

IPhO 1986

理论题与解答 · 英国伦敦（哈罗） · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1986/

题目 1：双缝与衍射光栅：振幅的矢量叠加

Figure 1.1

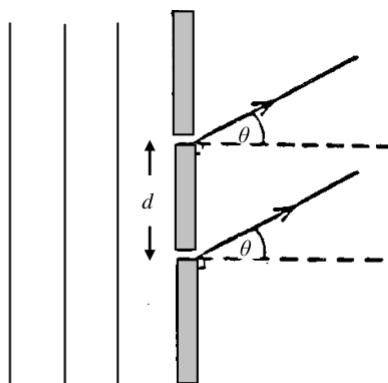


图 1.1

一束波长为 λ 、频率为 f 的平面单色光波垂直入射到两条相同的狭缝上，两缝间距为 d ，如图 1.1 所示。每条狭缝出射的光波，在沿 θ 方向距离狭缝 x 处、时刻 t 的表达式为

$$y = a \cos[2\pi(ft - x/\lambda)]$$

其中，两列波的振幅 a 相同。（假设 x 远大于 d 。）

(i) 证明：在与狭缝法线成 θ 角的方向上观察到的两列波，其合振幅 A 可以通过两个矢量相加得到；每个矢量的大小均为 a ，其方向由相应光波的相位决定。

根据矢量图，用几何方法验证

$$A = 2a \cos \theta$$

其中

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(ii) 将双缝替换为具有 N 条等间距狭缝的衍射光栅，相邻狭缝间距为 d 。利用振幅的矢量叠加法证明：大小均为 a 的振幅矢量构成一个正多边形的一部分，其顶点位于半径为 R 的圆上，且

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta},$$

由此推导出合振幅为

$$\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

并求出合成波相对于光栅边缘狭缝出射光的相位差。

(iii) 在同一张图中画出 $\sin N\beta$ 和 $(1/\sin \beta)$ 随 β 变化的示意曲线。另画一张图，表示合成波的光强随 β 的变化。

(iv) 求各主极大的光强。

(v) 证明主极大的数目不能超过

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1\right)$$

(vi) 证明：波长分别为 λ 和 $\lambda + \delta\lambda$ 的两种光，其中 $\delta\lambda \ll \lambda$ ，所产生的主极大之间的角间隔为

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad \text{其中 } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{等}$$

计算钠 D 线的这一角间隔，已知

$$\lambda = 589.0 \text{ nm}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 589.6 \text{ nm}, \quad n = 2, \quad \text{且 } d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

$$\left[\text{提示: } \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

题目译自官方英文原文。

答案

设 I_1 为仅有一条狭缝时的光强，并令

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

用 A_s 表示带符号的振幅系数；其绝对值为实际振幅。

- (i) 相位差为 2β ，因此

$$A_s = 2a \cos \beta, \quad A = 2a |\cos \beta|.$$

原题印出的 $\cos \theta$ 应为 $\cos \beta$ 。

- (ii)

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (0 < \beta < \pi), \quad A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

一般地， $R = a/(2|\sin \beta|)$ 。当各狭缝的相位依次增加 2β 时，采用上述带符号系数，合成波相对于第一条边缘狭缝的相位为 $(N-1)\beta$ 。若采用正振幅，则在该系数为负的所有位置，相位须加上 π 。在 $\beta = m\pi$ 处，实际振幅为 Na 。

- (iii) $\sin N\beta$ 的振幅为 1，周期为 $2\pi/N$ ； $1/\sin \beta$ 在 $\beta = m\pi$ 处有竖直渐近线。光强为

$$I(\beta) = I_1 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

它是周期为 π 的偶函数，主峰位于 $m\pi$ 处。相邻主峰之间有 $N-1$ 个零点和 $N-2$ 个次极大。

- (iv)

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1, \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

- (v) 将掠射级次作为极限方向计入，则

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

- (vi) 在一阶近似下，

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

角间隔为这一带符号偏移量的绝对值。对于给定钠谱线的二级主极大，

$$\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ.$$

解答

(i)

垂直入射使两条狭缝处的入射光相位相同。出射波是相干的，因此它们的瞬时位移相加。

在远场，到达观察点的光线可视为平行。因此，两条路径的长度之差为

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

所以，相位差的大小为

$$\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\beta.$$

选择参考狭缝，使另一列波的相位超前 2β 。将参考相位记为 ψ ，则两列波为

$$y_0 = a \cos \psi, \quad y_1 = a \cos(\psi + 2\beta).$$

利用给出的恒等式可得

$$y_0 + y_1 = 2a \cos \beta \cos(\psi + \beta).$$

为了从几何上解释这一结果，用长度为 a 的矢量表示每列波，其方向角等于该波的相位。矢量在某一固定轴上的投影就是波的瞬时位移。两个矢量均以角速度 $2\pi f$ 旋转，并保持 2β 的夹角。由于投影可以相加，它们的矢量和就表示合成波。

