

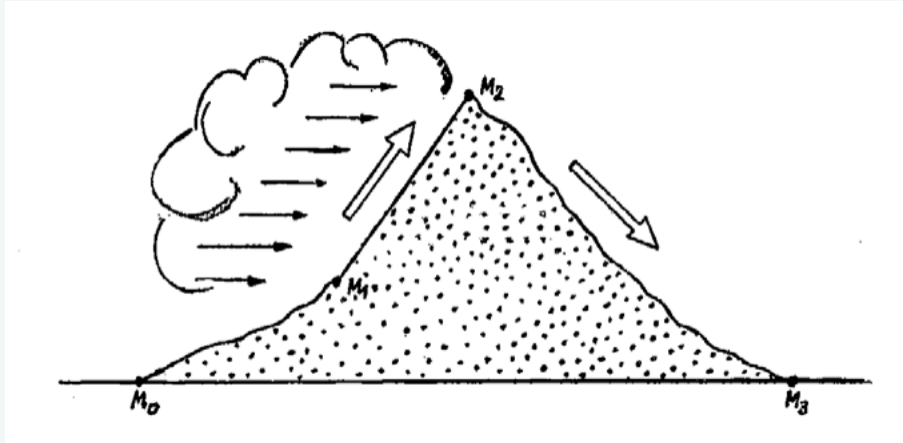
المسألة 1: صعود الهواء الرطب

يتدفق هواء رطب عبر سلسلة جبلية تدفقاً كظومياً، كما هو موضح في الشكل.

يُقاس ضغط جوي متساوٍ مقداره 100 kPa في محطتي الأرصاد الجوية M_0 و M_3 ، وضغط مقداره 70 kPa في المحطة M_2 . درجة حرارة الهواء عند M_0 هي 20°C .

أثناء صعود الهواء، يبدأ تشكُّل السحب عند ضغط 84.5 kPa.

اعتبر كمية من الهواء الرطب تصعد الجبل، كتلتها 2000 kg فوق كل متر مربع. يصل هذا الهواء الرطب إلى الحافة الجبلية (المحطة M_2) بعد 1500 ثانية. وخلال هذا الصعود، تهطل كمية مقدارها 2.45 g من الماء لكل كيلوغرام من الهواء على هيئة مطر.



1. حدّد درجة الحرارة T_1 عند M_1 ، حيث تتشكّل قاعدة السحب.
2. ما ارتفاع h_1 (عند M_1) لقاعدة السحب فوق المحطة M_0 ، بافتراض تناقص كثافة الهواء خطياً؟
3. ما درجة الحرارة T_2 التي تُقاس عند حافة السلسلة الجبلية؟
4. حدّد ارتفاع عمود الماء (مقدار الهطول) الذي يهطل من تيار الهواء خلال 3 ساعات، بافتراض هطول مطري متجانس بين النقطتين M_1 و M_2 .
5. ما درجة الحرارة T_3 التي تُقاس خلف السلسلة الجبلية عند المحطة M_3 ؟ ناقش حالة الجو عند المحطة M_3 مقارنةً بحالته عند المحطة M_0 .

إرشادات ومعطيات

يُعامل الهواء الجوي بوصفه غازاً مثاليًا. تُهمل تأثيرات بخار الماء في السعة الحرارية النوعية وكثافة الهواء؛ كما يُهمل اعتماد الحرارة الكامنة النوعية للتبخّر على درجة الحرارة. تُحدّد درجات الحرارة بدقة 1 K، وارتفاع قاعدة السحب بدقة 10 m، ومقدار الهطول بدقة 1 mm.

السعة الحرارية النوعية للهواء الجوي في نطاق درجات الحرارة المعني:

$$c_p = 1005 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

كثافة الهواء عند p_0 و T_0 في المحطة M_0 :

$$\rho_0 = 1.189 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

الحرارة الكامنة النوعية لتبخّر الماء داخل حجم السحابة:

$$L_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1.4 \quad \text{و} \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. $T_1 \approx 279 \text{ K}$ ، أو 6°C .

2. $h_1 \approx 1410 \text{ m}$.

