

IPhO 1986

Теоретические задачи и решения · Лондон (Хэрроу), Великобритания · 3

теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1986/

Задача 1: Две щели и дифракционная решётка: векторное сложение амплитуд

Figure 1.1

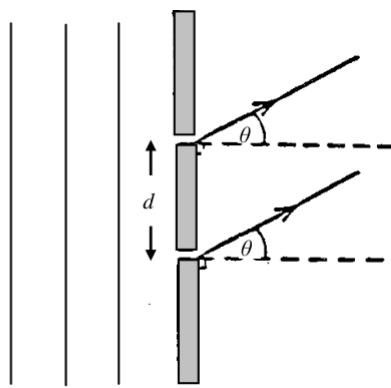


Рисунок 1.1

Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ и частотой f падает нормально на две одинаковые узкие щели, расположенные на расстоянии d друг от друга, как показано на рисунке 1.1. Световая волна, выходящая из каждой щели, на расстоянии x в направлении θ в момент времени t описывается выражением

$$y = a \cos[2\pi(ft - x/\lambda)]$$

где амплитуда a одинакова для обеих волн. (Считайте, что x значительно больше d).

(i) Покажите, что результирующую амплитуду A двух волн, наблюдаемых под углом θ к нормали к плоскости щелей, можно получить сложением двух векторов, каждый из которых имеет модуль a и направление, определяемое фазой соответствующей световой волны.

Используя векторную диаграмму, геометрически убедитесь, что

$$A = 2a \cos \theta$$

где

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(ii) Две щели заменяют дифракционной решёткой с N равноотстоящими щелями; расстояние между соседними щелями равно d . Используя векторный метод сложения амплитуд, покажите, что векторы амплитуд, каждый из которых имеет модуль a , образуют часть правильного многоугольника с вершинами на окружности радиуса R , определяемого выражением

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta},$$

Выведите отсюда, что результирующая амплитуда равна

$$\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

и найдите разность фаз результирующей волны и света от щели, расположенной на краю решётки.

(iii) Изобразите схематически на одном графике $\sin N\beta$ и $(1/\sin \beta)$ как функции β . На отдельном графике покажите, как интенсивность результирующей волны зависит от β .

(iv) Определите интенсивности главных максимумов.

(v) Покажите, что число главных максимумов не может превышать

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1 \right)$$

(vi) Покажите, что для двух длин волн λ и $\lambda + \delta\lambda$, где $\delta\lambda \ll \lambda$, угловое расстояние между главными максимумами определяется выражением

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad \text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ и т. д.}$$

Вычислите это угловое расстояние для D-линий натрия, для которых

$$\lambda = 589.0 \text{ nm}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 589.6 \text{ nm}, \quad n = 2, \quad \text{и } d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

$$\left[\text{напоминание: } \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть I_1 — интенсивность света от одной щели, и пусть

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

Амплитудный коэффициент с учётом знака обозначается через A_s ; его модуль является физической амплитудой.

- (i) Разность фаз равна 2β , откуда

$$A_s = 2a \cos \beta, \quad A = 2a |\cos \beta|.$$

Вместо напечатанного $\cos \theta$ должно быть $\cos \beta$.

- (ii)

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (0 < \beta < \pi), \quad A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

В общем случае $R = a/(2|\sin \beta|)$. Если фазы волн от последовательных щелей возрастают на 2β , фаза результирующей волны относительно первой крайней щели равна $(N - 1)\beta$ при использовании указанного выше коэффициента с учётом знака. При использовании положительной амплитуды к фазе добавляется π везде, где этот коэффициент отрицателен. При $\beta = m\pi$ физическая амплитуда равна Na .

- (iii) Функция $\sin N\beta$ имеет амплитуду 1 и период $2\pi/N$; функция $1/\sin \beta$ имеет вертикальные асимптоты при $\beta = m\pi$. Интенсивность равна

$$I(\beta) = I_1 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Это чётная функция с периодом π и главными максимумами при $m\pi$. Между последовательными главными максимумами находятся $N - 1$ нулей и $N - 2$ побочных максимумов.

