua sobre la capacidad calorífica específica y la densidad atmosférica; lo mismo se aplica a la dependencia del calor latente específico de vaporización con la temperatura. Las temperaturas deben determinarse con una precisión de 1 K, la altura de la base de las nubes con una precisión de 10 m y el nivel de precipitación con una precisión de 1 mm.

Capacidad calorífica específica de la atmósfera en el intervalo de temperaturas considerado:

$$c_p = 1005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Densidad atmosférica para p_0 y T_0 en la estación M_0 :

$$\rho_0 = 1.189 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Calor latente específico de vaporización del agua dentro del volumen de la nube:

$$L_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1.4 \quad \text{y} \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. $T_1 \approx 279 \text{ K}$, o 6°C .
2. $h_1 \approx 1410 \text{ m}$.
3. $T_2 \approx 271 \text{ K}$, o aproximadamente -2°C , con la precisión solicitada.
4. El nivel de precipitación en 3 horas es de aproximadamente 35 mm.
5. $T_3 \approx 300 \text{ K}$, o aproximadamente 27°C . El aire está unos 7 K más caliente que en M_0 y es más seco: el **efecto föhn**.

Solución

Todas las temperaturas que aparecen en las relaciones termodinámicas son temperaturas absolutas. Tomamos

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad \kappa = \frac{\chi - 1}{\chi} = \frac{2}{7}.$$

La constante específica de los gases para el aire satisface

$$R = c_p - c_v, \quad \frac{R}{c_p} = \kappa.$$

Utilizamos la aproximación indicada de que el agua no modifica apreciablemente las capacidades caloríficas ni la densidad del aire. Se considera que el agua condensada se elimina en forma de lluvia.

1. Temperatura al inicio de la formación de nubes

Antes de alcanzar M_1 , no se produce condensación. Por tanto, el aire ascendente sigue la relación adiabática seca, aunque contiene vapor de agua.

Para un gas ideal, el primer principio de la termodinámica aplicado a una transformación adiabática da

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp.$$

En consecuencia,

$$\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}, \quad Tp^{-\kappa} = \text{constante}.$$

Así,

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{84.5}{100} \right)^{2/7} = 279.38 \text{ K}.$$

Por tanto,

$$\boxed{T_1 \approx 279 \text{ K} \approx 6^\circ \text{C}.$$

2. Altura del nivel de formación de nubes

Primero determinamos la densidad en M_1 . A partir de $p = \rho RT$,

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

De ahí,

$$\rho_1 = 1.189 \left(\frac{84.5}{100} \right) \left(\frac{293.15}{279.38} \right) = 1.0542 \text{ kg m}^{-3}.$$

El equilibrio hidrostático exige

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

Si la densidad disminuye linealmente entre M_0 y M_1 , su valor medio en este intervalo de alturas es

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Por tanto, al integrar la ecuación hidrostática se obtiene

$$p_0 - p_1 = gh_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Así,

$$h_1 = \frac{2(p_0 - p_1)}{g(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2(100000 - 84500)}{9.81(1.189 + 1.0542)} = 1408.7 \text{ m}.$$

Con la precisión solicitada de 10 m,

$$\boxed{h_1 \approx 1410 \text{ m}.$$

3. Temperatura en la cresta de la montaña

Durante el ascenso con formación de nubes, la condensación libera calor latente. Aunque la parcela de aire no intercambia calor con su entorno, esta conversión interna de energía latente reduce su enfriamiento.

La masa condensada por kilogramo de aire es

$$\Delta r = 2.45 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

por lo que la energía latente liberada por kilogramo de aire es

$$Q_\ell = L_v \Delta r = (2.500 \times 10^6)(2.45 \times 10^{-3}) = 6125 \text{ J kg}^{-1}.$$

Sin condensación, la temperatura en la cresta sería

$$T_{2,\text{dry}} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{70}{100} \right)^{2/7} = 264.75 \text{ K}.$$

La energía latente corresponde a un aumento de temperatura de

$$\frac{Q_\ell}{c_p} = \frac{6125}{1005} = 6.095 \text{ K}.$$

Al sumar este aumento a la presión final se obtiene

$$T_2 \simeq T_{2,\text{dry}} + \frac{Q_\ell}{c_p} = 270.84 \text{ K}.$$

Para comprobar que esta aproximación cumple la precisión especificada, sea dr un incremento de agua condensada por kilogramo de aire. El primer principio durante la condensación es

