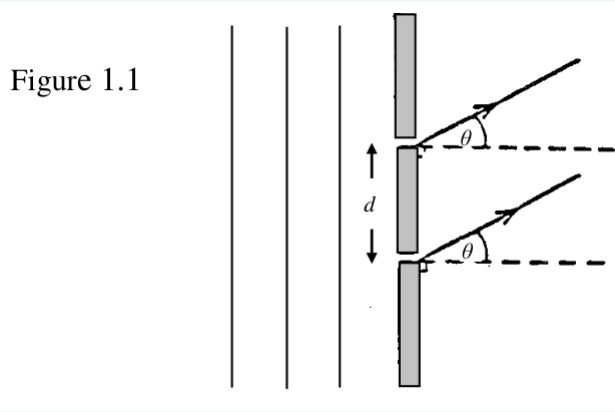


IPhO 1986

Teorik sorular ve çözümler · Londra (Harrow), Birleşik Krallık · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1986/

Soru 1: İki yarık ve bir kırınım ağı: genliklerin vektörel toplamı



Şekil 1.1

Dalga boyu λ ve frekansı f olan düzlem, tek renkli bir ışık dalgası, Şekil 1.1'de gösterildiği gibi aralarında d uzaklığı bulunan özdeş iki dar yarığa dik olarak gelmektedir. Her bir yarıktan çıkan ışık dalgası, θ doğrultusunda x uzaklıkta ve t anında

$$y = a \cos[2\pi(ft - x/\lambda)]$$

ile verilir; burada a genliği her iki dalga için aynıdır. (x 'in d 'den çok daha büyük olduğunu varsayın.)

(i) Yarıklara dik doğrultuyla θ açısı yapan bir doğrultuda gözlenen iki dalganın bileşke genliği A 'nın, her birinin büyüklüğü a olan ve doğrultusu ilgili ışık dalgasının fazıyla belirlenen iki vektörün toplanmasıyla elde edilebileceğini gösterin.

Vektör diyagramından geometrik olarak

$$A = 2a \cos \theta$$

olduğunu doğrulayın; burada

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(ii) Çift yarığın yerine, komşu yarıkları arasındaki uzaklık d olan, eşit aralıklarla yerleştirilmiş N yarıktan oluşan bir kırınım ağı konuluyor. Genlikleri vektörel olarak toplama yöntemini kullanarak, her birinin büyüklüğü a olan genlik vektörlerinin, köşeleri yarıçapı R

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta},$$

ile verilen bir çember üzerinde bulunan düzgün bir çokgenin bir parçasını oluşturduğunu gösterin. Bileşke genliği

$$\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

olduğunu çıkarın ve bileşkenin, ağı kenarındaki yarıktan gelen ışığa göre faz farkını elde edin.

(iii) Aynı grafikte $\sin N\beta$ ve $(1/\sin \beta)$ fonksiyonlarının β 'ya bağlı değişimini kabaca çizin. Ayrı bir grafikte bileşke dalgaının şiddetinin β 'ya bağlı olarak nasıl değiştiğini gösterin.

(iv) Ana şiddet maksimumlarının şiddetlerini belirleyin.

(v) Ana maksimumların sayısının

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1 \right)$$

değerini aşamayacağını gösterin.

(vi) $\delta\lambda \ll \lambda$ olmak üzere, λ ve $\lambda + \delta\lambda$ dalga boylarının oluşturduğu ana maksimumlar arasındaki açısal ayrımın

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad \text{burada } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{vb.}$$

ile verildiğini gösterin. Aşağıdaki değerler için sodyum D çizgilerinin bu açısal ayrımını hesaplayın:

$$\lambda = 589.0 \text{ nm}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 589.6 \text{ nm}, \quad n = 2, \quad \text{ve } d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

$$\left[\text{hatırlatma: } \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Yalnızca tek bir yarıktan gelen ışığın şiddeti I_1 olsun ve

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

İşaretle genlik katsayısı A_s ile gösterilir; bunun mutlak değeri fiziksel genliktir.

- (i) Faz farkı 2β olduğundan

$$A_s = 2a \cos \beta, \quad A = 2a |\cos \beta|.$$

Basılı metindeki $\cos \theta$ ifadesi $\cos \beta$ olmalıdır.

- (ii)

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (0 < \beta < \pi), \quad A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

Genel olarak $R = a/(2|\sin \beta|)$ olur. Yarık fazları 2β kadar artıyorsa, yukarıdaki işaretleli katsayı kullanıldığında bileşkenin ilk kenar yarığına göre fazı $(N-1)\beta$ 'dir. Pozitif genlik kullanıldığında, bu katsayının negatif olduğu her yerde faza π eklenir. $\beta = m\pi$ olduğunda fiziksel genlik Na 'dır.

- (iii) $\sin N\beta$ 'nin genliği 1, periyodu $2\pi/N$ 'dir; $1/\sin \beta$ 'nin $\beta = m\pi$ noktalarında düşey asimptotları vardır. Şiddet

$$I(\beta) = I_1 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

ile verilir. Çift bir fonksiyondur ve periyodu π 'dir; ana tepeleri $m\pi$ noktalarındadır. Ardışık ana tepeler arasında $N - 1$ sıfır ve $N - 2$ ikincil maksimum bulunur.

- (iv)

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1, \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

- (v) Yüzeye teğet mertebeler sınır doğrultuları olarak sayıldığında,

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

- (vi) Birinci mertebeden yaklaşımla,

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

Açısal ayırım, bu işaretli kaymanın büyüklüğüdür. Verilen sodyum çizgileri için ikinci mertebede,

$$\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ.$$

Çözüm

(i)

Dik gelme durumunda, gelen dalganın fazı her iki yarıktan aynıdır. Yarıklardan çıkan dalgalar eşevrelidir; dolayısıyla anlık yer değiştirmeleri toplanır.

Uzak alanda, gözlem noktasına ulaşan ışınlar pratik olarak paraleldir. Bu nedenle iki yol uzunluğu arasındaki fark

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

olur. Dolayısıyla faz farkının büyüklüğü

$$\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\beta.$$

olur.

Referans yarığını, diğer dalga faz bakımından 2β kadar ileride olacak şekilde seçelim. Referans fazını ψ ile gösterirsek iki dalga

$$y_0 = a \cos \psi, \quad y_1 = a \cos(\psi + 2\beta).$$

şeklindedir. Verilen özdeşlikten

$$y_0 + y_1 = 2a \cos \beta \cos(\psi + \beta).$$

elde edilir.