3. $T_2 \approx 271 \text{ K}$ ، أو نحو -2°C ، وفق الدقة المطلوبة.

4. مقدار الهطول خلال 3 ساعات يساوي تقريباً 35 mm .

5. $T_3 \approx 300 \text{ K}$ ، أو نحو 27°C . الهواء أدفأ بنحو 7 K منه عند M_0 ، وأكثر جفافاً: تأثير الفون.

الحل

جميع درجات الحرارة في العلاقات الديناميكية الحرارية هي درجات حرارة مطلقة. نضع

$$T_0 = 293.15 \text{ K}, \quad \kappa = \frac{\chi - 1}{\chi} = \frac{2}{7}.$$

يحقق ثابت الغاز النوعي للهواء

$$R = c_p - c_v, \quad \frac{R}{c_p} = \kappa.$$

نستخدم التقريب المعطى بأن الماء لا يغيّر السعات الحرارية للهواء أو كثافته تغيراً ملحوظاً. ونفترض أن الماء المتكثف يُزال على هيئة مطر.

1. درجة الحرارة عند بدء تشكّل السحب

لا يحدث تكثف قبل الوصول إلى M_1 . لذلك يخضع الهواء الصاعد للعلاقة الكظومية الجافة، على الرغم من احتوائه على بخار الماء.

بالنسبة إلى غاز مثالي، يعطي القانون الأول للديناميكا الحرارية لتحول كظومي

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp.$$

ومن ثم،

$$\frac{dT}{T} = \kappa \frac{dp}{p}, \quad \text{ثابت} = Tp^{-\kappa}.$$

إذن

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{84.5}{100} \right)^{2/7} = 279.38 \text{ K}.$$

وعليه،

$$T_1 \approx 279 \text{ K} \approx 6^\circ \text{C}.$$

2. ارتفاع مستوى تشكّل السحب

نحدّد أولاً الكثافة عند M_1 من $p = \rho RT$.

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{T_0}{T_1}.$$

ومن ثم

$$\rho_1 = 1.189 \left(\frac{84.5}{100} \right) \left(\frac{293.15}{279.38} \right) = 1.0542 \text{ kg m}^{-3}.$$

يتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g.$$

بما أن الكثافة تتناقص خطياً بين M_0 و M_1 ، فإن متوسطها على هذا المجال من الارتفاع هو

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

لذلك يعطي تكامل معادلة الاتزان الهيدروستاتيكي

$$p_0 - p_1 = gh_1 \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}.$$

إذن

$$h_1 = \frac{2(p_0 - p_1)}{g(\rho_0 + \rho_1)} = \frac{2(100000 - 84500)}{9.81(1.189 + 1.0542)} = 1408.7 \text{ m}.$$

وفق الدقة المطلوبة، وهي 10 m،

$$\boxed{h_1 \approx 1410 \text{ m}.$$

3. درجة الحرارة عند الحافة الجبلية

أثناء الصعود المصحوب بالسحب، يحرّر التكثف حرارة كامنة. وعلى الرغم من أن كتلة الهواء لا تتبادل حرارة مع محيطها، فإن هذا التحول الداخلي للطاقة الكامنة يحدّ من تبردها.

الكتلة المتكثفة لكل كيلوغرام من الهواء هي

$$\Delta r = 2.45 \times 10^{-3} \text{ kg kg}^{-1},$$

وبالتالي فإن الطاقة الكامنة المتحررة لكل كيلوغرام من الهواء هي

$$Q_\ell = L_v \Delta r = (2.500 \times 10^6)(2.45 \times 10^{-3}) = 6125 \text{ J kg}^{-1}.$$

في غياب التكثف، تكون درجة الحرارة عند الحافة الجبلية

$$T_{2,\text{dry}} = T_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^\kappa = 293.15 \left(\frac{70}{100} \right)^{2/7} = 264.75 \text{ K}.$$