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = L_v dr.$$

Multiplicando por el factor integrante $p^{-\kappa}$ e integrando, se obtiene

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa + \frac{L_v}{c_p} \int_0^{\Delta r} \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa dr.$$

La condensación se produce a presiones comprendidas entre p_1 y p_2 , por lo que

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa \leq \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa \leq 1.$$

Por tanto,

$$270.52 \text{ K} \leq T_2 \leq 270.84 \text{ K}.$$

La corrección sencilla por calor latente sobreestima T_2 como máximo en 0.32 K, un valor holgadamente dentro de la precisión requerida. Así,

$$\boxed{T_2 \approx 271 \text{ K} \quad (\text{aproximadamente } -2^\circ\text{C}).}$$

4. Nivel de precipitación en 3 horas

La masa de aire asociada a cada metro cuadrado es

$$\Sigma = 2000 \text{ kg m}^{-2}.$$

Durante uno de los intervalos indicados de 1500 s, aporta una masa de lluvia por unidad de superficie de

$$\Sigma \Delta r = 2000(2.45 \times 10^{-3}) = 4.90 \text{ kg m}^{-2}.$$

Para una corriente estacionaria, la lluvia acumulada en 3 h = 10800 s es, por tanto,

$$\frac{m_w}{A} = 4.90 \frac{10800}{1500} = 35.28 \text{ kg m}^{-2}.$$

Utilizando la densidad habitual del agua líquida,

$$\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3},$$

la altura correspondiente de la columna de agua es

$$H = \frac{m_w/A}{\rho_w} = \frac{35.28}{1000} = 0.03528 \text{ m.}$$

Una lluvia homogénea da este mismo nivel de precipitación en toda la región de lluvia especificada:

$$H \approx 35 \text{ mm en 3 horas.}$$

5. Temperatura y condiciones atmosféricas en M_3

Una vez eliminada el agua condensada en forma de lluvia, el aire descendente deja de estar saturado al aumentar su temperatura por la compresión. Por tanto, su descenso sigue una adiabática seca:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\kappa.$$

Utilizando la aproximación del apartado 3,

$$T_3 \simeq 270.84 \left(\frac{100}{70} \right)^{2/7} = 299.90 \text{ K.}$$

Las cotas más precisas del apartado 3 implican

$$299.54 \text{ K} \leq T_3 \leq 299.90 \text{ K,}$$

por lo que la incertidumbre debida a cómo se haya desarrollado la condensación sigue siendo inferior a 1 K.

De ahí,

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \approx 27^\circ \text{C.}$$

En comparación con M_0 , el aire en M_3 :

- está aproximadamente 7 K más caliente;
- ha perdido 2.45 g de agua por kilogramo de aire;
- tiene una humedad relativa menor, debido tanto a la pérdida de agua como a su mayor temperatura.

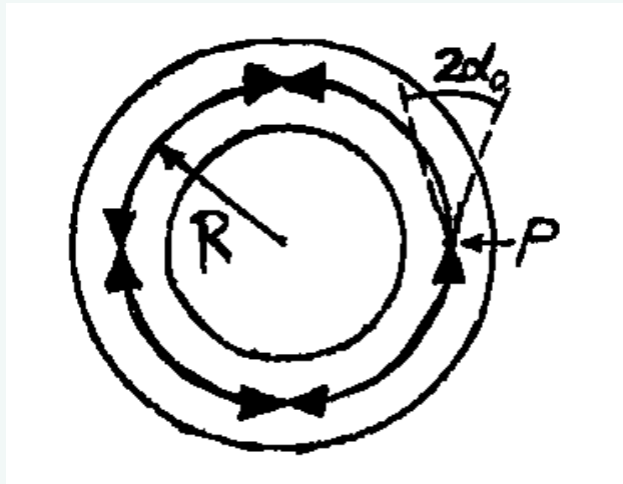
El calor latente liberado durante el ascenso reduce el enfriamiento, mientras que la lluvia eliminada no puede producir el correspondiente enfriamiento por evaporación durante el descenso. El viento descendente cálido y seco resultante constituye el **efecto föhn**.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Electrones en un campo magnético

Un haz de electrones emitido por una fuente puntual P entra en el campo magnético $\vec{B}$ de una bobina toroidal (toroide) en la dirección de las líneas de campo. Se supone que el ángulo de apertura del haz $2 \cdot \alpha_0$ es pequeño ($2 \cdot \alpha_0 \ll 1$). La inyección de los electrones se produce en el radio medio R del toroide con una tensión de aceleración V_0 .