Bunu geometrik olarak yorumlamak için her dalgayı, uzunluğu a olan ve yön açısı dalganın fazına eşit olan bir vektörle temsil edelim. Bu vektörün sabit bir eksen üzerindeki izdüşümü, dalganın anlık yer değiştirmesidir. Her iki vektör de aralarındaki 2β açısal ayrımı koruyarak $2\pi f$ açısal hızıyla döner. İzdüşümler toplandığından, vektörel toplamaları bileşke dalgayı temsil eder.

Vektör diyagramı için iki oku ortak bir başlangıç noktasından, aralarındaki faz açısının açıortayıyla $-\beta$ ve $+\beta$ açıları yapacak şekilde çizelim. Bu açıortaya dik bileşenleri birbirini götürür; açıortay boyunca olan bileşenleri ise toplarız:

$$A_s = a \cos \beta + a \cos \beta = 2a \cos \beta.$$

Böylece

$$A = 2a |\cos \beta|.$$

Negatif bir işaretli katsayı, yalnızca bileşke vektörün yönünün tersine dönmesini ya da π kadar ek bir fazı temsil eder.

Dolayısıyla basılı genlik formülündeki θ , β ile değiştirilmelidir.

(ii)

Aynı uzak alan yaklaşımını, ağ boyunca genlik değişimini ve dalga cephesinin eğriliğini ihmal ederek tüm ağa uygulayalım. Yarıkları bir kenardan başlayarak, fazları

$$\psi, \psi + 2\beta, \dots, \psi + 2(N-1)\beta.$$

olacak şekilde numaralandıralım.

N genlik vektörünü uç uca çizelim. Her vektörün uzunluğu a 'dır ve her biri bir öncekine göre aynı 2β açısı kadar döner. Dolayısıyla uç noktaları, bir çember üzerinde eşit kirislerden oluşan bir çokgen zinciri oluşturur.

Diyagramda ardışık uç noktaları $P_0, P_1, \dots, P_N$, çemberin merkezini ise O ile gösterelim. Her $P_j P_{j+1}$ kenarının uzunluğu a 'dır ve gördüğü yönlü merkez açısı 2β 'dir. Karşılık gelen ikizkenar üçgeni iki eş parçaya bölersek, $0 < \beta < \pi$ için

$$\frac{a}{2} = R \sin \beta.$$

elde edilir. Buradan

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

elde edilir. Herhangi bir β için pozitif yarıçap $a/(2 \sin \beta)$ 'dir. Zincirin N vektörden sonra kapanması gerekmez.

Bileşke vektör doğrudan P_0 'dan P_N 'ye uzanır. Bu uç noktalar arasındaki toplam yönlü merkez açısı $2N\beta$ olduğundan, bileşkenin uzunluğu

$$A_N = 2R |\sin N\beta| = a \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right|.$$

olur. Böylece istenen işaretli katsayı

$$A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

olur.

Faz, kirişlerin doğrultularından bulunur. İlk küçük kirişin orta noktasından geçen yarıçapın açısıl konumu β iken, bileşke kirişin orta noktasından geçen yarıçapın açısıl konumu $N\beta$ 'dir. Her kiriş, orta noktasından geçen yarıçapa dik olduğundan, aralarındaki açısıl fark

$$N\beta - \beta = (N - 1)\beta,$$

olur; bileşkenin yönü tersine dönebilir.

Eşdeğer olarak, bileşke dalganın tam ifadesi

$$y_{\text{tot}} = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cos[\psi + (N - 1)\beta].$$

şeklindedir. Dolayısıyla seçilen kenar kabulüyle, işaretli katsayı korunduğunda bu kenar yarığına göre faz $(N - 1)\beta$ 'dir. Negatif olmayan bir genlik kullanıldığında ise

$$\phi = \begin{cases} (N - 1)\beta, & \sin N\beta / \sin \beta > 0, \\ (N - 1)\beta + \pi, & \sin N\beta / \sin \beta < 0, \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

olur. Karşı kenarın referans alınması, bağıl fazın işaretini 2π modülünde tersine çevirir. Bileşke sıfır olduğunda faz tanımsızdır.

$\beta = m\pi$ olduğunda komşu fazlar arasındaki fark $2m\pi$ 'dir. Tüm vektörler aynı yönü gösterir; böylece $A_N = Na$ olur ve bağıl faz 2π modülünde sıfırdır. Bu durumda çemberin yarıçapı limitte sonsuza gider.

(iii)

Zaman ortalamalı şiddet, fiziksel genliğin karesiyle orantılıdır. Tek yarığın genliği a olduğundan,

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A_N^2}{a^2},$$

ve dolayısıyla

$$\frac{I(\beta)}{I_1} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

İlk grafik için ortak bir yatay β eksen ve düşey fonksiyon değeri eksen kullanın:

- $\sin N\beta$, -1 ile $+1$ arasında $2\pi/N$ periyoduyla salınır. Sıfırları $\beta = k\pi/N$ noktalarındadır; ekstremumları ise $\beta = (2k + 1)\pi/(2N)$ noktalarında oluşur ve değerleri $(-1)^k$ 'dir.
- $1/\sin \beta$ 'nin periyodu 2π 'dir, sıfırı yoktur ve $\beta = m\pi$ noktalarında düşey asimptotları vardır. 0 ile π arasında, $+\infty$ 'den başlayarak $\pi/2$ 'deki minimum değeri olan 1 'e düşer, ardından $+\infty$ 'ye yükselir. π ile 2π arasındaki bir sonraki kol negatiftir; $3\pi/2$ 'de -1 'e ulaşır ve her iki uçta $-\infty$ 'ye yaklaşır. Bu kollar tekrarlanır.

Sinüsün çarpmaya göre tersi $m\pi$ noktalarında ıraksasa da, $\sin N\beta$ ile çarpımının büyüklüğü sonlu olan N limitine sahiptir.

Şiddet grafiği için I/I_1 'i çizin. Başlıca özellikleri şunlardır:

Konum	I/I_1
$\beta = m\pi$	N^2

Konum	I/I_1
$\beta = m\pi + r\pi/N, \quad r = 1, \dots, N-1$	0
$\beta = m\pi + \pi/2, N$ çift	0
$\beta = m\pi + \pi/2, N$ tek	1

Eğri negatif değer almaz, çift bir fonksiyondur ve π periyoduyla tekrarlanır. Her ana tepe $\beta = m\pi$ 'ye göre simetriktir. Ona en yakın sıfırlar

$$\beta = m\pi \pm \frac{\pi}{N},$$

noktalarında olduğundan, bu sıfırlar arasındaki genişliği $2\pi/N$ 'dir.