绘制矢量图时，从同一原点画出两个箭头，使它们与相位角平分线分别成 $-\beta$ 和 $+\beta$ 角。垂直于该角平分线的分量相互抵消，沿角平分线的分量相加：

$$A_s = a \cos \beta + a \cos \beta = 2a \cos \beta.$$

因此

$$A = 2a |\cos \beta|.$$

带符号系数为负，仅表示合矢量反向，或相位额外增加 π 。

因此，原题印出的振幅公式中的 θ 必须替换为 β 。

(ii)

对整个光栅采用同样的远场近似，忽略光栅各处的振幅变化和波前曲率。从一侧边缘开始给狭缝编号，使其相位依次为

$$\psi, \psi + 2\beta, \dots, \psi + 2(N-1)\beta.$$

将 N 个振幅矢量首尾相接画出。每个矢量的长度均为 a ，且相对于前一个矢量均转过相同的角度 2β 。因此，它们的端点在一个圆上构成等弦长的折线。

在图中，将依次相连的端点标为 $P_0, P_1, \dots, P_N$ ，圆心标为 O 。每条边 $P_j P_{j+1}$ 的长度为 a ，所对的有向圆心角为 2β 。将相应的等腰三角形平分，对于 $0 < \beta < \pi$ ，可得

$$\frac{a}{2} = R \sin \beta.$$

因此

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

对于任意 β ，正值半径为 $a/(2|\sin \beta|)$ 。这条折线在连接完 N 个矢量后不一定闭合。

合矢量直接从 P_0 指向 P_N 。这两个端点之间的总有向圆心角为 $2N\beta$ ，因此其长度为

$$A_N = 2R|\sin N\beta| = a \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right|.$$

于是，所求的带符号系数为

$$A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

相位可以由弦的方向得到。指向第一条小弦中点的半径位于角位置 β ，而指向合成弦中点的半径位于 $N\beta$ 。每条弦均垂直于指向其中点的半径，因此两条弦的方向角之差为

$$N\beta - \beta = (N - 1)\beta,$$

但须考虑合矢量可能反向的情况。

等价地，完整的合成波表达式为

$$y_{\text{tot}} = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cos[\psi + (N - 1)\beta].$$

因此，按照所选的边缘约定，保留带符号系数时，相对于该边缘狭缝的相位为 $(N - 1)\beta$ 。若采用非负振幅，则相位为

$$\phi = \begin{cases} (N - 1)\beta, & \sin N\beta / \sin \beta > 0, \\ (N - 1)\beta + \pi, & \sin N\beta / \sin \beta < 0, \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

若以另一侧边缘为参考，则相对相位在模 2π 意义下变号。合振幅为零时，相位无定义。

当 $\beta = m\pi$ 时，相邻狭缝的相位相差 $2m\pi$ 。所有矢量均指向同一方向，因此 $A_N = Na$ ，且相对相位在模 2π 意义下为零。此时，圆形构图的半径在极限下趋于无穷大。

(iii)

时间平均光强与实际振幅的平方成正比。由于单缝振幅为 a ，

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A_N^2}{a^2},$$

因而

$$\frac{I(\beta)}{I_1} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

第一张图采用共同的横轴 β 和表示函数值的纵轴：

- $\sin N\beta$ 在 -1 与 $+1$ 之间振荡，周期为 $2\pi/N$ 。其零点位于 $\beta = k\pi/N$ ，极值出现在 $\beta = (2k+1)\pi/(2N)$ ，极值为 $(-1)^k$ 。
- $1/\sin \beta$ 的周期为 2π ，没有零点，并在 $\beta = m\pi$ 处有竖直渐近线。在 0 与 π 之间，它从 $+\infty$ 下降，在 $\pi/2$ 处达到最小值 1 ，随后上升至 $+\infty$ 。接下来位于 π 与 2π 之间的分支为负，在 $3\pi/2$ 处达到 -1 ，并在两端趋于 $-\infty$ 。这些分支重复出现。

虽然正弦的倒数在 $m\pi$ 处发散，但它与 $\sin N\beta$ 的乘积的绝对值具有有限极限 N 。

对于光强图，绘制 I/I_1 。其主要特征为：

位置	I/I_1
$\beta = m\pi$	N^2
$\beta = m\pi + r\pi/N, \quad r = 1, \dots, N-1$	0
$\beta = m\pi + \pi/2, \quad N$ 为偶数	0
$\beta = m\pi + \pi/2, \quad N$ 为奇数	1

该曲线非负，是偶函数，且以 π 为周期。每个主峰都关于 $\beta = m\pi$ 对称。其最近的零点为

$$\beta = m\pi \pm \frac{\pi}{N},$$

因此，这两个零点之间的宽度为 $2\pi/N$ 。

相邻主峰之间有 $N-1$ 个零点，相邻零点之间共有 $N-2$ 个较小的次峰。它们的精确位置满足

$$N \cot(N\beta) = \cot \beta,$$

此式通过非零点处对光强求导得到。远离渐近线时，曲线位于下列包络线之下：

$$I = \frac{I_1}{\sin^2 \beta}.$$

(iv)

