

IPhO 1987

Theorieaufgaben und Lösungen · Jena, Deutsche Demokratische Republik · 3

Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/1987/

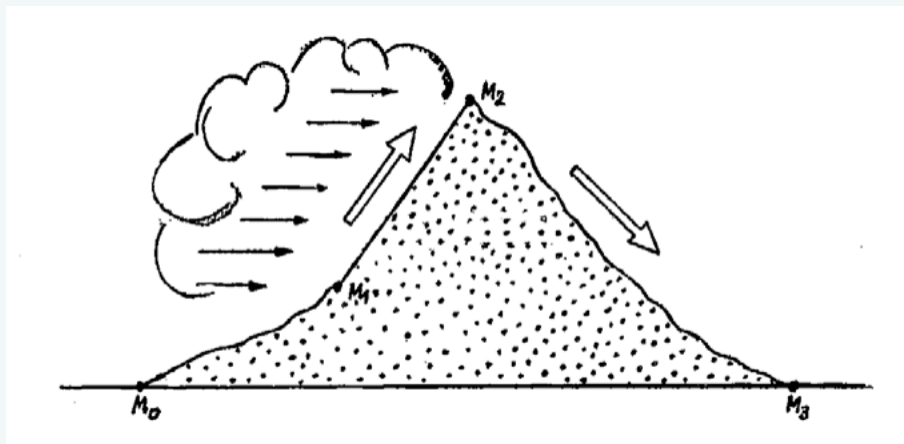
Aufgabe 1: Aufsteigende feuchte Luft

Feuchte Luft strömt adiabatisch über ein Gebirge, wie in der Abbildung dargestellt.

An den meteorologischen Stationen M_0 und M_3 werden gleiche Luftdrücke von 100 kPa gemessen, an der Station M_2 ein Druck von 70 kPa. Die Lufttemperatur bei M_0 beträgt 20°C .

Beim Aufsteigen der Luft setzt bei 84.5 kPa die Wolkenbildung ein.

Betrachten Sie eine Menge feuchter Luft, die mit einer Masse von 2000 kg über jedem Quadratmeter am Gebirge aufsteigt. Diese feuchte Luft erreicht den Gebirgskamm (Station M_2) nach 1500 Sekunden. Während dieses Aufstiegs fallen 2.45 g Wasser pro Kilogramm Luft als Regen aus.



- Bestimmen Sie die Temperatur T_1 bei M_1 , wo sich die Wolkenuntergrenze bildet.
- In welcher Höhe h_1 (bei M_1) über der Station M_0 liegt die Wolkenuntergrenze, wenn eine lineare Abnahme der Luftdichte angenommen wird?
- Welche Temperatur T_2 wird am Gebirgskamm gemessen?
- Bestimmen Sie die Höhe der Wassersäule (Niederschlagshöhe), die der Luftstrom in 3 Stunden als Niederschlag abgibt, unter der Annahme eines gleichmäßigen Regensfalls zwischen den Punkten M_1 und M_2 .
- Welche Temperatur T_3 wird auf der Rückseite des Gebirges an der Station M_3 gemessen? Diskutieren Sie den Zustand der Atmosphäre an der Station M_3 im Vergleich zu dem an der Station M_0 .

Hinweise und Daten

Die Atmosphäre ist als ideales Gas zu behandeln. Der Einfluss des Wasserdampfs auf die spezifische Wärmekapazität und die Luftdichte ist zu vernachlässigen; dasselbe gilt für die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Verdampfungswärme. Die Temperaturen sind auf 1 K genau, die Höhe der Wolkenuntergrenze auf 10 m genau und die Niederschlagshöhe auf 1 mm genau zu bestimmen.