Komşu ana tepeler arasında $N-1$ sıfır bulunur; ardışık sıfırlar arasında da $N-2$ daha küçük ikincil tepe vardır. Bunların tam konumları,

$$N \cot(N\beta) = \cot \beta,$$

denklemini sağlar; bu denklem, şiddetin sıfırlarından uzakta türevi alınarak elde edilir. Asimptotlardan uzakta eğri,

$$I = \frac{I_1}{\sin^2 \beta}.$$

zarfının altında kalır.

(iv)

Uzunlukları a olan N vektörün mümkün olan en büyük bileşkesinin uzunluğu Na 'dır. Bu durum, tüm vektörler aynı yönü gösterdiğinde gerçekleşir:

$$2\beta = 2n\pi.$$

Dolayısıyla ana maksimumlar

$$\beta = n\pi \quad \Longleftrightarrow \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

koşulunu sağlar.

Bu doğrultularda,

$$A_N = Na,$$

olduğundan

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1.$$

Verilen eşit genlikli modelde, tüm ana maksimumlar bu şiddete sahiptir.

Aynı sonuç limit alınarak da elde edilir:

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N(-1)^{n(N-1)},$$

bu ifadenin karesi N^2 'dir.

(v)

n . mertebeden bir ana maksimum için

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

olmalıdır. $|\sin \theta| \leq 1$ olduğundan,

$$|n| \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Dolayısıyla izin verilen tam sayı mertebeler

$$-\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor \text{ ile } +\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

arasında değişir. Sıfıncı mertebe de sayıldığında

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1.$$

elde edilir. $\lfloor u \rfloor \leq u$ olduğundan,

$$\boxed{M \leq \frac{2d}{\lambda} + 1}.$$

Bu sayım, tam olarak yüzeye teğet olan $\theta = \pm 90^\circ$ doğrultularındaki mertebeleri de sınır doğrultuları olarak içerir. Bu doğrultuların dışarıda bırakılması sayıyı yalnızca azaltabilir.

(vi)

İki dalga boyu için aynı n mertebesindeki ana maksimumları ele alalım. $\Delta\lambda = \delta\lambda$ yazarsak bunların kırınım ağı denklemleri

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= n\lambda, \\ d \sin(\theta + \Delta\theta) &= n(\lambda + \Delta\lambda). \end{aligned}$$

olur.

Radyan cinsinden ölçülen küçük bir açısal kayma için,

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \simeq \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta.$$

Birinci kırınım ağı denklemini ikinciden çıkarırsak

$$d \cos \theta \Delta\theta \simeq n\Delta\lambda,$$

ve buradan

$$\boxed{\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}}.$$

elde edilir. Bu, mevcut olan ve yüzeye teğet olmayan maksimumlar için birinci mertebeden bir sonuçtur. Negatif n için işaretli kayma negatiftir; açısal ayırım bunun mutlak değeridir. Sıfıncı mertebe maksimumları çakışır.

Sodyum çizgileri için,

$$\Delta\lambda = (589.6 - 589.0) \text{ nm} = 0.6 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

$\lambda = 589.0 \text{ nm}$ için ikinci mertebede,

$$\sin \theta = \frac{2(589.0 \times 10^{-9})}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.9816667,$$

olduğundan

$$\theta \simeq 79.01^\circ, \quad \cos \theta \simeq 0.19061.$$

Dolayısıyla,

$$\Delta\theta \simeq \frac{2(0.6 \times 10^{-9})}{(1.2 \times 10^{-6})(0.19061)} = 5.246 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

Uygun bir hassasiyetle,

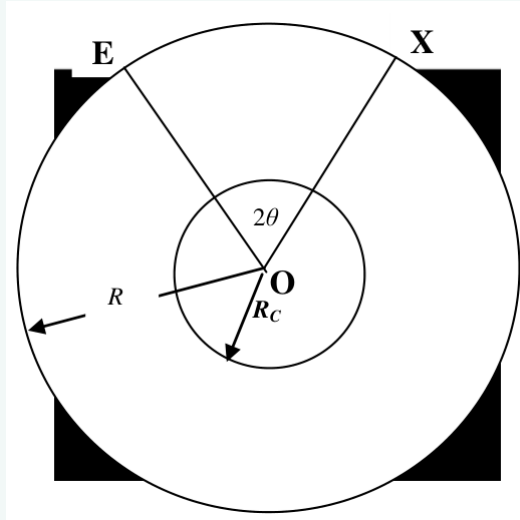
$$\boxed{\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ}.$$

Sayısal bir kontrol olarak, açılım yapılmamış kırınım açısı denkleminde elde edilen iki açı birbirinden çıkarıldığında $5.32 \times 10^{-3} \text{ rad}$ bulunur; bu, birinci mertebeden tahminden yaklaşık 1.4% daha büyüktür.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Sismik dalgalar ve Dünya'nın sıvı çekirdeği

2. Bu yüzyılın başlarında, Dünya'nın yarıçapı R olan ve R_c yarıçapına kadar homojen, izotrop katı bir mantodan oluşan bir küre olarak kabul edildiği bir model önerildi. R_c yarıçapının içinde kalan çekirdek bölgesi bir sıvı içeriyordu.



Şekil 2.1

Sırasıyla P ve S dalgaları olarak adlandırılan boyuna ve enine sismik dalgaların hızları manto içinde sabittir ve V_P ile V_S 'dir. Çekirdekte boyuna dalgaların hızı sabit olup $V_{CP} < V_P$ 'dir ve enine dalgalar yayılmaz.

Dünya yüzeyindeki E noktasında meydana gelen bir deprem, Dünya'nın içinden geçen ve sismometresini Dünya yüzeyindeki herhangi bir X noktasına yerleştirebilen bir yüzey gözlemcisi tarafından gözlenen sismik dalgalar üretir. E ile X arasındaki açısal uzaklık 2θ ,

$$2\theta = \text{Açı } EOX$$

ile verilir; burada O, Dünya'nın merkezidir.

(i) Manto içinde doğrusal bir yol boyunca ilerleyen sismik dalgaların X'e ulaşma zamanı t 'nin (depremden sonraki yayılma süresinin)

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \text{koşuluyla } \theta > \arccos \left[\frac{R_c}{R} \right],$$

ile verildiğini gösteriniz; burada P dalgaları için $v = v_P$, S dalgaları için ise $v = v_S$ 'dir.

(ii) X'in bazı konumlarında sismik P dalgaları, manto–çekirdek ara yüzünde iki kez kırıldıktan sonra gözlemciye ulaşır. Böyle bir sismik P dalgasının izlediği yolu çiziniz. P dalgaları için θ ile sismik P dalgasının manto–çekirdek ara yüzüne gelme açısı i arasında bir bağıntı elde ediniz.