Desprecie cualquier interacción entre los electrones. Se supone que el módulo de $\vec{B}$, B , es constante.



1. Para guiar al electrón en el campo toroidal se necesita un campo magnético de desviación homogéneo $\vec{B}_1$. Calcule $\vec{B}_1$ para un electrón que se mueve en una órbita circular de radio R en el toroide.
2. Determine el valor de $\vec{B}$ que produce cuatro puntos de enfoque separados por $\pi/2$, como se indica en el diagrama.

Nota: Al considerar las trayectorias de los electrones, puede despreciar la curvatura del campo magnético.

3. El haz de electrones no puede permanecer en el toroide sin un campo de desviación $\vec{B}_1$, sino que saldrá de él con un movimiento sistemático (deriva) perpendicular al plano del toroide.

- a) Demuestre que la desviación radial de los electrones respecto al radio de inyección es finita.
- b) Determine la dirección y el sentido de la velocidad de deriva.

Nota: Puede despreciarse el ángulo de apertura del haz de electrones. Utilice las leyes de conservación de la energía y del momento angular.

Datos:

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad V_0 = 3 \text{ kV}; \quad R = 50 \text{ mm}$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea $e > 0$ el valor absoluto de la carga del electrón. Tome $\hat{\phi}$ en la dirección y el sentido del haz inyectado y del campo toroidal, y defina $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\phi}$, que apunta hacia fuera de la página para la inyección mostrada.

- 1. El campo de desviación homogéneo es perpendicular al toroide:

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T } \hat{z}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

- 2. En la aproximación indicada,

$$B = \frac{4mv_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

- 3(a). La desviación radial está acotada:

$$0 \leq r - R \leq \frac{mv_0}{eB}.$$

Con el campo de la parte 2, esta cota es 12.5 mm. La desviación máxima real en el modelo de B constante es 5.37 mm.

- 3(b). La deriva se dirige **hacia dentro de la página**, en sentido opuesto al campo de desviación requerido en la parte 1:

$$\vec{v}_{\text{drift}} \parallel -\hat{z}.$$

Solución

1. Campo de desviación

Según la mecánica no relativista, la aceleración mediante la tensión V_0 da

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0,$$

de donde

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{e}{m} \right) V_0} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11})(3.00 \times 10^3)} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Para el electrón de referencia en la órbita circular, la velocidad es paralela al campo toroidal. Por consiguiente, ese campo no ejerce ninguna fuerza sobre este electrón.

El campo de desviación debe proporcionar la fuerza centrípeta dirigida hacia el centro. Para $\vec{B}_1 = B_1 \hat{z}$, la fuerza de Lorentz sobre el electrón es

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_1 = -ev_0 B_1 \hat{r},$$

que apunta hacia el centro en todos los puntos de la circunferencia. Por tanto,

$$ev_0 B_1 = \frac{mv_0^2}{R}.$$

En consecuencia,

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z},$$

con módulo

$$B_1 = \frac{3.2496 \times 10^7}{(1.76 \times 10^{11})(0.050)} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

El campo requerido es homogéneo y apunta hacia fuera del plano del diagrama.

2. Cuatro puntos de enfoque

En esta parte, desprecie la curvatura del campo guía, tal como se indica. Localmente, un electrón describe una hélice alrededor de la dirección del campo. Si su ángulo inicial con el campo es α , entonces

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \simeq v_0, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_0 \alpha.$$

El movimiento transversal tiene una frecuencia angular ciclotrónica y un período dados por

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Aunque el radio de giro depende de α , el período no. Después de una vuelta completa, cada electrón regresa a su posición transversal inicial.