Spezifische Wärmekapazität der Luft im betrachteten Temperaturbereich:

$$c_p = 1005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Luftdichte bei p_0 und T_0 an der Station M_0 :

$$\rho_0 = 1.189 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Spezifische Verdampfungswärme des Wassers innerhalb des Wolkenvolumens:

$$L_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1.4 \quad \text{und} \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. $T_1 \approx 279 \text{ K}$, also 6°C .
2. $h_1 \approx 1410 \text{ m}$.
3. $T_2 \approx 271 \text{ K}$, also ungefähr -2°C , mit der geforderten Genauigkeit.
4. Die Niederschlagshöhe in 3 Stunden beträgt ungefähr 35 mm .
5. $T_3 \approx 300 \text{ K}$, also ungefähr 27°C . Die Luft ist etwa 7 K wärmer als bei M_0 und trockener: der **Föhneffekt**.

Lösung

Alle Temperaturen in thermodynamischen Beziehungen sind absolute Temperaturen. Wir setzen

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad \kappa = \frac{\chi - 1}{\chi} = \frac{2}{7}.$$

Für die spezifische Gaskonstante der Luft gilt

$$R = c_p - c_v, \quad \frac{R}{c_p} = \kappa.$$

Wir verwenden die vorgegebene Näherung, dass Wasser die Wärmekapazitäten und die Dichte der Luft nicht merklich verändert. Es wird angenommen, dass kondensiertes Wasser als Regen aus der Luft entfernt wird.

1. Temperatur beim Einsetzen der Wolkenbildung

Bevor die Luft M_1 erreicht, findet keine Kondensation statt. Die aufsteigende Luft folgt daher der trockenadiabatischen Beziehung, obwohl sie Wasserdampf enthält.

Für ein ideales Gas liefert der erste Hauptsatz bei einer adiabatischen Zustandsänderung

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp.$$

Folglich gilt

$$\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}, \quad Tp^{-\kappa} = \text{konstant.}$$

Somit ist

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{84.5}{100} \right)^{2/7} = 279.38 \text{ K.}$$

Daher ergibt sich

$$\boxed{T_1 \approx 279 \text{ K} \approx 6^\circ \text{C.}}$$

2. Höhe des Wolkenbildungsniveaus

Zunächst bestimmen wir die Dichte bei M_1 . Aus $p = \rho RT$ folgt

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

Damit ist

$$\rho_1 = 1.189 \left(\frac{84.5}{100} \right) \left(\frac{293.15}{279.38} \right) = 1.0542 \text{ kg m}^{-3}.$$

Das hydrostatische Gleichgewicht erfordert

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

Da die Dichte zwischen M_0 und M_1 linear abnimmt, beträgt ihr Mittelwert über dieses Höhenintervall

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Die Integration der hydrostatischen Gleichung liefert daher

$$p_0 - p_1 = gh_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

Somit ist

$$h_1 = \frac{2(p_0 - p_1)}{g(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2(100000 - 84500)}{9.81(1.189 + 1.0542)} = 1408.7 \text{ m.}$$

Mit der geforderten Genauigkeit von 10 m ergibt sich

$$\boxed{h_1 \approx 1410 \text{ m.}}$$

3. Temperatur am Gebirgskamm

Während des Aufstiegs innerhalb der Wolke wird durch Kondensation latente Wärme frei. Obwohl das Luftpaket keine Wärme mit seiner Umgebung austauscht, verringert diese innere Umwandlung latenter Energie seine Abkühlung.

Die kondensierte Masse pro Kilogramm Luft beträgt

$$\Delta r = 2.45 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

also beträgt die pro Kilogramm Luft freigesetzte latente Energie

$$Q_\ell = L_v \Delta r = (2.500 \times 10^6)(2.45 \times 10^{-3}) = 6125 \text{ J kg}^{-1}.$$

Ohne Kondensation wäre die Temperatur am Gebirgskamm

$$T_{2,\text{dry}} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{70}{100} \right)^{2/7} = 264.75 \text{ K}.$$