N 个长度为 a 的矢量，其合矢量的最大可能长度为 Na 。当所有矢量指向同一方向时达到这一值：

$$2\beta = 2n\pi.$$

因此，主极大满足

$$\beta = n\pi \iff d \sin \theta = n\lambda.$$

在这些方向上，

$$A_N = Na,$$

所以

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1.$$

在题设的等振幅模型下，所有主极大的光强均为此值。

取极限也能得到相同结果：

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N(-1)^{n(N-1)},$$

其平方为 N^2 。

(v)

第 n 级主极大要求

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

由于 $|\sin \theta| \leq 1$,

$$|n| \leq \frac{d}{\lambda}.$$

因此, 允许的整数级次范围为

$$-\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor \quad \text{至} \quad +\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

将零级计入, 得到

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1.$$

因为 $\lfloor u \rfloor \leq u$,

$$\boxed{M \leq \frac{2d}{\lambda} + 1}.$$

这一计数将恰好位于掠射方向 $\theta = \pm 90^\circ$ 的级次也作为极限方向计入。排除这些方向只会使数目减少。

(vi)

考虑两种波长的同一级次 n 的主极大。记 $\Delta\lambda = \delta\lambda$, 则它们的光栅方程为

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= n\lambda, \\ d \sin(\theta + \Delta\theta) &= n(\lambda + \Delta\lambda). \end{aligned}$$

对于以弧度表示的小角度偏移,

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \simeq \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta.$$

将第二个光栅方程减去第一个, 得到

$$d \cos \theta \Delta\theta \simeq n\Delta\lambda,$$

因此

$$\boxed{\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}}.$$

这是对实际存在且不处于掠射方向的主极大成立的一阶近似结果。当 n 为负时, 带符号的偏移量为负; 角间隔为其绝对值。零级主极大重合。

对于钠谱线,

$$\Delta\lambda = (589.6 - 589.0) \text{ nm} = 0.6 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

当 $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ 且取二级时,

$$\sin \theta = \frac{2(589.0 \times 10^{-9})}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.9816667,$$

所以

$$\theta \simeq 79.01^\circ, \quad \cos \theta \simeq 0.19061.$$

因此,

$$\Delta\theta \simeq \frac{2(0.6 \times 10^{-9})}{(1.2 \times 10^{-6})(0.19061)} = 5.246 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

取合理精度,

$$\boxed{\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ}.$$

作为数值核验, 利用未展开的光栅方程求出两个角度后相减, 得到 $5.32 \times 10^{-3} \text{ rad}$, 比一阶估计值约高 1.4%。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处, 均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2: 地震波与地球的液态地核

2. 本世纪初, 人们提出了一种地球模型, 将地球假定为半径为 R 的球体, 从表面到半径为 R_c 处为均匀、各向同性的固态地幔。半径 R_c 以内的地核区域充满液体。

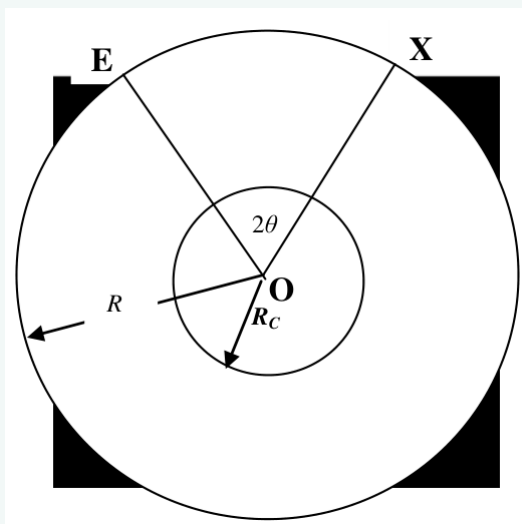


图 2.1

纵向地震波和横向地震波分别称为 P 波和 S 波, 它们在地幔中的传播速度分别为常量 V_P 和 V_S 。在地核中, 纵波以恒定速度 $V_{CP}, < V_P$ 传播, 而横波不能传播。

地球表面 E 点发生地震, 产生的地震波在地球内部传播, 并由地表观测者记录。观测者可将地震仪设置在地球表面的任意点 X。E 与 X 之间的角距离为 2θ , 定义为

$$2\theta = \text{角 } EOX$$

其中 O 为地心。

- (i) 证明: 沿直线穿过地幔的地震波到达 X 的时刻 t (自地震发生后算起的传播时间) 为

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \text{当 } \theta > \arccos \left[\frac{R_c}{R} \right],$$

其中, 对于 P 波, $v = v_P$; 对于 S 波, $v = v_S$ 。

(ii) 对于 X 的某些位置，地震 P 波在地幔与地核的界面处经过两次折射后到达观测者。画出这样的地震 P 波的传播路径。求出 P 波的 θ 与 i 之间的关系，其中 i 为地震 P 波在地幔与地核界面处的入射角。

(iii) 利用以下数据

R	=	6370 km
R_C	=	3470 km
v_{CP}	=	10.85 km s^{-1}
v_S	=	6.31 km s^{-1}
v_{CP}	=	9.02 km s^{-1}