Por tanto, la distancia a lo largo del haz hasta el siguiente foco es, a primer orden en el pequeño ángulo de apertura,

$$\ell = v_{\parallel} T \simeq v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

Las diferencias en $v_{\parallel}$ solo aparecen a orden α^2 , que se desprecia.

Para tener cuatro puntos de enfoque equidistantes, se requiere

$$\ell = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Al igualar estas distancias se obtiene

$$\frac{2\pi m v_0}{eB} = \frac{\pi R}{2},$$

de modo que

$$B = \frac{4m v_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

Los sucesivos reenfoques se producen tras avances azimutales de $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$; el último coincide con P. Así pues, hay cuatro posiciones de enfoque distintas alrededor del toroide, incluida P.

3(a). Desviación radial finita sin el campo de desviación

Retire ahora $\vec{B}_1$ y desprecie la apertura del haz. Utilice coordenadas cilíndricas en torno al eje de simetría del toroide:

$$\vec{B} = B\hat{\phi}, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}.$$

Inicialmente,

$$r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad r\dot{\phi} = v_0.$$

Un campo magnético no realiza trabajo, por lo que el módulo de la velocidad permanece constante:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad (1)$$

La fuerza magnética no tiene componente azimutal. Por tanto, se conserva el momento angular respecto al eje de simetría:

—

$$mr^2\dot{\phi} = mRv_0, \quad r\dot{\phi} = \frac{Rv_0}{r}. \quad (2)$$

Como la componente azimutal de la velocidad no puede superar el módulo de la velocidad total, la ecuación (2) implica inmediatamente

$$r \geq R. \quad (3)$$

Para obtener una cota superior, utilice la componente axial de la fuerza de Lorentz:

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = eB\dot{z}\hat{\mathbf{r}} - eB\dot{r}\hat{\mathbf{z}}.$$

Por tanto,

$$m\ddot{z} = -eB\dot{r}.$$

Como B es constante, al integrar con las condiciones iniciales se obtiene

$$\dot{z} = -\frac{eB}{m}(r - R) = -\omega(r - R). \quad (4)$$

Al sustituir las ecuaciones (2) y (4) en la conservación de la energía, se obtiene

$$\dot{r}^2 + \frac{R^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2(r - R)^2 = v_0^2. \quad (5)$$

Todos los términos del miembro izquierdo son no negativos. En consecuencia,

$$\omega^2(r - R)^2 \leq v_0^2.$$

Junto con la ecuación (3), esto demuestra que

$$0 \leq r - R \leq \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}.$$

Para el campo hallado en la parte 2, $\omega = 4v_0/R$, lo que da la cota finita

$$r - R \leq \frac{R}{4} = 12.5 \text{ mm}.$$

La ecuación (5) también proporciona el punto de retorno exterior real. Haga $\dot{r} = 0$ y escriba $x = (r - R)/R$. Entonces

$$16x^2 + \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

Además del punto de retorno inicial $x = 0$, la raíz positiva satisface

$$16x(1+x)^2 = x + 2,$$

de donde se obtiene

$$x = 0.107403, \quad r_{\max} - R = 5.37 \text{ mm}.$$

3(b). Dirección y sentido de la deriva

Las ecuaciones (3) y (4) dan

$$\dot{z} = -\omega(r - R) \leq 0.$$

Por tanto, la velocidad axial nunca apunta en el sentido $+\hat{\mathbf{z}}$.

El movimiento se aparta efectivamente de $r = R$: inicialmente, la fuerza magnética es nula porque la velocidad es paralela a $\vec{B}$, y la ecuación radial da

$$\ddot{r}(0) = \frac{v_0^2}{R} > 0.$$

Por consiguiente, $r > R$ poco después de la inyección y $\dot{z} < 0$. Mientras el movimiento radial oscila entre sus puntos de retorno, el desplazamiento axial sigue acumulándose en el sentido negativo:

$$\langle \dot{z} \rangle = -\omega \langle r - R \rangle < 0.$$

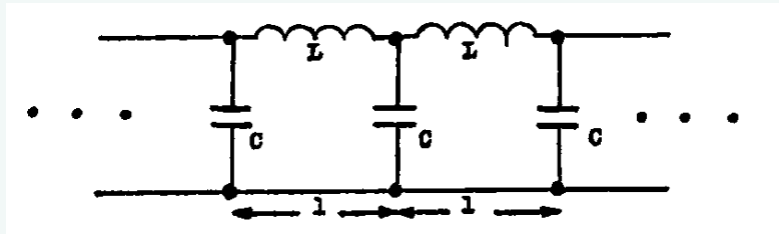
Por tanto, la deriva sistemática es

hacia dentro de la página, en sentido opuesto a $\vec{B}_1$.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Red LC infinita