Die latente Energie entspricht einer Temperaturerhöhung von

$$\frac{Q_\ell}{c_p} = \frac{6125}{1005} = 6.095 \text{ K}.$$

Addiert man diese Erhöhung beim Enddruck, erhält man

$$T_2 \simeq T_{2,\text{dry}} + \frac{Q_\ell}{c_p} = 270.84 \text{ K}.$$

Um zu überprüfen, ob diese Näherung die vorgegebene Genauigkeit erfüllt, sei dr ein Zuwachs der kondensierten Wassermasse pro Kilogramm Luft. Der erste Hauptsatz lautet während der Kondensation

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = L_v dr.$$

Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $p^{-\kappa}$ und anschließende Integration ergeben

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa + \frac{L_v}{c_p} \int_0^{\Delta r} \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa dr.$$

Die Kondensation findet bei Drücken zwischen p_1 und p_2 statt, also gilt

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa \leq \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa \leq 1.$$

Daher ist

$$270.52 \text{ K} \leq T_2 \leq 270.84 \text{ K}.$$

Die einfache Korrektur durch die latente Wärme überschätzt T_2 um höchstens 0.32 K, was deutlich innerhalb der geforderten Genauigkeit liegt. Somit ergibt sich

$$T_2 \approx 271 \text{ K} \quad (\text{ungefähr } -2^\circ\text{C}).$$

4. Niederschlagshöhe in 3 Stunden

Die jedem Quadratmeter zugeordnete Luftmasse beträgt

$$\Sigma = 2000 \text{ kg m}^{-2}.$$

Während eines angegebenen Zeitintervalls von 1500 s liefert sie eine Regenmasse pro Flächeneinheit von

$$\Sigma \Delta r = 2000(2.45 \times 10^{-3}) = 4.90 \text{ kg m}^{-2}.$$

Bei einer stationären Strömung beträgt der in 3 h = 10800 s angesammelte Niederschlag daher

$$\frac{m_w}{A} = 4.90 \frac{10800}{1500} = 35.28 \text{ kg m}^{-2}.$$

Mit der üblichen Dichte von flüssigem Wasser

$$\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3},$$

beträgt die entsprechende Höhe der Wassersäule

$$H = \frac{m_w/A}{\rho_w} = \frac{35.28}{1000} = 0.03528 \text{ m.}$$

Bei gleichmäßigem Regenfall ergibt sich im gesamten angegebenen Regengebiet dieselbe Niederschlagshöhe:

$$H \approx 35 \text{ mm in 3 Stunden.}$$

5. Temperatur und atmosphärische Bedingungen bei M_3

Da das kondensierte Wasser als Regen entfernt wurde, wird die absinkende Luft ungesättigt, wenn die Kompression ihre Temperatur erhöht. Ihr Abstieg verläuft daher trockenadiabatisch:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\kappa.$$

Mit der Näherung aus Teil 3 ergibt sich

$$T_3 \simeq 270.84 \left(\frac{100}{70} \right)^{2/7} = 299.90 \text{ K.}$$

Aus den genaueren Grenzen aus Teil 3 folgt

$$299.54 \text{ K} \leq T_3 \leq 299.90 \text{ K,}$$

also bleibt die Unsicherheit aufgrund des Verlaufs der Kondensation unter 1 K.

Damit ist

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \approx 27^\circ \text{C.}$$

Im Vergleich zu M_0 gilt für die Luft bei M_3 :

- Sie ist ungefähr 7 K wärmer;
- sie hat 2.45 g Wasser pro Kilogramm Luft verloren;
- sie hat eine geringere relative Luftfeuchtigkeit, sowohl aufgrund des Wasserverlusts als auch aufgrund ihrer höheren Temperatur.