以及 (ii) 中得到的结果，画出 θ 随 i 变化的图像。说明该图像的形状对于位于地球表面不同位置的观测者有何物理意义。画出 P 波和 S 波的传播时间随 θ 变化的示意图，范围为 $0 \leq \theta \leq 90$ 度。

(iv) 一次地震后，某观测者测得 S 波比 P 波晚到达 2 分 11 秒。利用 (iii) 部分给出的数据，求出震源与观测者之间的角距离。

(v) 上述测量中的观测者注意到，在 P 波和 S 波到达一段时间之后，地震仪又记录到两个信号，两者的时间间隔为 6 分 37 秒。解释这一结果，并验证它确实与上一部分求得的角距离相符。

题目译自官方英文原文。

答案

- (i) 直达波的传播时间为

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos(R_C/R).$$

等号对应相切射线的极限情形。原题印出的不等号方向相反。

- (ii) 令 $a = R_C/R$ 、 $b = v_{CP}/v_P$ 。射线的路径由三段直线组成，进入地核时向法线偏折，离开地核时背法线偏折。其绕地心扫过的角度之半为

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

通常有 $\theta = \Phi$ ；若也考虑在对跖点之外出射的射线，则较小的角距离由下式给出

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

- (iii) 直达 P 波和 S 波射线的终止位置为 $\theta = 56.99^\circ$ 。穿过地核的 P 波射线最早出现在

$$\theta_{\min} = 75.58^\circ, \quad i_{\min} = 55.02^\circ.$$

因此，P 波阴影区约为

$$113.99^\circ < 2\theta < 151.15^\circ,$$

而在 $2\theta > 113.99^\circ$ 时，没有直达或穿过地核的 S 波到达。折射 P 波的传播时间分支在 20.789 min 处相交；它们在对跖点的到达时间为 21.733 和 23.397 min。完整的图像说明见下文。

- (iv) 震源与观测者之间的角距离为

$$2\theta \approx 17.8^\circ.$$

- (v) 后到的信号是在地核边界处反射的 P 波和 S 波。计算得到它们在地震发生后的到达时间分别为 551.3 s 和 947.9 s, 因此

$$\Delta t_{\text{ref}} = 396.65 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 37 \text{ s}.$$

解答

我们采用对数值数据在物理上自洽的解读:

$$v_P = 10.85 \text{ km s}^{-1}, \quad v_S = 6.31 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km s}^{-1}.$$

(iii) 部分的数据表把符号 v_{CP} 印了两次; 其中第一项 10.85 km s^{-1} 实为 v_P 。(i) 中印出的不等号方向也相反, 见 (i) 部分。

我们采用几何射线理论: 射线在每个均匀区域内沿直线传播, 折射遵循斯涅尔定律, 反射遵循入射角等于反射角的规律。忽略衍射、波型转换以及地球表面处的额外反射。

(i)

设 M 为弦 EX 的中点。三角形 OEM 为直角三角形, 且 $\angle EOM = \theta$ 。因此

$$EM = R \sin \theta, \quad OM = R \cos \theta.$$

所以, 直达路径的长度和传播时间分别为

$$EX = 2R \sin \theta, \quad t = \frac{2R \sin \theta}{v}.$$

弦上距地心最近的点为 M 。因此, 射线不进入地核的条件是

$$R \cos \theta \geq R_c,$$

即

$$\theta \leq \arccos(R_c/R).$$

严格不等号对应完全位于地幔内的路径; 等号对应相切的极限情形。对于更大的 θ , 弦穿过地核, 因此仅考虑地幔的公式不再描述实际射线。

(ii)

将射线进入和离开地核的点分别记为 A 和 B 。画出路径

$$E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X,$$

其中 EA 和 BX 位于地幔内, AB 为地核的一条弦。画出沿径向的法线 OA 和 OB 。

设 r 为地核内相对于法线测量的折射角。由斯涅尔定律得

$$\frac{\sin i}{v_P} = \frac{\sin r}{v_{CP}},$$

所以

$$r = \arcsin \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right).$$

由于 $v_{CP} < v_P$, 有 $r < i$: 射线进入地核时向法线偏折。根据对称性, 射线在出口处的入射角为 r , 并以角度 i 出射进入地幔。

设 $\alpha = \angle OEA$ 。在三角形 EOA 中, A 点的内角为 $\pi - i$ 。由正弦定理得

$$\frac{\sin \alpha}{R_c} = \frac{\sin i}{R},$$

因此

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R_c}{R} \sin i\right), \quad \angle EOA = i - \alpha.$$

由等腰三角形 AOB 得

$$\angle AOB = \pi - 2r.$$

因此, 射线绕 O 扫过的总角度为

$$2\Phi = 2(i - \alpha) + \pi - 2r.$$

所以

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin\left(\frac{R_c}{R} \sin i\right) - \arcsin\left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i\right).$$

当扫过的角度不大于 π 时, $\theta = \Phi$ 。若射线在刚越过对跖点的位置出射, 震源与观测者之间较小的角距离为 $2\pi - 2\Phi$, 从而