(iii) Aşağıdaki verileri

R	=	6370 km
R_C	=	3470 km
v_{CP}	=	10.85 km s ⁻¹
v_S	=	6.31 km s ⁻¹
v_{CP}	=	9.02 km s ⁻¹

ve (ii)'de elde edilen sonucu kullanarak θ 'nın i 'ye göre grafiğini çiziniz. Bu grafiğin biçiminin, Dünya yüzeyinin farklı noktalarında bulunan gözlemciler açısından fiziksel sonuçlarını yorumlayınız. P ve S dalgalarının yayılma sürelerinin θ 'ya bağlı değişimini $0 \leq \theta \leq 90$ derece aralığında kabaca çiziniz.

(iv) Bir depremden sonra bir gözlemci, P dalgasını izleyen S dalgasının varışı arasındaki zaman farkını 2 dakika 11 saniye olarak ölçer. Bölüm (iii)'te verilen verileri kullanarak depremin gözlemciye olan açısal uzaklığını bulunuz.

(v) Önceki ölçümü yapan gözlemci, P ve S dalgalarının varışından bir süre sonra sismometrede aralarında 6 dakika 37 saniyelik zaman farkı bulunan iki kayıt daha olduğunu fark eder. Bu sonucu açıklayınız ve bunun gerçekten de önceki bölümde belirlenen açısal uzaklıkla ilişkili olduğunu doğrulayınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (i) Doğrudan gelen dalganın yayılma süresi

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos(R_c/R).$$

Eşitlik, sınır durumundaki teğet ışını tanımlar. Basılı metindeki eşitsizlik ters yöndedir.

- (ii) $a = R_c/R$, $b = v_{CP}/v_P$ olsun. Işın, çekirdeğe girerken normale yaklaşarak, çıkarken ise normalden uzaklaşarak kırılır ve üç doğru parçasından oluşan bir yol izler. Merkez çevresinde taradığı açının yarısı

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Olağan durumda $\theta = \Phi$ 'dir; karşıt noktanın ötesinden çıkan ışınlar da hesaba katıldığında, küçük açısal uzaklık

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

ile verilir.

- (iii) Doğrudan gelen P ve S ışınları $\theta = 56.99^\circ$ 'de sona erer. Çekirdekten geçen P ışınları ilk kez

$$\theta_{\min} = 75.58^\circ, \quad i_{\min} = 55.02^\circ.$$

değerlerinde ortaya çıkar. Dolayısıyla P dalgasının gölge bölgesi yaklaşık olarak

$$113.99^\circ < 2\theta < 151.15^\circ,$$

aralığıdır; buna karşılık $2\theta > 113.99^\circ$ için doğrudan gelen veya çekirdekten geçen hiçbir S dalgası ulaşmaz. Kırılan P dalgalarının yayılma süresi dalları 20.789 min'de birleşir; karşıt noktaya varış süreleri 21.733 ve 23.397 min'dir. Grafiklerin tam açıklamaları aşağıda verilmiştir.

- (iv) Deprem ile gözlemci arasındaki açısal uzaklık

$$2\theta \approx 17.8^\circ.$$

- (v) Daha sonra gelen sinyaller, çekirdek sınırında yansıyan P ve S dalgalarıdır. Hesaplanan varış zamanları depremden sonra 551.3 s ve 947.9 s olup aralarındaki fark

$$\Delta t_{\text{ref}} = 396.65 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 37 \text{ s}.$$

Çözüm

Sayısal verilerin fiziksel açıdan tutarlı yorumunu kullanıyoruz:

$$v_P = 10.85 \text{ km s}^{-1}, \quad v_S = 6.31 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km s}^{-1}.$$

(iii) kısmındaki veri tablosunda v_{CP} etiketi iki kez basılmıştır; bu etiketli ilk satırdaki 10.85 km s^{-1} değeri v_P hızıdır. (i) kısmındaki basılı eşitsizlik de ters yöndedir; (i) kısmına bakınız.

Geometrik ışın kuramını kullanıyoruz: ışınlar her homojen bölge içinde doğrusal ilerler, kırılma Snell yasasına uyar ve yansımada gelme açısı ile yansıma açısı eşittir. Kırınım, mod dönüşümü ve Dünya yüzeyindeki ek yansımalar ihmal edilir.

(i)

M , EX kirişinin orta noktası olsun. OEM üçgeni dik üçgendir ve $\angle EOM = \theta$ 'dir. Dolayısıyla

$$EM = R \sin \theta, \quad OM = R \cos \theta.$$

Böylece doğrudan yolun uzunluğu ve yayılma süresi

$$EX = 2R \sin \theta, \quad t = \frac{2R \sin \theta}{v}.$$

Kirişin merkeze en yakın noktası M 'dir. Bu nedenle ışın, ancak

$$R \cos \theta \geq R_c,$$

yani

$$\theta \leq \arccos(R_c/R).$$

olduğunda çekirdeğe girmez. Kesin eşitsizlik, bütünüyle manto içinde kalan bir yol verir; eşitlik ise teğet sınır durumudur. Daha büyük θ değerlerinde giriş çekirdeği keser; dolayısıyla yalnızca mantoda ilerleme için geçerli olan formül artık gerçek ışını tanımlamaz.

(ii)

Çekirdeğe giriş ve çekirdekten çıkış noktalarını A ve B ile gösterelim.

$$E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X,$$

yolunu, EA ve BX manto içinde, AB ise çekirdeğin bir kirişi olacak şekilde çiziniz. Radyal normaller OA ve OB 'yi çiziniz.

r , çekirdek içindeki, normalden ölçülen kırılma açısı olsun. Snell yasası

$$\frac{\sin i}{v_P} = \frac{\sin r}{v_{CP}},$$

bağıntısını verir; buradan

$$r = \arcsin \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right).$$

$v_{CP} < v_P$ olduğundan $r < i$ 'dir: ışın çekirdeğe girerken normale doğru bükülür. Simetri gereği, çıkıştaki gelme açısı r 'dir ve mantoya i açısıyla çıkar.

$\alpha = \angle OEA$ olsun. EOA üçgeninde A köşesindeki açı $\pi - i$ 'dir. Sinüs teoremi

$$\frac{\sin \alpha}{R_c} = \frac{\sin i}{R},$$

bağıntısını verir; dolayısıyla

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{R_c}{R} \sin i \right), \quad \angle EOA = i - \alpha.$$

AOB ikizkenar üçgeninden

$$\angle AOB = \pi - 2r.$$

elde edilir. Böylece ışının O çevresinde taradığı toplam açı

$$2\Phi = 2(i - \alpha) + \pi - 2r.$$

olur. Dolayısıyla

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin \left(\frac{R_c}{R} \sin i \right) - \arcsin \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right).$$

Taranan açı π 'den büyük değilse $\theta = \Phi$ 'dir. Işın karşıt noktanın hemen ötesinden çıkarsa, kaynak ile gözlemci arasındaki küçük açı $2\pi - 2\Phi$ olur ve

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

elde edilir.