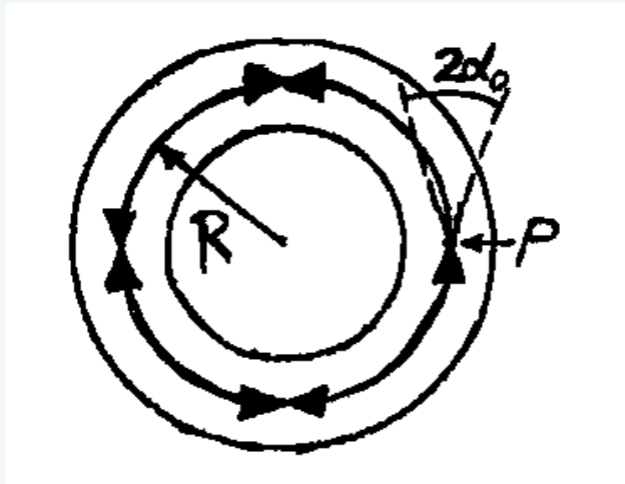
Die beim Aufstieg freigesetzte latente Wärme verringert die Abkühlung, während der entfernte Regen beim Abstieg keine entsprechende Verdunstungskühlung bewirken kann. Der dadurch entstehende warme, trockene Fallwind ist der **Föhnwind**.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Elektronen in einem Magnetfeld

Ein von einer Punktquelle P ausgesandter Elektronenstrahl tritt in Richtung der Feldlinien in das Magnetfeld $\vec{B}$ einer Ringspule (Toroid) ein. Der Öffnungswinkel des Strahls $2 \cdot \alpha_0$ wird als klein angenommen ($2 \cdot \alpha_0 \ll 1$). Die Elektronen werden auf dem mittleren Radius R des Toroids mit der Beschleunigungsspannung V_0 eingeschossen.

Vernachlässigen Sie jegliche Wechselwirkung zwischen den Elektronen. Der Betrag von $\vec{B}$, B , wird als konstant angenommen.



1. Um das Elektron im toroidalen Feld zu führen, ist ein homogenes magnetisches Ablenkfeld $\vec{B}_1$ erforderlich. Berechnen Sie $\vec{B}_1$ für ein Elektron, das sich im Torus auf einer Kreisbahn mit dem Radius R bewegt.
2. Bestimmen Sie den Wert von $\vec{B}$, bei dem sich vier Fokussierungspunkte im Winkelabstand $\pi/2$ ergeben, wie in der Abbildung dargestellt.

Hinweis: Bei der Betrachtung der Elektronenbahnen dürfen Sie die Krümmung des Magnetfeldes vernachlässigen.

3. Der Elektronenstrahl kann ohne ein Ablenkfeld $\vec{B}_1$ nicht im Toroid bleiben, sondern verlässt ihn mit einer systematischen Bewegung (Drift) senkrecht zur Ebene des Toroids.

- a) Zeigen Sie, dass die radiale Abweichung der Elektronen vom Einschussradius endlich ist.
- b) Bestimmen Sie die Richtung der Driftgeschwindigkeit.

Hinweis: Der Öffnungswinkel des Elektronenstrahls kann vernachlässigt werden. Verwenden Sie die Erhaltungssätze für Energie und Drehimpuls.

Gegeben:

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad V_0 = 3 \text{ kV}; \quad R = 50 \text{ mm}$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es bezeichne $e > 0$ den Betrag der Elektronenladung. Wählen wir $\hat{\phi}$ in Richtung des eingeschossenen Strahls und des toroidalen Feldes und definieren wir $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\phi}$; dieser Vektor zeigt für den dargestellten Einschuss aus der Zeichenebene heraus.

- 1. Das homogene Ablenkefeld steht senkrecht zur Ebene des Toroids:

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T } \hat{z}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

- 2. In der vorgegebenen Näherung gilt

$$B = \frac{4mv_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

- 3(a). Die radiale Abweichung ist beschränkt:

$$0 \leq r - R \leq \frac{mv_0}{eB}.$$

Mit dem Feld aus Teil 2 beträgt diese Schranke 12.5 mm. Die tatsächliche maximale Abweichung im Modell mit konstantem B beträgt 5.37 mm.