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

因此, 所要求的图应画出一条对称的折线射线: 两段地幔路径等长, 地核内的弦为直线, 并在入射边界处标出角度 i 和 $r < i$ 。

(iii)

无量纲比值为

$$a = \frac{R_c}{R} = 0.544741, \quad b = \frac{v_{CP}}{v_P} = 0.831336.$$

因此

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

以弧度表示角度并求导, 得

$$\frac{d\Phi}{di} = 1 - \frac{a \cos i}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} - \frac{b \cos i}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

在端点处,

$$\Phi'(0) = 1 - a - b = -0.376077, \quad \Phi'(\pi/2) = 1.$$

两个被减去的项均随 i 增大而减小, 因此 Φ' 递增且恰有一个零点。数值计算得

$$i_{\min} = 55.017^\circ, \quad \Phi_{\min} = \theta_{\min} = 75.577^\circ.$$

为得到相应的传播时间图像, 任一段地幔路径的长度为

$$\ell_m = \sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i.$$

这一结果可通过将外半径和内半径投影到地幔中的射线上得到，该射线到 O 的垂直距离为 $R_c \sin i$ 。

地核内弦的长度为

$$\ell_c = 2R_c \cos r = 2R_c \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

因此，穿过地核的 P 波传播时间为

$$T(i) = \frac{2}{v_P} \left(\sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i \right) + \frac{2R_c}{v_{CP}} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

以下各点给出了所要求的两个图像：

i (度)	扫过角度之半 Φ (度)	实际的 θ (度)	穿过地核的 P 波传播时间 (min)
0	90.00	90.00	21.733
20	82.74	82.74	21.504
40	77.20	77.20	21.003
55.02	75.58	75.58	20.789
70	77.84	77.84	21.171
80	82.60	82.60	22.028
89.23	90.00	90.00	23.397
90	90.76	89.24	23.538

Φ 随 i 变化的曲线从 90° 开始，平滑下降至最小值，然后上升至 90.7568° 。绘制实际的较小角度 θ 时，应将最后一段在 90° 处折回： θ 在 $i = 89.2322^\circ$ 时达到 90° ，随后略微下降，在掠入射时降至 89.2432° 。

直达波的截止角为

$$\theta_d = \arccos(R_c/R) = 56.993^\circ.$$

因此，其物理意义如下：

- 当 $0 \leq \theta < 56.993^\circ$ 时，直达 P 波和 S 波均能到达观测者。
- 当 $56.993^\circ < \theta < 75.577^\circ$ 时，直达 P 波射线和穿过地核的 P 波射线均不能到达观测者。这就是 P 波阴影区。
- 当 $\theta > 56.993^\circ$ 时，没有直达 S 波射线，液态地核也不传输 S 波射线。
- 在 $\theta = 75.577^\circ$ 处，两条折射 P 波路径合并。由于入射方向相近的射线在几乎相同的角距离处出射，射线能量在此集中：这就是焦散。
- 在 $75.577^\circ < \theta < 90^\circ$ 的大部分范围内，两条折射 P 波路径产生两次不同的到达。

严格采用给定数值时，对跖点附近还会出现一个小的附加特征。当

$$89.2432^\circ < \theta < 90^\circ,$$

第三条折射路径越过对跖点方向后到达观测者。在对跖点处，两个斜射分支的传播时间相等。

对于传播时间示意图，画出直达波分支

$$t_{P,\text{dir}} = 1174.19 \sin \theta \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 2019.02 \sin \theta \text{ s},$$

但仅限于 $0 \leq \theta \leq 56.993^\circ$ 的范围。两条曲线均从原点出发，递增且向下弯曲；S 波曲线位于 P 波曲线上方。它们的端点为

$$t_{P,\text{dir}}(\theta_d) = 984.68 \text{ s} = 16.411 \text{ min},$$

$$t_{S,\text{dir}}(\theta_d) = 1693.16 \text{ s} = 28.219 \text{ min}.$$

穿过地核的 P 波的两个主要分支共同起始于

$$(\theta, T) = (75.577^\circ, 20.789 \text{ min})$$

并向 90° 方向上升。它们在相交处具有共同的切线，因为求得

$$\frac{dT}{di} = \frac{2R_c \sin i}{v_P} \frac{d\Phi}{di}, \quad \frac{dT}{d\Phi} = \frac{2R_c \sin i}{v_P}.$$

i 较小的分支到达较早，并在对跖点处变为水平，此时射线沿直径传播：

$$T(0) = \frac{2(R - R_c)}{v_P} + \frac{2R_c}{v_{CP}} = 21.733 \text{ min}.$$

另一个主要分支在该处达到 23.397 min。短小的第三个分支从 $\theta = 89.243^\circ$ 处的 23.538 min 下降至 90° 处的 23.397 min。

若示意图还要包括 (v) 部分讨论的较晚到达的反射波，则还应画出

$$t_{v,\text{ref}}(\theta) = \frac{2}{v} \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_d.$$

这些曲线从 $\theta = 0$ 处开始上升，P 波的起始值为 8.909 min，S 波为 15.320 min，并在 θ_d 处分别与对应的直达波曲线相切。

(iv)