تقابل الطاقة الكامنة زيادة في درجة الحرارة مقدارها

$$\frac{Q_\ell}{c_p} = \frac{6125}{1005} = 6.095 \text{ K}.$$

بإضافة هذه الزيادة عند الضغط النهائي نحصل على

$$T_2 \simeq T_{2,\text{dry}} + \frac{Q_\ell}{c_p} = 270.84 \text{ K}.$$

للتحقق من أن هذا التقريب يفي بالدقة المحددة، لتكن dr زيادة تفاضلية في كمية الماء المتكثف لكل كيلوغرام من الهواء. يُكتب القانون الأول أثناء التكثف على الصورة

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = L_v dr.$$

بالضرب في عامل التكامل $p^{-\kappa}$ ثم التكامل نحصل على

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa + \frac{L_v}{c_p} \int_0^{\Delta r} \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa dr.$$

يحدث التكثف عند ضغوط بين p_1 و p_2 ، لذا

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^\kappa \leq \left(\frac{p_2}{p(r)} \right)^\kappa \leq 1.$$

وعليه،

$$270.52 \text{ K} \leq T_2 \leq 270.84 \text{ K}.$$

يعطي التصحيح البسيط للحرارة الكامنة قيمة أعلى من T_2 بما لا يزيد على 0.32 K ، وهو فرق أصغر بكثير من هامش الدقة المطلوب. إذن

$$\boxed{T_2 \approx 271 \text{ K} \quad (-2^\circ \text{C} \text{ تقريباً})}$$

4. مقدار الهطول خلال 3 ساعات

كتلة الهواء المقابلة لكل متر مربع هي

$$\Sigma = 2000 \text{ kg m}^{-2}.$$

خلال فترة واحدة مدتها $s \ 1500$ كما ورد في المعطيات، تنتج عنها كتلة من المطر لكل وحدة مساحة مقدارها

$$\Sigma \Delta r = 2000(2.45 \times 10^{-3}) = 4.90 \text{ kg m}^{-2}.$$

لذلك، بالنسبة إلى التيار المستقر، تكون كتلة المطر المتراكمة خلال $3 \text{ h} = 10800 \text{ s}$

$$\frac{m_w}{A} = 4.90 \frac{10800}{1500} = 35.28 \text{ kg m}^{-2}.$$

باستخدام القيمة المعتادة لكثافة الماء السائل

$$\rho_w \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3},$$

يكون الارتفاع المقابل لعمود الماء

$$H = \frac{m_w/A}{\rho_w} = \frac{35.28}{1000} = 0.03528 \text{ m}.$$

يعطي الهطول المطري المتجانس مقدار الهطول نفسه في جميع أنحاء منطقة المطر المحددة:

$$\boxed{H \approx 35 \text{ mm} \text{ خلال 3 ساعات}}$$

5. درجة الحرارة والظروف الجوية عند M_3

بعد إزالة الماء المتكثف على هيئة مطر، يصبح الهواء الهابط غير مشبع، إذ يرفع الانضغاط درجة حرارته. لذلك يكون هبوطه كظومياً جافاً:

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^\kappa.$$

باستخدام التقريب من الجزء 3،

$$T_3 \simeq 270.84 \left(\frac{100}{70} \right)^{2/7} = 299.90 \text{ K}.$$

تقتضي الحدود الأدق من الجزء 3 أن

$$299.54 \text{ K} \leq T_3 \leq 299.90 \text{ K},$$

وبذلك يبقى عدم اليقين الناشئ عن مسار التكثف أقل من 1 K .

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \approx 27^\circ \text{C}.$$

مقارنةً بالهواء عند M_0 ، فإن الهواء عند M_3 :

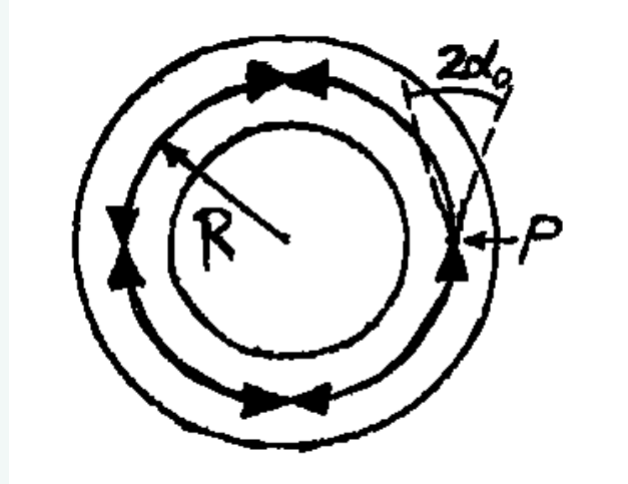
- أدفأ بنحو 7 K ؛
- فقد 2.45 g من الماء لكل كيلوغرام من الهواء؛
- ذو رطوبة نسبية أقل، بسبب فقد الماء وارتفاع درجة حرارته معاً.