Cuando se propagan ondas sinusoidales por una red LC infinita (véase la figura siguiente), la fase de la tensión alterna entre los bornes de dos condensadores sucesivos difiere en Φ .



- Determine cómo depende Φ de ω , L y C (ω es la frecuencia angular de la onda sinusoidal).
- Determine la velocidad de propagación de las ondas si la longitud de cada unidad es ℓ .
- Indique en qué condiciones la velocidad de propagación de las ondas es casi independiente de ω . Determine la velocidad en este caso.
- Proponga un modelo mecánico sencillo que sea análogo al circuito anterior y deduzca las ecuaciones que demuestren la validez de su modelo.

Fórmulas:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** La relación de dispersión es

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Tomando el desfase de retardo principal $0 \leq \Phi \leq \pi$,

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

Un desfase real requiere $0 \leq \omega \leq \omega_c = 2/\sqrt{LC}$.

- **b)** La velocidad de fase de la onda sinusoidal es

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin \left(\omega \sqrt{LC}/2 \right)}.$$

Para completar la respuesta, la velocidad de grupo de un paquete de ondas de banda estrecha es

$$v_g = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

- **c)** Para $\omega \sqrt{LC} \ll 1$, o, de forma equivalente, $\Phi \ll 1$, la velocidad de propagación es aproximadamente independiente de la frecuencia:

$$v_{\text{ph}} \simeq v_g \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

- **d)** Una cadena infinita de masas idénticas m , separadas por ℓ y unidas por resortes idénticos sin masa de constante elástica κ , constituye un sistema análogo. Su ecuación

$$m \ddot{x}_n = \kappa (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

se corresponde con la ecuación del circuito

$$L \ddot{q}_n = \frac{1}{C} (q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

donde $\dot{q}_n$ es la corriente que atraviesa el n -ésimo inductor. Por tanto, la correspondencia es $m \leftrightarrow L, \kappa \leftrightarrow 1/C$.

Solución

Supongamos que los inductores y los condensadores son ideales e idénticos y que la resistencia es despreciable. Numeremos los condensadores mediante el entero n . Sea $u_n(t)$ la tensión entre los bornes del condensador n , y sea $i_n(t)$ la corriente que circula por el inductor desde el nodo n hasta el nodo $n + 1$.

a)

La ley de las corrientes de Kirchhoff en el nodo n da

$$C \frac{du_n}{dt} = i_{n-1} - i_n.$$

La relación entre tensión y corriente para cada inductor da

$$L \frac{di_n}{dt} = u_n - u_{n+1}.$$

Derivando la primera ecuación y sustituyendo las relaciones de los inductores,

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = (u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1}),$$

de modo que

$$\boxed{LC \ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}.$$

Para una onda sinusoidal viajera con un desfase de retardo Φ por celda, escribimos

$$u_n(t) = U \cos(\omega t - n\Phi).$$

Las tensiones vecinas satisfacen

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \cos \Phi,$$

mientras que $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$. Por tanto,

$$-\omega^2 LC = 2 \cos \Phi - 2,$$

o bien

$$\boxed{\cos \Phi = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}}.$$

Usando $1 - \cos \Phi = 2 \sin^2(\Phi/2)$,

$$\boxed{\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}.$$

En la rama principal,

$$\boxed{\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right)}.$$

Al invertir el sentido de propagación, se invierte el signo del desfase.