直达 P 波和 S 波的路径长度相同，因此它们的到达时间差为

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right).$$

这里

$$\Delta t = 2(60) + 11 = 131 \text{ s}.$$

因此

$$\sin \theta = \frac{131}{2(6370) \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right)} = \frac{131}{844.8239} = 0.1551.$$

于是

$$\theta = 8.9204^\circ, \quad \boxed{2\theta = 17.8408^\circ \approx 17.8^\circ}.$$

由于 $\theta < \theta_d$ ，路径仅通过地幔的假设是自洽的。

两种波各自的到达时间为

$$t_{P,\text{dir}} = 182.07 \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 313.07 \text{ s}.$$

(v)

地核边界能够反射 P 波和 S 波的能量。这些反射波在地幔中沿更长的路径传播，因此到达较晚。

设 C 为地核边界上的反射点，位于 $\angle EOX$ 较近一侧的径向角平分线上。传播路径为

$$E \longrightarrow C \longrightarrow X.$$

关于 OC 的反射对称性使入射角与反射角相等，且 $EC = CX$ 。由于 $\angle EOC = \theta$ ，由余弦定理得

$$EC^2 = R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta.$$

因此，反射路径的长度为

$$L_{\text{ref}} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}.$$

当 $\theta = 8.9204^\circ$ 时，

$$L_{\text{ref}} = 5981.54 \text{ km}.$$

因此，反射波的到达时间为

$$t_{P,\text{ref}} = \frac{5981.54}{10.85} = 551.29 \text{ s},$$

$$t_{S,\text{ref}} = \frac{5981.54}{6.31} = 947.95 \text{ s}.$$

两者均晚于直达 S 波在 313.07 s 时的到达，符合要求。

它们的时间间隔为

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{ref}} &= L_{\text{ref}} \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right) \\ &= 396.65 \text{ s} \\ &= 6 \text{ min } 36.65 \text{ s}. \end{aligned}$$

四舍五入到整秒，得到

$$\Delta t_{\text{ref}} = 6 \text{ min } 37 \text{ s},$$

这验证了上述解释以及 (iv) 部分求得的角距离。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3：弹簧连接的质点的简正模（环与链）

三个质量均为 m 的质点处于平衡状态，由未伸长的无质量弹簧连接，每根弹簧的胡克定律劲度系数均为 k 。它们被约束在圆形路径上运动，如图 3.1 所示。

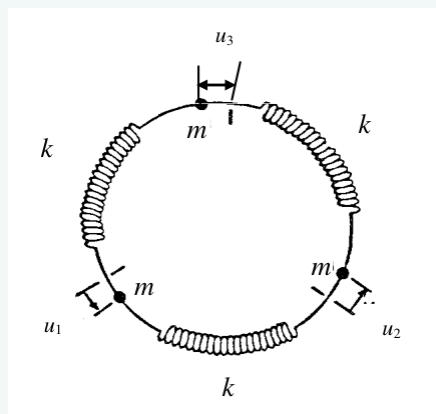


图 3.1

(i) 若各质点分别偏离平衡位置一个微小位移 u_1 、 u_2 和 u_3 ，写出每个质点的运动方程。

(ii) 验证该系统具有如下形式的简谐解

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

其加速度为 $(-\omega^2 u_n)$, 其中 a_n ($n = 1, 2, 3$) 为恒定振幅, 角频率 ω 可以取以下 3 个值,

$$\omega_o\sqrt{3}, \omega_o\sqrt{3} \text{ 和 } 0. \text{ 其中 } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

(iii) 将弹簧与质点交替排列的系统扩展到 N 个质点, 每个质量为 m 的质点都通过弹簧与其相邻质点相连。初始时, 弹簧均未伸长, 系统处于平衡状态。当各质点偏离平衡位置时, 用第 n 个质点 ($n = 1, 2 \dots N$) 及其相邻质点的位移写出该质点的运动方程。

$$u_n(t) = a_s \sin\left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi\right) \cos \omega_s t,$$

是振动解, 其中 $s = 1, 2, \dots N$ 、 $n = 1, 2, \dots N$, ϕ 为任意相位, 条件是角频率满足

$$\omega_s = 2\omega_o \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right),$$

其中 a_s ($s = 1, \dots, N$) 是与 n 无关的恒定振幅。

指出包含无穷多个质点的链所允许的频率范围。

(iv) 对于较大的 N , 求比值

$$u_n/u_{n+1}$$

在以下两种情况下的值:

(a) 低频解

(b) $\omega = \omega_{\max}$, 其中 $\omega_{\max}$ 为解的最大频率。

对于情况 (a) 和 (b), 画出典型示意图, 表示时刻 t 各质点的位移随沿链的质点编号的变化。

(v) 若将其中一个质点替换为质量为 $m' \ll m$ 的质点, 估计角频率分布可能发生的任何重大变化。

根据上述结果, 定性描述质量为 m 和 m' 的质点交替排列的双原子链预期具有的频谱形式。

提示

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ 2 \sin^2 A &= 1 - \cos 2A \end{aligned}$$