تحدّ الحرارة الكامنة المتحررة أثناء الصعود من التبرّد، في حين لا يمكن للمطر الذي أُزيل أن يحدث تبرّداً تبخرياً مقابلًا أثناء الهبوط. وتُعرف الرياح الهابطة الدافئة والجافة الناتجة باسم **تأثير الفون**.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: إلكترونات في مجال مغناطيسي

تدخل حزمة من الإلكترونات المنبعثة من مصدر نقطي P المجال المغناطيسي $\vec{B}$ ملف حلقي في اتجاه خطوط المجال. يُفترض أن زاوية انفرج الحزمة $2 \cdot \alpha_0$ صغيرة ($2 \cdot \alpha_0 \ll 1$). تُحقن الإلكترونات عند نصف القطر المتوسط R للملف الحلقي بجهد تسريع V_0 .
أهمّل أي تفاعل بين الإلكترونات. يُفترض أن مقدار $\vec{B}$ ، وهو B ، ثابت.



1. لتوجيه الإلكترون في المجال الحلقي، يلزم مجال مغناطيسي متجانس للانحراف $\vec{B}_1$. احسب $\vec{B}_1$ لإلكترون يتحرك في مدار دائري نصف قطره R داخل الملف الحلقي.

2. حدّد قيمة $\vec{B}$ التي تعطي أربع نقاط تركيز تفصل بينها زاوية $\pi/2$ ، كما هو موضح في الرسم.

ملاحظة: عند دراسة مسارات الإلكترونات، يمكنك إهمال انحناء المجال المغناطيسي.

3. لا يمكن لحزمة الإلكترونات أن تبقى داخل الملف الحلقي من دون مجال الانحراف $\vec{B}_1$ ، بل ستغادره بحركة منتظمة الاتجاه (انجراف) عمودية على مستوى الملف الحلقي.

(a) بيّن أن الانحراف الشعاعي للإلكترونات عن نصف قطر الحقن محدود.

(b) حدّد اتجاه سرعة الانجراف.

ملاحظة: يمكن إهمال زاوية انفرج حزمة الإلكترونات. استخدم قانوني حفظ الطاقة وحفظ الزخم الزاوي.

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad V_0 = 3 \text{ kV}; \quad R = 50 \text{ mm}$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لتكن $e > 0$ مقدار شحنة الإلكترون. خذ $\hat{\phi}$ في اتجاه الحزمة المحقونة والمجال الحلقي، وعرف $\hat{z} = \hat{r} \times \hat{\phi}$ ، وهو متجه إلى خارج الصفحة في حالة الحقن الموضحة.

- 1. مجال الانحراف المتجانس عمودي على مستوى الملف الحلقي:

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{z} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T } \hat{z}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

- 2. ضمن التقريب المحدد،

$$B = \frac{4mv_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

- 3(a). الانحراف الشعاعي محدود:

$$0 \leq r - R \leq \frac{mv_0}{eB}.$$

عند استخدام المجال الوارد في الجزء 2، يكون هذا الحد 12.5 mm. أما أقصى انحراف فعلي في نموذج B الثابت فهو 5.37 mm.

- 3(b). يكون الانحراف إلى داخل الصفحة، في الاتجاه المعاكس لمجال الانحراف المطلوب في الجزء 1:

$$\vec{v}_{\text{drift}} \parallel -\hat{z}.$$

الحل

1. مجال الانحراف

باستخدام الميكانيكا غير النسبية، يعطي التسريع عبر فرق الجهد V_0

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0,$$

ومن ثم

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{e}{m} \right) V_0} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11})(3.00 \times 10^3)} = 3.25 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

بالنسبة إلى الإلكترون المرجعي في المدار الدائري، تكون السرعة موازية للمجال الحلقي. ولذلك لا يؤثر هذا المجال بقوة في هذا الإلكترون.