Bu nedenle istenen çizim, mantodaki kolları eşit, çekirdekdeki kirişi düz olan simetrik bir kırık ışın yolunu göstermeli ve giriş sınırında i ile $r < i$ açıları işaretlenmelidir.

(iii)

Boyutsuz oranlar

$$a = \frac{R_c}{R} = 0.544741, \quad b = \frac{v_{CP}}{v_P} = 0.831336.$$

şeklinde. Böylece

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Açıları radyan cinsinden alarak türev alırsak,

$$\frac{d\Phi}{di} = 1 - \frac{a \cos i}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} - \frac{b \cos i}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

Uç noktalarda,

$$\Phi'(0) = 1 - a - b = -0.376077, \quad \Phi'(\pi/2) = 1.$$

Çıkarılan terimlerin her biri i arttıkça azalır; dolayısıyla Φ' artar ve tam olarak bir sıfırı vardır. Sayısal olarak,

$$i_{\min} = 55.017^\circ, \quad \Phi_{\min} = \theta_{\min} = 75.577^\circ.$$

Buna karşılık gelen yayılma süresi grafiğini elde etmek için, mantodaki kolların her birinin uzunluğu

$$\ell_m = \sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i.$$

olarak bulunur. Bu sonuç, dış ve iç yarıçapların, O 'ya dik uzaklığı $R_c \sin i$ olan manto ışını üzerine izdüşümleri alınarak elde edilir.

Çekirdek kirişinin uzunluğu

$$\ell_c = 2R_c \cos r = 2R_c \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

olur. Dolayısıyla çekirdekten geçen P dalgasının yayılma süresi

$$T(i) = \frac{2}{v_P} \left(\sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i \right) + \frac{2R_c}{v_{CP}} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Aşağıdaki noktalar, istenen her iki grafiği de belirler:

i (derece)	Taranan açının yarısı Φ (derece)	Fiziksel θ (derece)	Çekirdekten geçen P dalgasının süresi (dakika)
0	90.00	90.00	21.733
20	82.74	82.74	21.504
40	77.20	77.20	21.003
55.02	75.58	75.58	20.789
70	77.84	77.84	21.171

i (derece)	Taranan açının yarısı Φ (derece)	Fiziksel θ (derece)	Çekirdekten geçen P dalgasının süresi (dakika)
80	82.60	82.60	22.028
89.23	90.00	90.00	23.397
90	90.76	89.24	23.538

Φ 'nin i 'ye göre eğrisi 90° 'den başlar, düzgün biçimde minimumuna iner, ardından 90.7568° 'ye yükselir. Fiziksel küçük açı θ 'yı çizerken son kısmı 90° 'de katlayınız: $\theta, i = 89.2322^\circ$ 'de 90° 'ye ulaşır, ardından teğet geliş durumunda hafifçe azalarak 89.2432° 'ye iner.

Doğrudan gelen dalgaların sınır açısı

$$\theta_d = \arccos(R_c/R) = 56.993^\circ.$$

olur. Dolayısıyla fiziksel sonuçlar şunlardır:

- $0 \leq \theta < 56.993^\circ$ için doğrudan gelen P ve S dalgaları gözlemciye ulaşır.
- $56.993^\circ < \theta < 75.577^\circ$ için ne doğrudan gelen ne de çekirdekten geçen P ışınları gözlemciye ulaşır. Burası P dalgasının gölge bölgesidir.
- $\theta > 56.993^\circ$ için doğrudan gelen bir S ışını yoktur ve sıvı çekirdekten geçen bir S ışını da bulunmaz.
- $\theta = 75.577^\circ$ 'de kırılan P dalgalarının iki yolu birleşir. Yakın gelme açılarına sahip ışınlar hemen hemen aynı açısal uzaklıkta çıktığından, ışın enerjisi burada yoğunlaşır: bu bir kostiktir.
- $75.577^\circ < \theta < 90^\circ$ aralığının büyük kısmında, kırılan P dalgalarının iki yolu iki ayrı varışa yol açar.

Verilen sayılar tam olarak kullanıldığında, karşıt nokta yakınında küçük bir ek özellik ortaya çıkar.

$$89.2432^\circ < \theta < 90^\circ,$$

için üçüncü bir kırılan ışın yolu, karşıt nokta doğrultusunun ötesinden geçerek gözlemciye ulaşır. Karşıt noktada, iki eğik dalın yayılma süreleri eşittir.

Yayılma süresi grafiğinin taslağı için doğrudan gelen dalgaların

$$t_{P,\text{dir}} = 1174.19 \sin \theta \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 2019.02 \sin \theta \text{ s},$$

dallarını yalnızca $0 \leq \theta \leq 56.993^\circ$ aralığında çiziniz. Her ikisi de orijinden başlar ve aşağı doğru içbükey biçimde artar; S eğrisi P eğrisinin üzerinde yer alır. Uç noktaları

$$t_{P,\text{dir}}(\theta_d) = 984.68 \text{ s} = 16.411 \text{ min},$$

$$t_{S,\text{dir}}(\theta_d) = 1693.16 \text{ s} = 28.219 \text{ min}.$$

şeklindedir.

Çekirdekten geçen P dalgalarının ana dalları birlikte

$$(\theta, T) = (75.577^\circ, 20.789 \text{ min})$$

noktasında başlar ve 90° 'ye doğru yükselir. Ortak bir teğetle birleşirler; çünkü türev alındığında

$$\frac{dT}{di} = \frac{2R_c \sin i}{v_P} \frac{d\Phi}{di}, \quad \frac{dT}{d\Phi} = \frac{2R_c \sin i}{v_P}.$$

elde edilir. Daha küçük i değerlerine sahip dal daha erken ulaşır ve ışının bir çap boyunca ilerlediği karşıt noktada yataylaşır:

$$T(0) = \frac{2(R - R_c)}{v_P} + \frac{2R_c}{v_{CP}} = 21.733 \text{ min.}$$

Diğer ana dal burada 23.397 min'ye ulaşır. Küçük üçüncü dal, $\theta = 89.243^\circ$ 'deki 23.538 min'den 90° 'de 23.397 min'ye iner.