- 3(b). Die Drift ist **in die Zeichenebene hinein** gerichtet, entgegen dem in Teil 1 erforderlichen Ablenkefeld:

$$\vec{v}_{\text{drift}} \parallel -\hat{z}.$$

Lösung

1. Ablenkefeld

In der nichtrelativistischen Mechanik ergibt die Beschleunigung durch die Spannung V_0

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0,$$

also

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{e}{m} \right) V_0} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11})(3.00 \times 10^3)} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Für das Referenzelektron auf der Kreisbahn ist die Geschwindigkeit parallel zum toroidalen Feld. Daher übt dieses Feld keine Kraft auf dieses Elektron aus.

Das Ablenkefeld muss die nach innen gerichtete Zentripetalkraft liefern. Für $\vec{B}_1 = B_1 \hat{z}$ ist die Lorentzkraft auf das Elektron

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_1 = -ev_0 B_1 \hat{r},$$

die an jedem Punkt der Kreisbahn nach innen zeigt. Somit gilt

$$ev_0 B_1 = \frac{mv_0^2}{R}.$$

Daraus folgt

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z},$$

mit dem Betrag

$$B_1 = \frac{3.2496 \times 10^7}{(1.76 \times 10^{11})(0.050)} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

Das erforderliche Feld ist homogen und zeigt aus der Zeichenebene heraus.

2. Vier Fokussierungspunkte

In diesem Teil wird die Krümmung des Führungsfeldes wie vorgegeben vernachlässigt. Lokal folgt ein Elektron einer Schraubenbahn um die Feldrichtung. Beträgt sein anfänglicher Winkel zur Feldrichtung α , so gilt

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \simeq v_0, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_0 \alpha.$$

Die Querbewegung hat die Zyklotronkreisfrequenz und die Umlaufdauer

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Während der Gyrationradius von α abhängt, ist die Umlaufdauer davon unabhängig. Nach einem vollständigen Umlauf kehrt jedes Elektron zu seiner anfänglichen Querposition zurück.

Der Abstand entlang des Strahls bis zum nächsten Fokus beträgt daher in erster Ordnung im kleinen Öffnungswinkel

$$\ell = v_{\parallel} T \simeq v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

Unterschiede in $v_{\parallel}$ treten erst in der Ordnung α^2 auf, die vernachlässigt wird.

Vier gleichmäßig verteilte Fokussierungspunkte erfordern

$$\ell = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Das Gleichsetzen dieser Abstände ergibt

$$\frac{2\pi m v_0}{eB} = \frac{\pi R}{2},$$

also

$$B = \frac{4m v_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

Die aufeinanderfolgenden erneuten Fokussierungen treten bei azimuthalen Winkelzunahmen von $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ auf; die letzte fällt mit P zusammen. Somit gibt es entlang des Toroids vier verschiedene Fokussierungspositionen, einschließlich P.

3(a). Endliche radiale Abweichung ohne Ablenkfeld

Nun wird $\vec{B}_1$ entfernt und der Öffnungswinkel des Strahls vernachlässigt. Wir verwenden Zylinderkoordinaten um die Symmetrieachse des Toroids:

$$\vec{B} = B\hat{\phi}, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}.$$

Anfangs gilt

$$r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad r\dot{\phi} = v_0.$$

Ein Magnetfeld verrichtet keine Arbeit, daher bleibt der Geschwindigkeitsbetrag konstant:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad (1)$$

Die magnetische Kraft hat keine azimuthale Komponente. Daher bleibt der Drehimpuls bezüglich der Symmetrieachse erhalten:

—

$$mr^2\dot{\phi} = mRv_0, \quad r\dot{\phi} = \frac{Rv_0}{r}. \quad (2)$$

Da die azimutale Geschwindigkeit den Gesamtgeschwindigkeitsbetrag nicht überschreiten kann, folgt aus Gleichung (2) unmittelbar

$$r \geq R. \quad (3)$$

Um eine obere Schranke zu erhalten, verwenden wir die axiale Komponente der Lorentzkraft:

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = eB\dot{z}\hat{r} - eB\dot{r}\hat{z}.$$