يجب أن يوفر مجال الانحراف القوة الجاذبة المركزية المتجهة إلى الداخل. عندما يكون $\vec{B}_1 = B_1 \hat{z}$ ، تكون قوة لورنتز المؤثرة في الإلكترون

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}_1 = -ev_0 B_1 \hat{r},$$

وهي تتجه إلى الداخل في كل موضع على الدائرة. إذن

$$ev_0 B_1 = \frac{mv_0^2}{R}.$$

$$\vec{B}_1 = \frac{mv_0}{eR} \hat{\mathbf{z}},$$

ومقداره

$$B_1 = \frac{3.2496 \times 10^7}{(1.76 \times 10^{11})(0.050)} = 3.69 \times 10^{-3} \text{ T}.$$

المجال المطلوب متجانس ويتجه إلى خارج مستوى الرسم.

2. أربع نقاط تركيز

في هذا الجزء، أهمل انحناء المجال الموجّه وفقاً للتعليمات. محلياً، يتبع الإلكترون مساراً لولبياً حول اتجاه المجال. إذا كانت زاويته الابتدائية مع المجال هي α ، فإن

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha \simeq v_0, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha \simeq v_0 \alpha.$$

للحركة المستعرضة تردد زاوي سيكلوتروني وزمن دوري هما

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

على الرغم من اعتماد نصف قطر الدوران على α ، فإن الزمن الدوري لا يعتمد عليها. بعد دورة كاملة، يعود كل إلكترون إلى موضعه المستعرض الابتدائي.

لذلك تكون المسافة على امتداد الحزمة إلى البؤرة التالية، حتى الرتبة الأولى في زاوية الانفراج الصغيرة،

$$\ell = v_{\parallel} T \simeq v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

لا تظهر الفروق في $v_{\parallel}$ إلا عند الرتبة α^2 ، وهي مهمة.

يتطلب وجود أربع نقاط تركيز متساوية التباعد أن يكون

$$\ell = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

وبمساواة هاتين المسافتين نحصل على

$$\frac{2\pi m v_0}{eB} = \frac{\pi R}{2},$$

ومن ثم

$$B = \frac{4m v_0}{eR} = 4B_1 = 1.48 \times 10^{-2} \text{ T}.$$

تحدث عمليات إعادة التركيز المتتالية عند تقدّم زاوي سمتي مقداره $2\pi, 3\pi/2, \pi, \pi/2$ ؛ وتتطابق الأخيرة مع P. وهكذا توجد أربعة مواضع تركيز متميزة حول الملف الحلقي، بما فيها P.

3(a). محدودية الانحراف الشعاعي في غياب مجال الانحراف

أزل الآن $\vec{B}_1$ وأهمل انفراج الحزمة. استخدم الإحداثيات الأسطوانية حول محور تناظر الملف الحلقي:

$$\vec{B} = B\hat{\phi}, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}.$$

في البداية،

$$r = R, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0, \quad r\dot{\phi} = v_0.$$

لا يبذل المجال المغناطيسي شغلاً، ولذلك يظل مقدار السرعة ثابتاً:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2. \quad (1)$$

ليس للقوة المغناطيسية مركبة سمتية. ولذلك يُحفظ الزخم الزاوي حول محور التناظر:

$$mr^2\dot{\phi} = mRv_0, \quad r\dot{\phi} = \frac{Rv_0}{r}. \quad (2)$$

بما أن مقدار السرعة السمتية لا يمكن أن يتجاوز مقدار السرعة الكلية، فإن المعادلة (2) تقتضي مباشرةً

$$r \geq R. \quad (3)$$

للحصول على حد أعلى، استخدم المركبة المحورية لقوة لورنتز:

$$-e\vec{v} \times \vec{B} = eB\dot{z}\hat{r} - eB\dot{r}\hat{z}.$$

إذن

$$m\ddot{z} = -eB\dot{r}.$$

بما أن B ثابت، فإن التكامل مع تطبيق الشروط الابتدائية يعطي

$$\dot{z} = -\frac{eB}{m}(r - R) = -\omega(r - R). \quad (4)$$

بالتعويض بالمعادلتين (2) و(4) في قانون حفظ الطاقة نحصل على

$$\dot{r}^2 + \frac{R^2 v_0^2}{r^2} + \omega^2(r - R)^2 = v_0^2. \quad (5)$$

كل حد في الطرف الأيسر غير سالب. وبناءً على ذلك،

$$\omega^2(r - R)^2 \leq v_0^2.$$

وبالاقتران مع المعادلة (3)، يثبت هذا أن

$$0 \leq r - R \leq \frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{eB}.$$

بالنسبة إلى المجال الذي وجدناه في الجزء 2، فإن $\omega = 4v_0/R$ ، مما يعطي الحد المحدود

$$r - R \leq \frac{R}{4} = 12.5 \text{ mm}.$$

تعطي المعادلة (5) أيضاً نقطة الانقلاب الخارجية الفعلية. ضع $\dot{r} = 0$ واكتب $x = (r - R)/R$. عندئذ

$$16x^2 + \frac{1}{(1+x)^2} = 1.$$

إلى جانب نقطة الانقلاب الابتدائية $x = 0$ ، يحقق الجذر الموجب

$$16x(1+x)^2 = x + 2,$$

فنحصل على

$$x = 0.107403, \quad r_{\max} - R = 5.37 \text{ mm}.$$

3(b). اتجاه الانجراف

تعطي المعادلتان (3) و(4)

$$\dot{z} = -\omega(r - R) \leq 0.$$

إذن لا تتجه السرعة المحورية مطلقاً في الاتجاه $+\hat{z}$.

تغادر الحركة بالفعل الموضع $r = R$: ففي البداية تنعدم القوة المغناطيسية لأن السرعة موازية لـ $\vec{B}$ ، وتعطي معادلة الحركة الشعاعية

$$\ddot{r}(0) = \frac{v_0^2}{R} > 0.$$

ومن ثم يصبح $r > R$ بعد الحقن بوقت قصير، وتكون $\dot{z} < 0$. وبينما تتذبذب الحركة الشعاعية بين نقطتي انقلابها، تستمر الإزاحة المحورية في التراكم في الاتجاه السالب:

$$\langle \dot{z} \rangle = -\omega \langle r - R \rangle < 0.$$

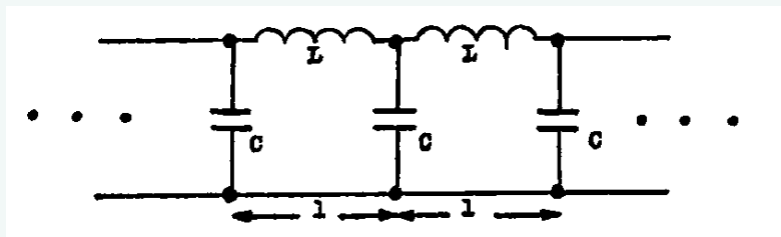
وعليه يكون الانجراف المنتظم الاتجاه

$$\vec{B}_1 \text{ إلى داخل الصفحة، في الاتجاه المعاكس لـ}$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: شبكة LC لانهاية

عندما تنتشر موجات جيبية في شبكة LC لانهاية (انظر الشكل أدناه)، يختلف طور الجهد المتناوب بين طرفي مكثفين متتاليين بمقدار Φ .



- حدد كيف تعتمد Φ على ω و L و C (حيث ω هو التردد الزاوي للموجة الجيبية).
 - حدد سرعة انتشار الموجات إذا كان طول كل وحدة هو l .
 - بين الشروط التي تكون عندها سرعة انتشار الموجات مستقلة تقريباً عن ω . وحدد السرعة في هذه الحالة.
 - اقترح نموذجاً ميكانيكياً بسيطاً يناظر الدائرة السابقة، واشتق معادلات تثبت صحة نموذجك.
- صيغ رياضية:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) علاقة التشتت هي