(v) kısmında ele alınan daha geç gelen yansımış dalgaları da içeren bir taslak için ayrıca

$$t_{v,\text{ref}}(\theta) = \frac{2}{v} \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_d.$$

eğrilerini çiziniz. Bu eğriler $\theta = 0$ 'da P için 8.909 min, S için 15.320 min'den başlayarak artar ve θ_d 'de kendilerine karşılık gelen doğrudan dalga eğrileriyle teğet olarak birleşir.

(iv)

Doğrudan gelen P ve S dalgaları için yol uzunluğu aynıdır; dolayısıyla varış zamanları arasındaki fark

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right).$$

olur. Burada

$$\Delta t = 2(60) + 11 = 131 \text{ s.}$$

Dolayısıyla

$$\sin \theta = \frac{131}{2(6370) \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right)} = \frac{131}{844.8239} = 0.1551.$$

Böylece

$$\theta = 8.9204^\circ, \quad \boxed{2\theta = 17.8408^\circ \approx 17.8^\circ}.$$

$\theta < \theta_d$ olduğundan, yolun yalnızca mantodan geçtiği varsayımı tutarlıdır.

Her bir dalgaın varış zamanı

$$t_{P,\text{dir}} = 182.07 \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 313.07 \text{ s.}$$

şeklindedir.

(v)

Çekirdek sınırı hem P hem de S dalgalarının enerjisini yansıtabilir. Bu yansımış dalgalar manto içinde daha uzun yollar izler ve dolayısıyla daha geç ulaşır.

C , çekirdek sınırı üzerinde, $\angle EOX$ 'in yakın taraftaki radyal açıortayı üzerinde bulunan yansıma noktası olsun. İzlenen yol

$$E \longrightarrow C \longrightarrow X.$$

şeklindedir. OC 'ye göre yansıma simetrisi, gelme ve yansıma açılarını eşit kılar ve $EC = CX$ 'tir.

$\angle EOC = \theta$ olduğundan, kosinüs teoremi

$$EC^2 = R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta.$$

bağıntısını verir. Böylece yansımali yolun uzunluğu

$$L_{\text{ref}} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}.$$

olur.

$\theta = 8.9204^\circ$ için,

$$L_{\text{ref}} = 5981.54 \text{ km.}$$

Dolayısıyla yansımış dalgaların varış zamanları

$$t_{P,\text{ref}} = \frac{5981.54}{10.85} = 551.29 \text{ s,}$$
$$t_{S,\text{ref}} = \frac{5981.54}{6.31} = 947.95 \text{ s.}$$

olur. Gerekli gibi, her ikisi de doğrudan gelen S dalgasının 313.07 s'deki varışından sonra gerçekleşir.

Aralarındaki zaman farkı

$$\Delta t_{\text{ref}} = L_{\text{ref}} \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right)$$
$$= 396.65 \text{ s}$$
$$= 6 \text{ min } 36.65 \text{ s.}$$

olur. En yakın saniyeye yuvarlandığında,

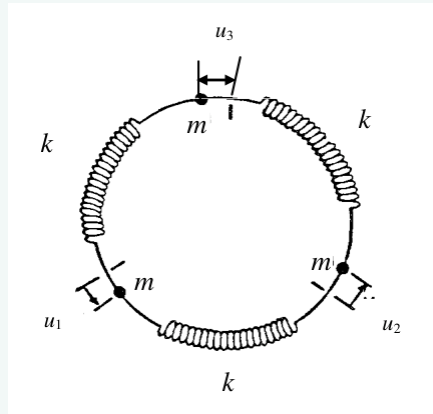
$$\Delta t_{\text{ref}} = 6 \text{ min } 37 \text{ s},$$

elde edilir; bu da yorumu ve (iv) kısmında bulunan açısal uzaklığı doğrular.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 3: Yaylarla birbirine bağlı kütlelerin normal modları (halka ve zincir)

Her biri m kütleli üç parçacık dengededir ve her birinin Hooke yasasındaki yay sabiti k olan, uzamamış, kütsüz yaylarla birbirine bağlanmıştır. Parçacıklar, Şekil 3.1'de gösterildiği gibi çembersel bir yörüngede hareket edecek biçimde kısıtlanmıştır.



Şekil 3.1

(i) Her bir kütle denge konumundan sırasıyla u_1 , u_2 ve u_3 kadar küçük yer değiştirmeler yaparsa, her kütle için hareket denklemini yazınız.

(ii) Sistemin

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

biçiminde, ivmeleri $(-\omega^2 u_n)$ olan basit harmonik çözümlere sahip olduğunu doğrulayınız. Burada a_n ($n = 1, 2, 3$) sabit genliklerdir ve açısal frekans ω , şu 3 değeri alabilir:

$$\omega_o\sqrt{3}, \omega_o\sqrt{3} \text{ ve } 0. \quad \text{burada } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

(iii) Dönüşümlü olarak sıralanmış yay ve kütlelerden oluşan sistem N parçacığa genişletilmiştir; her m kütlesi, komşu kütlelere yaylarla bağlıdır. Başlangıçta yaylar uzamamıştır ve dengededir. Parçacıklar denge konumlarından uzaklaştırıldığında, n . kütlenin ($n = 1, 2, \dots, N$) hareket denklemini, kendi yer değiştirmesi ve komşu kütlelerin yer değiştirmeleri cinsinden yazınız.

$$u_n(t) = a_s \sin \left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi \right) \cos \omega_s t,$$

ifadeleri, $s = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N$ ve ϕ keyfî bir faz olmak üzere, açısal frekansların

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{s\pi}{N} \right),$$

ile verilmesi koşuluyla salınımlı çözümlerdir; burada a_s ($s = 1, \dots, N$), n 'den bağımsız sabit genliklerdir.

Sonsuz sayıda kütle içeren bir zincir için mümkün frekans aralığını belirtiniz.

(iv) Büyük N için

$$u_n/u_{n+1}$$

oranını şu iki durumda belirleyiniz:

(a) düşük frekanslı çözümler

(b) $\omega = \omega_{\max}$; burada $\omega_{\max}$, maksimum frekanslı çözümün frekansıdır.

(a) ve (b) durumları için, t anında parçacıkların yer değiştirmelerinin zincir boyunca parçacık numarasına göre değişimini gösteren tipik grafikler çiziniz.

(v) Kütlelerden biri $m' \ll m$ kütlesiyle değiştirilirse, açısal frekans dağılımında ortaya çıkması beklenen herhangi bir önemli değişikliği tahmin ediniz.

Önceki sonuca dayanarak, m ve m' kütlelerinin dönüşümlü olarak sıralandığı iki atomlu bir zincir için öngöreceğiniz frekans spektrumunun biçimini nitel olarak açıklayınız.