题目译自官方英文原文。

答案

• (i)

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 &= k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 &= k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{aligned}$$

- (ii)

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad 0.$$

非零频率对应两个满足 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ 的独立模。零频模满足 $a_1 = a_2 = a_3$ 。

- (iii)

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad u_{n+N} = u_n,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right).$$

对于无限长链,

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

用普通频率表示, $0 \leq f \leq \sqrt{k/m}/\pi$ 。

- (iv)

(a) 远离位移波节处, $u_n/u_{n+1} \simeq +1$ 。图像是在各质点位置对一条缓慢变化的正弦曲线取样得到的。

(b) 在频带上边缘处, $u_n/u_{n+1} = -1$ 。位移在大小相等的正值与负值之间交替。对于偶数 N , 这一结果精确成立; 对于奇数个质点组成的环, 当 N 很大时, 局部趋近于这一行为。

- (v) 单个轻质点会产生一个集中在该质点上的高频模:

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}} \gg 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

交替链具有声学频带和光学频带, 两者之间存在禁带。对于 $m' < m$, 它们精确的极限范围为

$$\begin{array}{ll} \text{声学:} & 0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ \text{光学:} & \sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}. \end{array}$$

解答

- (i)

所有位移均沿环的同一方向以弧长度量。在小位移近似下, 弹簧的伸长量等于其两端的位移之差。因此, 根据胡克定律, 切向回复力与该位移差成正比。约束力没有切向分量。

对于质点 1, 两根弹簧施加的力分别为 $k(u_2 - u_1)$ 和 $k(u_3 - u_1)$ 。由牛顿第二定律得

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1).$$

对质点 2 和 3 作同样的推理, 得到

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{cases}$$

(ii)

代入 $u_n = a_n \cos \omega t$, 于是 $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ 。定义

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \quad S = a_1 + a_2 + a_3.$$

各方程变为

$$\lambda a_n = 3a_n - S.$$

将三个方程相加, 得到

$$\lambda S = 0.$$

有两种可能。

若 $\lambda = 0$, 则各方程要求

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

所有质点移动的弧长相同, 因此所有弹簧的长度均不变。于是

$$\omega = 0.$$

这就是刚体转动模。严格来说, 它不是振动: 其一般运动为 $u_1 = u_2 = u_3 = A + Bt$ 。题设的余弦形式表示其静态位移的情况。

若 $\lambda \neq 0$, 则 $S = 0$, 而非零振幅要求

$$\lambda = 3.$$

因此

$$\omega = \sqrt{3} \omega_o = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

条件 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ 留下两个独立振幅。例如, 两个独立的振型为

$$(a_1, a_2, a_3) \propto (1, -1, 0), \quad (a_1, a_2, a_3) \propto (1, 1, -2).$$

因此, 三个简正模的频率为

$$\sqrt{3} \omega_o, \quad \sqrt{3} \omega_o, \quad 0,$$

其中非零频率出现两次。

(iii)

质点 n 所受的力为

$$k(u_{n+1} - u_n) \quad \text{和} \quad -k(u_n - u_{n-1}).$$

因此

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

环形结构要求满足周期性边界条件,

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1.$$

令

$$q = \frac{2\pi s}{N}, \quad u_n = a_s \sin(nq + \phi) \cos \omega_s t.$$

由于 $Nq = 2\pi s$ ，此表达式满足周期性。利用题给的和差化积恒等式，

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= a_s [\sin(nq + \phi + q) + \sin(nq + \phi - q)] \cos \omega_s t \\ &= 2 \cos q u_n. \end{aligned}$$

因此，运动方程变为

$$-m\omega_s^2 u_n = 2k(\cos q - 1)u_n = -4k \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)u_n.$$

对于非平凡模，

$$\omega_s^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right).$$

由于在给定范围 $s = 1, \dots, N$ 内有 $\sin(\pi s/N) \geq 0$,

$$\boxed{\omega_s = 2\omega_o \sin\left(\frac{\pi s}{N}\right).}$$

当链变为无限长时，允许的波数变为连续值。正弦因子可以取零与一之间的所有值，因此

$$\boxed{0 \leq \omega \leq 2\omega_o = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

零频率是对应整体刚性位移的端点；真正的振动满足 $\omega > 0$ 。由于 $f = \omega/(2\pi)$,

$$\boxed{0 \leq f \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.}$$

当 k 和 m 采用国际单位制数值时，角频率的单位为 rad s^{-1} ，普通频率的单位为 Hz 。

(iv)

在分母非零的时刻和位置，公共的时间因子可以约去：

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin(nq + \phi)}{\sin(nq + \phi + q)}.$$

同一表达式也直接适用于模态振幅之比。

(a) 低频

选取接近零的 q 的代表值。于是

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin \frac{q}{2} \right| \simeq \omega_o |q|,$$

因此低频意味着 $|q| \ll 1$ 。令 $\theta = nq + \phi$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{\cos q + \cot \theta \sin q} \simeq 1 - q \cot \theta.$$