Somit gilt

$$m\ddot{z} = -eB\dot{r}.$$

Da B konstant ist, ergibt die Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\dot{z} = -\frac{eB}{m}(r - R) = -\omega(r - R). \quad (4)$$

Setzt man die Gleichungen (2) und (4) in den Energieerhaltungssatz ein, erhält man

$$\dot{r}^2 + \frac{R^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2(r - R)^2 = v_0^2. \quad (5)$$

Jeder Term auf der linken Seite ist nichtnegativ. Folglich gilt

$$\omega^2(r - R)^2 \leq v_0^2.$$

Zusammen mit Gleichung (3) beweist dies

$$0 \leq r - R \leq \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}.$$

Für das in Teil 2 bestimmte Feld gilt $\omega = 4v_0/R$; damit ergibt sich die endliche Schranke

$$r - R \leq \frac{R}{4} = 12.5 \text{ mm}.$$

Gleichung (5) liefert auch den tatsächlichen äußeren Umkehrpunkt. Wir setzen $\dot{r} = 0$ und schreiben $x = (r - R)/R$. Dann gilt

$$16x^2 + \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

Neben dem anfänglichen Umkehrpunkt $x = 0$ erfüllt die positive Nullstelle

$$16x(1+x)^2 = x+2,$$

woraus folgt

$$x = 0.107403, \quad r_{\max} - R = 5.37 \text{ mm}.$$

3(b). Richtung der Drift

Die Gleichungen (3) und (4) ergeben

$$\dot{z} = -\omega(r - R) \leq 0.$$

Somit zeigt die axiale Geschwindigkeit niemals in die $+\hat{z}$ -Richtung.

Bei der Bewegung wird $r = R$ tatsächlich verlassen: Anfangs verschwindet die magnetische Kraft, weil die Geschwindigkeit parallel zu $\vec{B}$ ist, und die radiale Bewegungsgleichung ergibt

$$\ddot{r}(0) = \frac{v_0^2}{R} > 0.$$

Daher gilt kurz nach dem Einschuss $r > R$ und $\dot{z} < 0$. Während die radiale Bewegung zwischen ihren Umkehrpunkten oszilliert, nimmt die axiale Verschiebung in negativer Richtung weiter zu:

$$\langle \dot{z} \rangle = -\omega \langle r - R \rangle < 0.$$

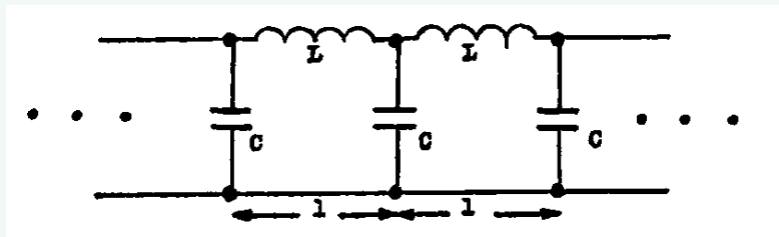
Die systematische Drift ist daher

in die Zeichenebene hinein gerichtet, entgegen $\vec{B}_1$.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Unendliches LC-Netzwerk

Wenn sich sinusförmige Wellen in einem unendlichen LC-Netzwerk ausbreiten (siehe die folgende Abbildung), unterscheiden sich die Phasen der Wechselspannungen an zwei aufeinanderfolgenden Kondensatoren um Φ .



- Bestimmen Sie, wie Φ von ω , L und C abhängt (ω ist die Kreisfrequenz der Sinuswelle).
- Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, wenn die Länge jeder Einheit ℓ beträgt.
- Geben Sie an, unter welchen Bedingungen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen nahezu unabhängig von ω ist. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in diesem Fall.
- Schlagen Sie ein einfaches mechanisches Modell vor, das ein Analogon zur obigen Schaltung darstellt, und leiten Sie Gleichungen her, die die Gültigkeit Ihres Modells belegen.