Hatırlatma

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right) \\ 2 \sin^2 A &= 1 - \cos 2A \end{aligned}$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (i)

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 &= k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 &= k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{aligned}$$

- (ii)

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad 0.$$

Sıfırdan farklı frekansa ait, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ koşulunu sağlayan iki bağımsız mod vardır. Sıfır modunda $a_1 = a_2 = a_3$ olur.

- (iii)

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad u_{n+N} = u_n,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right).$$

Sonsuz bir zincir için,

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Olağan frekans cinsinden, $0 \leq f \leq \sqrt{k/m}/\pi$.

- (iv)

(a) Yer değiştirme düğümlerinden uzakta, $u_n/u_{n+1} \simeq +1$. Grafik, parçacık konumlarında örneklenmiş, yavaş değişen bir sinüzoiddir.

(b) Üst bant kenarında $u_n/u_{n+1} = -1$. Yer değiştirmeler, büyüklükleri eşit pozitif ve negatif değerler arasında dönüşümlü olarak değişir. Bu, çift N için tam olarak geçerlidir; tek sayıda parçacık içeren bir halka, büyük N için yerel olarak bu davranışa yaklaşır.

- (v) Tek bir hafif kütle, bu kütle üzerinde yoğunlaşan bir yüksek frekanslı mod oluşturur:

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}} \gg 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Kütlelerin dönüşümlü sıralandığı bir zincirde, aralarında bir boşluk bulunan bir akustik bant ve bir optik bant vardır. $m' < m$ için bunların kesin sınır aralıkları şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{Akustik:} \quad & 0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ \text{Optik:} \quad & \sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}. \end{aligned}$$

Çözüm

(i)

Tüm yer değiştirmeleri, halka çevresinde aynı yönde ölçülen yay uzunlukları olarak alalım. Küçük yer değiştirme yaklaşımında, bir yayın uzaması uçlarının yer değiştirmeleri arasındaki farktır. Dolayısıyla Hooke yasası, bu farkla orantılı teğetsel bir geri çağırıcı kuvvet verir. Kısıt kuvvetinin teğetsel bileşeni yoktur.

1 numaralı parçacığa iki yay, $k(u_2 - u_1)$ ve $k(u_3 - u_1)$ kuvvetlerini uygular. Newton'ın ikinci yasası řu sonucu verir:

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1).$$

Aynı akıl yürütmeyi 2 ve 3 numaralı parçacıklara uygularsak,

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{cases}$$

(ii)

$u_n = a_n \cos \omega t$ ifadesini yerine koyalım; böylece $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ olur. řu tanımları yapalım:

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \quad S = a_1 + a_2 + a_3.$$

Her denklem řu hâle gelir:

$$\lambda a_n = 3a_n - S.$$

Üç denklemi toplarsak,

$$\lambda S = 0.$$

İki olasılık vardır.

$\lambda = 0$ ise, denklemler ayrı ayrı řu koşulu gerektirir:

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Tüm kütleler aynı yay uzunluğu kadar yer değiştirir, dolayısıyla hiçbir yayın uzunluğu değişmez. Böylece

$$\omega = 0.$$

Bu, rijit dönme modudur. Tam anlamıyla bir salınım değildir: genel hareketi $u_1 = u_2 = u_3 = A + Bt$ biçimindedir. Verilen kosinüs biçimi, bu modun statik yer değiştirme durumunu temsil eder.

$\lambda \neq 0$ ise $S = 0$ olur ve sıfırdan farklı bir genlik için

$$\lambda = 3.$$

Dolayısıyla

$$\omega = \sqrt{3} \omega_o = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0$ koşulu, iki bağımsız genlik bırakır. Örneęin, iki bağımsız mod biçimi şöyledir:

$$(a_1, a_2, a_3) \propto (1, -1, 0), \quad (a_1, a_2, a_3) \propto (1, 1, -2).$$

Sonuç olarak, üç normal modun frekansları

$$\sqrt{3}\omega_o, \quad \sqrt{3}\omega_o, \quad 0,$$

olup sıfırdan farklı frekans iki kez ortaya çıkar.

(iii)

n numaralı parçacığa etki eden kuvvetler şunlardır:

$$k(u_{n+1} - u_n) \quad \text{ve} \quad -k(u_n - u_{n-1}).$$

Böylece

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

Halka, periyodik sınır koşulları gerektirir:

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1.$$

Şöyle yazalım:

$$q = \frac{2\pi s}{N}, \quad u_n = a_s \sin(nq + \phi) \cos \omega_s t.$$

$Nq = 2\pi s$ olduğundan bu ifade periyodiktir. Verilen toplam özdeşliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= a_s [\sin(nq + \phi + q) + \sin(nq + \phi - q)] \cos \omega_s t \\ &= 2 \cos q u_n. \end{aligned}$$

Dolayısıyla hareket denklemi şu hâle gelir:

$$-m\omega_s^2 u_n = 2k(\cos q - 1)u_n = -4k \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right) u_n.$$

Özdeş olarak sıfır olmayan bir mod için,

$$\omega_s^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{N} \right).$$

Belirtilen $s = 1, \dots, N$ aralığında $\sin(\pi s/N) \geq 0$ olduğundan,

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{\pi s}{N} \right).$$

Zincir sonsuz hâle geldikçe izinli dalga sayıları sürekli hâle gelir. Sinüs çarpanı sıfır ile bir arasındaki her değeri alır ve şu sonucu verir:

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_o = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Sıfır, rijit yer değiştirmeye karşılık gelen uç noktadır; gerçek salınımlarda $\omega > 0$ olur. $f = \omega/(2\pi)$ olduğundan,

$$0 \leq f \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

k ve m 'nin SI birimlerindeki değerleri kullanıldığında açısal frekanslar rad s^{-1} , olağan frekanslar ise Hz birimindedir.

(iv)

Paydanın sıfırdan farklı olduğu zaman ve konumlarda ortak zaman çarpanı sadeleşir:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin(nq + \phi)}{\sin(nq + \phi + q)}.$$

Aynı ifade, mod genliklerinin oranı için de doğrudan geçerlidir.

(a) Düşük frekans

q 'nın sıfıra yakın temsilcisini seçelim. Bu durumda

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin \frac{q}{2} \right| \simeq \omega_o |q|,$$

dolayısıyla düşük frekans, $|q| \ll 1$ anlamına gelir. $\theta = nq + \phi$ yazarsak,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{\cos q + \cot \theta \sin q} \simeq 1 - q \cot \theta.$$

Böylece, düğümlerden uzakta,

$$\boxed{\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq +1.}$$

Komşu kütlelerin yer değiştirmeleri hemen hemen eşittir ve yaklaşık olarak aynı fazda hareket ederler. Bir düğümün yakınında yer değiştirmelerin kendileri küçük olduğundan, oranlarının bire yakın olması gerekmez.