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

بأخذ تأخر الطور الرئيسي $0 \leq \Phi \leq \pi$

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

يتطلب تأخر طور حقيقي أن يكون $0 \leq \omega \leq \omega_c = 2/\sqrt{LC}$

- (b) سرعة الطور للموجة الجيبية هي

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}.$$

واستكمالاً للعرض، فإن سرعة المجموعة لحزمة موجية ضيقة هي

$$v_g = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

- (c) عندما يكون $\omega \sqrt{LC} \ll 1$ ، أو على نحو مكافئ $\Phi \ll 1$ ، تكون سرعة الانتشار مستقلة تقريباً عن التردد:

$$v_{\text{ph}} \simeq v_g \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}.$$

- (d) تمثل سلسلة لانهائية من كتل متماثلة m ، تفصل بينها مسافة ℓ وتربطها نوابض متماثلة عديمة الكتلة ثابت مرونتها κ ، نموذجاً مناظراً. فمعادلتها

$$m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})$$

تطابق معادلة الدائرة

$$L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

حيث $\dot{q}_n$ هو التيار المار عبر المحث ذي الرقم n . ومن ثم يكون التناظر هو $L \leftrightarrow m$ و $1/C \leftrightarrow \kappa$.

الحل

نفترض أن المحثات مثالية ومتماثلة، وكذلك المكثفات، وأن المقاومة مهملة. نرقم المكثفات بالعدد الصحيح n . ليكن $u_n(t)$ الجهد بين طرفي المكثف n ، وليكن $i_n(t)$ التيار المار عبر المحث من العقدة n إلى العقدة $n+1$.

(a)

يعطي قانون كيرشوف للتيار عند العقدة n

$$C \frac{du_n}{dt} = i_{n-1} - i_n.$$

وتعطي العلاقة بين الجهد والتيار لكل محث

$$L \frac{di_n}{dt} = u_n - u_{n+1}.$$

باشتقاق المعادلة الأولى والتعويض بعلاقات المحثات،

$$LC \frac{d^2 u_n}{dt^2} = (u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n+1}),$$

ومن ثم

$$LC \ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}.$$

لموجة جيبية منتقلة ذات تأخر طور مقداره Φ لكل خلية، نكتب

$$u_n(t) = U \cos(\omega t - n\Phi).$$

يحقق الجهدان المجاوران العلاقة

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n \cos \Phi,$$

في حين أن $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ لذلك

$$-\omega^2 LC = 2 \cos \Phi - 2,$$

أو

$$\cos \Phi = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2}.$$

باستخدام $1 - \cos \Phi = 2 \sin^2(\Phi/2)$,

$$\omega^2 LC = 4 \sin^2 \frac{\Phi}{2}.$$

وعلى الفرع الرئيسي،

$$\Phi = 2 \arcsin \left(\frac{\omega \sqrt{LC}}{2} \right).$$

يؤدي عكس اتجاه الانتشار إلى عكس إشارة تأخر الطور.

بما أن $\sin^2(\Phi/2) \leq 1$ ، فإن أنماط الموجات المنتقلة ذات الطور الحقيقي لا تكون ممكنة إلا ضمن نطاق الترددات الذي يحدّه

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

فوق تردد القطع هذا، لا يوجد نمط منتشر تكون فيه Φ حقيقية.

(b)

يحقق الطور الثابت العلاقة

$$\omega t - n\Phi = \text{ثابت}.$$

وبالتالي، فإن الزمن اللازم لتقدّم الطور نفسه بمقدار خلية واحدة هو

$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}.$$

وبما أن طول الخلية هو ℓ ، فإن سرعة الطور هي

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\omega \ell}{\Phi} = \frac{\omega \ell}{2 \arcsin(\omega \sqrt{LC}/2)}.$$

وبصورة مكافئة، فإن العدد الموجي هو $k = \Phi/\ell$ و $v_{\text{ph}} = \omega/k$.

تحدّد المسألة موجات جيبيّة، لذا فإن سرعة الطور هذه هي السرعة المطلوبة. أما إذا تتبّعنا غلاف حزمة موجية ضيقة، فإن سرعته هي سرعة المجموعة. ومن

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{k\ell}{2}, \quad 0 \leq k\ell \leq \pi,$$

نحصل على

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \cos \frac{\Phi}{2} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}.$$

عند تردد القطع، تنذبذ جهود المكثفات المتجاورة في تعاكس طوري، $\Phi = \pi$ ، وتنعدم سرعة المجموعة.