Formeln:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** Die Dispersionsrelation lautet

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

Wählt man den Hauptwert der Phasenverzögerung $0 \leq \Phi \leq \pi$, so gilt

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

Eine reelle Phasenverzögerung setzt $0 \leq \omega \leq \omega_c = 2/\sqrt{LC}$ voraus.

- **b)** Die Phasengeschwindigkeit der sinusförmigen Welle beträgt

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin \left(\omega \sqrt{LC}/2 \right)}.$$

Der Vollständigkeit halber beträgt die Gruppengeschwindigkeit eines schmalbandigen Wellenpakets

$$v_g = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

- **c)** Für $\omega \sqrt{LC} \ll 1$, gleichbedeutend mit $\Phi \ll 1$, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit näherungsweise frequenzunabhängig:

$$v_{\text{ph}} \simeq v_g \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

- **d)** Ein Analogon ist eine unendliche Kette identischer Massen m , die im Abstand ℓ angeordnet und durch identische masselose Federn mit der Federkonstanten κ verbunden sind. Ihre Gleichung

$$m \ddot{x}_n = \kappa (x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

entspricht der Schaltungsgleichung

$$L \ddot{q}_n = \frac{1}{C} (q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

wobei $\dot{q}_n$ der Strom durch die n -te Spule ist. Die Zuordnung lautet somit $m \leftrightarrow L$, $\kappa \leftrightarrow 1/C$.

Lösung

Wir nehmen ideale, identische Spulen und Kondensatoren sowie einen vernachlässigbaren Widerstand an. Die Kondensatoren werden mit der ganzen Zahl n nummeriert. Es sei $u_n(t)$ die Spannung am Kondensator n , und $i_n(t)$ fließe durch die Spule vom Knoten n zum Knoten $n + 1$.

a)

Die Kirchhoffsche Knotenregel am Knoten n ergibt

$$C \frac{du_n}{dt} = i_{n-1} - i_n.$$

Die Spannungs-Strom-Beziehung für jede Spule liefert

$$L \frac{di_n}{dt} = u_n - u_{n+1}.$$

Durch Differenzieren der ersten Gleichung und Einsetzen der Spulenbeziehungen erhält man

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = (u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1}),$$

also

$$\boxed{LC \ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}.$$

Für eine sinusförmige fortschreitende Welle mit der Phasenverzögerung Φ pro Zelle setzen wir an:

$$u_n(t) = U \cos(\omega t - n\Phi).$$

Die benachbarten Spannungen erfüllen

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \cos \Phi,$$

während $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ gilt. Daher ist

$$-\omega^2 LC = 2 \cos \Phi - 2,$$

oder

$$\boxed{\cos \Phi = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}}.$$

Mit $1 - \cos \Phi = 2 \sin^2(\Phi/2)$ folgt

$$\boxed{\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}}.$$

Auf dem Hauptzweig gilt

$$\boxed{\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right)}.$$

Bei Umkehrung der Ausbreitungsrichtung wechselt die vorzeichenbehaftete Phasenverzögerung ihr Vorzeichen.

Da $\sin^2(\Phi/2) \leq 1$ gilt, sind fortschreitende Wellenmoden mit reeller Phasenverzögerung nur innerhalb des Frequenzbands möglich, dessen obere Grenze durch

$$\boxed{\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}}$$

gegeben ist. Oberhalb dieser Grenzfrequenz gibt es keine sich ausbreitende Mode mit reellem Φ .

b)

Für eine konstante Phase gilt

$$\omega t - n\Phi = \text{konstant.}$$

Folglich beträgt die Zeit, in der dieselbe Phase um eine Zelle vorrückt,

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}.$$

Da die Zellenlänge ℓ beträgt, ist die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}.$$

Gleichwertig dazu ist die Wellenzahl $k = \Phi/\ell$, und es gilt $v_{\text{ph}} = \omega/k$.