因此，远离波节处，

$$\boxed{\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq +1.}$$

相邻质点的位移几乎相等，运动近似同相。在波节附近，位移本身很小，因此其比值不一定接近一。

对于题目要求的示意图，画出一条以质点间距为单位、波长为 $L \gg 1$ 的正弦曲线，并在整数质点编号处标出其值。一个代表性的位移分布为

$$u_n = C(t) \sin \left(\frac{2\pi(n - n_0)}{L} \right).$$

其关键位置的值为：

$n - n_0$	0	$L/4$	$L/2$	$3L/4$	L
$u_n/C(t)$	0	+1	0	-1	0

相邻波节之间有许多质点，相邻点的高度通常非常接近。

(b) 最大频率

在频带上边缘处， $q = \pi$ ，因此

$$\omega_{\max} = 2\omega_o.$$

位移为

$$u_n = a_s \sin(n\pi + \phi) \cos \omega_{\max} t = (-1)^n a_s \sin \phi \cos \omega_{\max} t.$$

因此，

$$u_{n+1} = -u_n, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1.$$

每一对相邻质点都以相等的振幅沿相反方向运动。

示意图由交替位于 $+C(t)$ 和 $-C(t)$ 处的点组成：

$n - n_0$	0	1	2	3	4
$u_n/C(t)$	+1	-1	+1	-1	+1

空间周期为两个质点间距。若为便于观察而将相邻点连接起来，就会形成锯齿状折线。

这一模式恰好适用于偶数个质点组成的环。对于有限的奇数 N ，最大的允许波数为 $\pi \pm \pi/N$ ，并且

$$\omega_{\max} = 2\omega_o \cos \left(\frac{\pi}{2N} \right).$$

其位移分布的符号交替变化，并具有缓慢变化的包络。当 N 很大时，远离包络波节处的相邻位移之比近似为 -1 。

(v)

先只将一个质点替换为 $m' \ll m$ 。这个轻质点的快速振动只会使相邻的重质点产生相对较小的运动。在最低阶近似下，将这些相邻质点视为固定不动。

将轻质点移动 x ，每根弹簧都会产生回复力 $-kx$ 。因此

$$m'\ddot{x} \simeq -2kx,$$

得到

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

相对于原来的频带上边缘，

$$\frac{\omega_{\text{defect}}}{2\omega_o} \simeq \sqrt{\frac{m}{2m'}} \gg 1.$$

这一近似是自洽的。对于振幅为 u_1 的相邻重质点，高频下的主导平衡关系为

$$-m\omega_{\text{defect}}^2 u_1 \simeq kx,$$

所以

$$\frac{u_1}{x} \simeq -\frac{m'}{2m}.$$

它的运动幅度很小，且方向与轻质点相反。更远处的运动幅度还要小：这个高频模局域在缺陷附近。

因此，有一个模的频率移至远高于原频带的位置。其他频率受到扰动，但仍保持在 $\sqrt{k/m}$ 的量级；在无限长链中，扩展模的频带仍为 $0 \leq \omega \leq 2\omega_o$ 。零频率的整体刚性位移模也仍然存在。

对于**交替链**，重复排列的轻质点产生一整条高频带。频谱分为：

- **声学频带**，包含低频集体运动。在长波长下，相邻的重质点与轻质点近似一起运动。
- **光学频带**，其中轻质点快速振动，而重质点的运动幅度小得多。在长波长下，两类质点沿相反方向运动。

频带边缘可以直接推导。令 x_j 为第 j 个重质点的位移， y_j 为位于 x_j 与 x_{j+1} 之间的轻质点的位移。则

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= k(y_{j-1} + y_j - 2x_j), \\ m'\ddot{y}_j &= k(x_j + x_{j+1} - 2y_j). \end{aligned}$$

对于每经过一个含两个质点的原胞相位就改变 Q 的模，取

$$\begin{aligned} x_j &= X \cos(jQ + \phi) \cos \omega t, \\ y_j &= Y \cos\left((j + \frac{1}{2})Q + \phi\right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

振幅方程为

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)X &= 2k \cos(Q/2)Y, \\ (2k - m'\omega^2)Y &= 2k \cos(Q/2)X. \end{aligned}$$

存在非零解要求

$$(2k - m\omega^2)(2k - m'\omega^2) = 4k^2 \cos^2(Q/2),$$

即

$$mm'\omega^4 - 2k(m + m')\omega^2 + 4k^2 \sin^2(Q/2) = 0.$$

它的两个根为

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)^2 - \frac{4}{mm'} \sin^2(Q/2)}.$$

当 $|Q|$ 从 0 增大到 π 时，较小的根增大，较大的根减小。因此，对于 $m' < m$ ，它们的范围为

$$\boxed{0 \leq \omega_- \leq \sqrt{\frac{2k}{m}},}$$

和

$$\sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega_+ \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}.$$

在以下禁带内不存在任何模

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

对于 $m' \ll m$ ，光学频带的宽度相对于其约为 $\sqrt{2k/m'}$ 的高频率很窄，且与声学频带相隔很远。有限周期链在这些频带内具有离散频率；在无限长链的极限下，这些频率变为连续分布。

解答已与官方解答核对。