İstenen çizim için, parçacıklar arası uzaklık biriminde ölçülen dalga boyu $L \gg 1$ olan bir sinüzoid çiziniz ve tam sayı parçacık numaralarındaki değerlerini işaretleyiniz. Temsilî bir profil şöyledir:

$$u_n = C(t) \sin \left(\frac{2\pi(n - n_0)}{L} \right).$$

Temel değerleri şunlardır:

$n - n_0$	0	$L/4$	$L/2$	$3L/4$	L
$u_n/C(t)$	0	+1	0	-1	0

Ardışık düğümler arasında çok sayıda parçacık bulunur ve komşu noktaların yükseklikleri genellikle birbirine çok yakındır.

(b) Maksimum frekans

Üst bant kenarında $q = \pi$ olur ve bu da

$$\omega_{\max} = 2\omega_o.$$

sonucunu verir. Yer değiştirme şöyledir:

$$u_n = a_s \sin(n\pi + \phi) \cos \omega_{\max} t = (-1)^n a_s \sin \phi \cos \omega_{\max} t.$$

Sonuç olarak,

$$\boxed{u_{n+1} = -u_n, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1.}$$

Her komşu çift, eşit genliklerle zıt yönlerde hareket eder.

Çizim, dönüşümlü olarak $+C(t)$ ve $-C(t)$ değerlerinde bulunan noktalardan oluşur:

$n - n_0$	0	1	2	3	4
$u_n/C(t)$	+1	-1	+1	-1	+1

Uzaysal periyot, parçacıklar arası uzaklığın iki katıdır. Görsel bir kılavuz olarak komşu noktalar birleştirilirse bir zikzak oluştururlar.

Bu örüntü, çift sayıda parçacık içeren bir halkaya tam olarak uyar. Tek ve sonlu N için, izin verilen en büyük dalga sayısı $\pi \pm \pi/N$ olur ve

$$\omega_{\max} = 2\omega_o \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

Buna ait yer değiştirme örüntüsü, yavaş değişen bir zarf altında dönüşümlü olarak işaret değiştirir. Büyük N için, zarfın düğümlerinden uzakta komşu yer değiştirmelerin oranı yaklaşık olarak -1 'dir.

(v)

Önce yalnızca bir kütleyi $m' \ll m$ ile değiştirelim. Bu hafif kütlenin hızlı bir titreşimi, ağır komşularında görece küçük bir harekete yol açar. En düşük mertebeli yaklaşımda bu komşuları sabit kabul edelim.

Hafif kütlenin x kadar yer değiştirmesi, her yayın $-kx$ geri çağırıcı kuvvetini uygulamasına yol açar. Dolayısıyla

$$m'\ddot{x} \simeq -2kx,$$

ve buradan

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

Başlangıçtaki üst bant kenarına oranı,

$$\frac{\omega_{\text{defect}}}{2\omega_o} \simeq \sqrt{\frac{m}{2m'}} \gg 1.$$

Yaklaşım kendi içinde tutarlıdır. Genliği u_1 olan komşu bir ağır kütle için, yüksek frekansta baskın terimler arasındaki denge şöyledir:

$$-m\omega_{\text{defect}}^2 u_1 \simeq kx,$$

dolayısıyla

$$\frac{u_1}{x} \simeq -\frac{m'}{2m}.$$

Hareketi küçük ve hafif kütleninkine zıt yöndedir. Daha uzaktaki hareket daha da küçüktür: yüksek frekanslı mod, kusurun çevresinde yerleşmiştir.

Böylece bir mod, başlangıçtaki frekans bandının çok üstüne çıkar. Diğer frekanslar değişime uğrar, ancak $\sqrt{k/m}$ ölçeğinde kalır; sonsuz bir zincirde uzanımlı modların bandı $0 \leq \omega \leq 2\omega_o$ olarak kalır. Sıfır frekanslı rijit yer değiştirme modu da varlığını korur.

Kütlelerin dönüşümlü sıralandığı bir zincirde, tekrarlanan hafif kütleler tam bir yüksek frekans bandı oluşturur. Spektrum şu bantlara ayrılır:

- Düşük frekanslı ortak hareketi içeren bir **akustik bant**. Uzun dalga boylarında, komşu ağır ve hafif kütleler yaklaşık olarak birlikte hareket eder.
- Hafif kütlelerin hızla salındığı, ağır kütlelerin hareketinin ise çok daha küçük olduğu bir **optik bant**. Uzun dalga boylarında iki tür kütle zıt yönlerde hareket eder.

Bant kenarları doğrudan türetilir. x_j , j numaralı ağır kütlelerin yer değiştirmesi; y_j ise x_j ile x_{j+1} arasındaki hafif kütlelerin yer değiştirmesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= k(y_{j-1} + y_j - 2x_j), \\ m'\ddot{y}_j &= k(x_j + x_{j+1} - 2y_j). \end{aligned}$$

İki parçacıklı hücre başına faz değişimi Q olan bir mod için şu ifadeleri kullanalım:

$$\begin{aligned} x_j &= X \cos(jQ + \phi) \cos \omega t, \\ y_j &= Y \cos\left((j + \frac{1}{2})Q + \phi\right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Genlik denklemleri şöyledir:

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)X &= 2k \cos(Q/2)Y, \\ (2k - m'\omega^2)Y &= 2k \cos(Q/2)X. \end{aligned}$$

Sıfırdan farklı bir çözüm için

$$(2k - m\omega^2)(2k - m'\omega^2) = 4k^2 \cos^2(Q/2),$$

ya da

$$mm'\omega^4 - 2k(m + m')\omega^2 + 4k^2 \sin^2(Q/2) = 0.$$

Bu denklemin iki kökü şöyledir:

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)^2 - \frac{4}{mm'} \sin^2(Q/2)}.$$

$|Q|$, 0'dan π 'ye artarken küçük kök artar, büyük kök ise azalır. Dolayısıyla $m' < m$ için bunların aralıkları

$$0 \leq \omega_- \leq \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

ve

$$\sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega_+ \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}.$$

Şu boşlukta hiçbir mod yoktur:

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

$m' \ll m$ için optik bant, yaklaşık $\sqrt{2k/m'}$ olan yüksek frekansına kıyasla dardır ve akustik banttan büyük ölçüde ayrılmıştır. Sonlu bir periyodik zincirde bu bantlar içinde ayrı frekanslar bulunur; sonsuz zincir limitinde bunlar sürekli hâle gelir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.