Puesto que $\sin^2(\Phi/2) \leq 1$, los modos de onda viajera con desfase real solo son posibles dentro de la banda de frecuencias limitada por

$$\boxed{\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}}.$$

Por encima de esta frecuencia de corte, no existe ningún modo propagante con Φ real.

b)

Una fase constante satisface

$$\omega t - n\Phi = \text{constante}.$$

En consecuencia, el tiempo que tarda una misma fase en avanzar una celda es

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}.$$

Como la longitud de la celda es ℓ , la velocidad de fase es

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}.$$

De forma equivalente, el número de onda es $k = \Phi/\ell$, y $v_{\text{ph}} = \omega/k$.

El enunciado especifica ondas sinusoidales, por lo que esta velocidad de fase es la velocidad solicitada. Si, en cambio, se sigue la envolvente de un paquete de ondas de banda estrecha, su velocidad es la velocidad de grupo. A partir de

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\ell}{2}, \quad 0 \leq k\ell \leq \pi,$$

obtenemos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

En la frecuencia de corte, las tensiones de los condensadores adyacentes oscilan en oposición de fase, $\Phi = \pi$, y la velocidad de grupo se anula.

c)

Cuando la variación de fase a lo largo de una celda es pequeña,

$$\Phi \ll 1,$$

podemos usar

$$\sin \frac{\Phi}{2} \simeq \frac{\Phi}{2}.$$

La relación de dispersión se convierte entonces en

$$\omega^2 LC \simeq \Phi^2, \quad \Phi \simeq \omega \sqrt{LC}.$$

Por tanto, la condición requerida para la frecuencia es

$$\omega \sqrt{LC} \ll 1,$$

y

$$v_{\text{ph}} \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

La velocidad de grupo tiene el mismo límite. Físicamente, este es el régimen de longitudes de onda grandes: una longitud de onda abarca muchas celdas, de modo que la red discreta se comporta aproximadamente como una línea de transmisión continua.

Por ejemplo, la corrección de orden más bajo a la velocidad de fase es

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{24} + O((\omega^2 LC)^2) \right].$$

Por ello, su dependencia de la frecuencia es pequeña bajo la condición indicada. Puesto que LC tiene unidades de s^2 , $\ell/\sqrt{LC}$ tiene unidades de velocidad.

d)

Consideremos una cadena rectilínea infinita de masas idénticas m , con una separación de equilibrio ℓ . Conectemos cada par de masas vecinas mediante un resorte sin masa de constante elástica κ . Las masas se mueven longitudinalmente sin rozamiento, y los resortes obedecen la ley de Hooke.

Sea $x_n(t)$ el desplazamiento de la masa n respecto al equilibrio. El resorte de la derecha ejerce la fuerza

$$\kappa(x_{n+1} - x_n),$$

y el resorte de la izquierda ejerce

$$-\kappa(x_n - x_{n-1}).$$

La segunda ley de Newton da, por tanto,

$$\boxed{m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})}.$$

Para establecer una correspondencia directa con el circuito, definimos $q_n(t)$ como la carga que ha pasado por el inductor n , de modo que

$$i_n = \dot{q}_n.$$

Tomando las magnitudes respecto al equilibrio, la conservación de la carga en el condensador n da

$$Cu_n = q_{n-1} - q_n.$$

La ecuación del inductor se convierte, en consecuencia, en

$$L\ddot{q}_n = u_n - u_{n+1} = \frac{q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}}{C}.$$

Así,

$$\boxed{L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1})},$$

que tiene exactamente la misma forma que la ecuación mecánica bajo la correspondencia

$$\boxed{x_n \leftrightarrow q_n, \quad m \leftrightarrow L, \quad \kappa \leftrightarrow \frac{1}{C}}.$$

Las expresiones de la energía confirman esta correspondencia:

$$E_{LC} = \sum_n \left[\frac{1}{2} L \dot{q}_n^2 + \frac{(q_{n-1} - q_n)^2}{2C} \right],$$

$$E_{\text{mech}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_{n-1} - x_n)^2 \right].$$

La energía almacenada en los inductores corresponde a la energía cinética, y la energía almacenada en los condensadores corresponde a la energía potencial de los resortes.

Finalmente, al sustituir $x_n = A \cos(\omega t - n\Phi)$ en la ecuación mecánica se obtiene

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

idéntica a la relación de dispersión LC cuando $\kappa/m = 1/(LC)$.

La solución se comprobó con la solución oficial.