Die Aufgabe gibt Sinuswellen vor, daher ist diese Phasengeschwindigkeit die gesuchte Geschwindigkeit. Verfolgt man stattdessen die Einhüllende eines schmalbandigen Wellenpakets, so ist deren Geschwindigkeit die Gruppengeschwindigkeit. Aus

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\ell}{2}, \quad 0 \leq k\ell \leq \pi,$$

erhalten wir

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

Bei der Grenzfrequenz schwingen die Spannungen benachbarter Kondensatoren gegenphasig, $\Phi = \pi$, und die Gruppengeschwindigkeit verschwindet.

c)

Wenn die Phasenänderung über eine Zelle klein ist,

$$\Phi \ll 1,$$

können wir die Näherung

$$\sin \frac{\Phi}{2} \simeq \frac{\Phi}{2}$$

verwenden. Die Dispersionsrelation wird dann zu

$$\omega^2 LC \simeq \Phi^2, \quad \Phi \simeq \omega \sqrt{LC}.$$

Die gesuchte Frequenzbedingung lautet somit

$$\omega \sqrt{LC} \ll 1,$$

und es gilt

$$v_{\text{ph}} \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

Die Gruppengeschwindigkeit hat denselben Grenzwert. Physikalisch handelt es sich um den Bereich großer Wellenlängen: Innerhalb einer Wellenlänge liegen viele Zellen, sodass sich das diskrete Netzwerk näherungsweise wie eine kontinuierliche Übertragungsleitung verhält.

Beispielsweise lautet die führende Korrektur zur Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{24} + O((\omega^2 LC)^2) \right].$$

Daher ist ihre Frequenzabhängigkeit unter der angegebenen Bedingung gering. Da LC die Einheit s^2 hat, hat $\ell/\sqrt{LC}$ die Einheit einer Geschwindigkeit.

d)

Wir betrachten eine unendliche geradlinige Kette identischer Massen m , deren Abstand im Gleichgewicht ℓ beträgt. Jedes Paar benachbarter Massen wird durch eine masselose Feder mit der Federkonstanten κ verbunden. Die Massen bewegen sich reibungsfrei in Längsrichtung, und die Federn gehorchen dem Hookeschen Gesetz.

Es sei $x_n(t)$ die Auslenkung der Masse n aus ihrer Gleichgewichtslage. Die rechte Feder übt die Kraft

$$\kappa(x_{n+1} - x_n),$$

aus, und die linke Feder übt die Kraft

$$-\kappa(x_n - x_{n-1})$$

aus. Das zweite Newtonsche Gesetz liefert daher

$$\boxed{m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})}.$$

Um eine direkte Entsprechung zur Schaltung herzustellen, definieren wir $q_n(t)$ als die Ladung, die durch die Spule n geflossen ist, sodass

$$i_n = \dot{q}_n.$$

Bezieht man die Größen auf das Gleichgewicht, so ergibt die Ladungserhaltung am Kondensator n

$$Cu_n = q_{n-1} - q_n.$$

Die Spulengleichung wird folglich zu

$$L\ddot{q}_n = u_n - u_{n+1} = \frac{q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}}{C}.$$

Somit gilt

$$\boxed{L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1})},$$

was unter der Zuordnung

$$\boxed{x_n \leftrightarrow q_n, \quad m \leftrightarrow L, \quad \kappa \leftrightarrow \frac{1}{C}}$$

genau dieselbe Form wie die mechanische Gleichung hat.

Die Energieausdrücke bestätigen diese Entsprechung:

$$E_{\text{LC}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} L \dot{q}_n^2 + \frac{(q_{n-1} - q_n)^2}{2C} \right],$$

$$E_{\text{mech}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_{n-1} - x_n)^2 \right].$$

Die in den Spulen gespeicherte Energie entspricht der kinetischen Energie, und die Kondensatorenergie entspricht der potenziellen Energie der Federn.

Setzt man schließlich $x_n = A \cos(\omega t - n\Phi)$ in die mechanische Gleichung ein, so erhält man

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

was für $\kappa/m = 1/(LC)$ mit der LC-Dispersionsrelation identisch ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.