(c)

عندما يكون تغير الطور عبر خلية واحدة صغيراً،

$$\Phi \ll 1,$$

يمكننا استخدام

$$\sin \frac{\Phi}{2} \simeq \frac{\Phi}{2}.$$

فتصبح علاقة التشتت

$$\omega^2 LC \simeq \Phi^2, \quad \Phi \simeq \omega \sqrt{LC}.$$

وعليه، فإن الشرط المطلوب على التردد هو

$$\boxed{\omega \sqrt{LC} \ll 1},$$

و

$$\boxed{v_{\text{ph}} \simeq \frac{\ell}{\sqrt{LC}}}.$$

لسرعة المجموعة النهائية نفسها. وفيزيائياً، هذا هو نظام الأطوال الموجية الطويلة: إذ يضم طول موجي واحد عدداً كبيراً من الخلايا، فتسلك الشبكة المتقطعة سلوك خط نقل متصل تقريباً.

فعلى سبيل المثال، حد التصحيح الأول لسرعة الطور هو

$$v_{\text{ph}} = \frac{\ell}{\sqrt{LC}} \left[1 - \frac{\omega^2 LC}{24} + O((\omega^2 LC)^2) \right].$$

ومن ثم يكون اعتمادها على التردد ضعيفاً تحت الشرط المذكور. وبما أن وحدة LC هي s^2 ، فإن $\ell/\sqrt{LC}$ له وحدة السرعة.

(d)

لننظر في سلسلة مستقيمة لانتهائية من كتل متماثلة m ، تفصل بينها عند الاتزان مسافة ℓ . نصل كل زوج من الكتل المتجاورة بنابض عديم الكتلة ثابت مرونته κ . تتحرك الكتل طولياً دون احتكاك، وتخضع النوابض لقانون هوك.

ليكن $x_n(t)$ إزاحة الكتلة n عن موضع اتزانها. يؤثر النابض الأيمن بالقوة

$$\kappa(x_{n+1} - x_n),$$

ويؤثر النابض الأيسر بالقوة

$$-\kappa(x_n - x_{n-1}).$$

ومن ثم يعطي قانون نيوتن الثاني

$$\boxed{m\ddot{x}_n = \kappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1})}.$$

لإثبات تناظر مباشر مع الدائرة، نعرّف $q_n(t)$ بأنها الشحنة التي مرّت عبر المحث n ، بحيث

$$\dot{q}_n = i_n.$$

بأخذ الكميات بالنسبة إلى قيمها عند الاتزان، يعطي حفظ الشحنة عند المكثف n

$$Cu_n = q_{n-1} - q_n.$$

وبالتالي تصبح معادلة المحث

$$L\ddot{q}_n = u_n - u_{n+1} = \frac{q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}}{C}.$$

وعليه

$$L\ddot{q}_n = \frac{1}{C}(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}),$$

وهي تأخذ الشكل نفسه تماماً للمعادلة الميكانيكية وفق التناظر

$$x_n \leftrightarrow q_n, \quad m \leftrightarrow L, \quad \kappa \leftrightarrow \frac{1}{C}.$$

تؤكد تعبيرات الطاقة هذا التناظر:

$$E_{\text{LC}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} L \dot{q}_n^2 + \frac{(q_{n-1} - q_n)^2}{2C} \right],$$

$$E_{\text{mech}} = \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} \kappa (x_{n-1} - x_n)^2 \right].$$

تناظر الطاقة المخزنة في المحث الطاقة الحركية، وتناظر طاقة المكثف طاقة الوضع المرونية للنابض.

وأخيراً، بالتعويض بـ $x_n = A \cos(\omega t - n\Phi)$ في المعادلة الميكانيكية نحصل على

$$\omega^2 = \frac{4\kappa}{m} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

وهي مطابقة لعلاقة التشتت لشبكة LC عندما يكون $\kappa/m = 1/(LC)$.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.