- (iv)

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1, \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

- (v) Если учитывать скольльзящие порядки как предельные направления,

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

- (vi) В первом приближении

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

Угловое расстояние равно модулю этого смещения с учётом знака. Для указанных линий натрия во втором порядке

$$\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ.$$

Решение

- (i)

При нормальном падении фаза падающей волны одинакова у обеих щелей. Выходящие волны когерентны, поэтому их мгновенные смещения складываются.

В дальней зоне лучи, приходящие в точку наблюдения, можно считать параллельными. Поэтому разность длин двух путей равна

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

Следовательно, величина разности фаз составляет

$$\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\beta.$$

Выберем щель, от которой отсчитывается фаза, так, чтобы другая волна опережала её по фазе на 2β . Обозначив опорную фазу через ψ , запишем обе волны в виде

$$y_0 = a \cos \psi, \quad y_1 = a \cos(\psi + 2\beta).$$

Приведённое в условии тождество даёт

$$y_0 + y_1 = 2a \cos \beta \cos(\psi + \beta).$$

Для геометрической интерпретации представим каждую волну вектором длины a , угол направления которого равен её фазе. Его проекция на неподвижную ось равна мгновенному смещению волны. Оба вектора вращаются с угловой скоростью $2\pi f$, сохраняя угол 2β между собой. Поскольку проекции складываются, векторная сумма представляет результирующую волну.

На векторной диаграмме проведём два вектора из общего начала под углами $-\beta$ и $+\beta$ к биссектрисе угла между ними. Их составляющие, перпендикулярные этой биссектрисе, взаимно компенсируются, а составляющие вдоль неё складываются:

$$A_s = a \cos \beta + a \cos \beta = 2a \cos \beta.$$

Таким образом,

$$A = 2a |\cos \beta|.$$

Отрицательный знак амплитудного коэффициента означает лишь изменение направления результирующего вектора на противоположное, или дополнительный сдвиг фазы на π .

Следовательно, в напечатанной формуле амплитуды θ необходимо заменить на β .

(ii)

Применим то же приближение дальней зоны ко всей решётке, пренебрегая изменением амплитуды и кривизной волнового фронта в её пределах. Пронумеруем щели от одного края так, чтобы их фазы были равны

$$\psi, \psi + 2\beta, \dots, \psi + 2(N - 1)\beta.$$

Построим N векторов амплитуд, прикладывая начало каждого к концу предыдущего. Каждый вектор имеет длину a и повернут относительно предыдущего на один и тот же угол 2β . Поэтому их концы образуют вписанную в окружность ломаную с равными хордами.

На диаграмме обозначим последовательные концы векторов через $P_0, P_1, \dots, P_N$, а центр окружности — через O . Каждая сторона $P_j P_{j+1}$ имеет длину a и стягивает ориентированный центральный угол 2β . Разделив соответствующий равнобедренный треугольник пополам, при $0 < \beta < \pi$ получаем

$$\frac{a}{2} = R \sin \beta.$$

Отсюда

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

При произвольном β положительный радиус равен $a/(2|\sin \beta|)$. Ломаная не обязательно замыкается после N векторов.

Результирующий вектор направлен непосредственно из P_0 в P_N . Эти концы разделены суммарным ориентированным центральным углом $2N\beta$, поэтому его длина равна

$$A_N = 2R|\sin N\beta| = a \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right|.$$

Таким образом, искомый коэффициент с учётом знака равен

$$A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

Фаза определяется направлениями хорд. Радиус, проходящий через середину первой малой хорды, имеет угловое положение β , а радиус, проходящий через середину результирующей хорды, — $N\beta$. Каждая хорда перпендикулярна радиусу, проходящему через её середину, поэтому угол между ними равен

$$N\beta - \beta = (N - 1)\beta,$$

с точностью до изменения направления результирующего вектора на противоположное.

Эквивалентно, полное выражение для результирующей волны имеет вид

$$y_{\text{tot}} = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cos[\psi + (N - 1)\beta].$$

Следовательно, при выбранном порядке отсчёта от края фаза относительно этой крайней щели равна $(N - 1)\beta$, если сохраняется коэффициент с учётом знака. При неотрицательной амплитуде она равна

$$\phi = \begin{cases} (N - 1)\beta, & \sin N\beta / \sin \beta > 0, \\ (N - 1)\beta + \pi, & \sin N\beta / \sin \beta < 0, \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

При отсчёте от противоположного края относительная фаза меняет знак по модулю 2π . При нулевой результирующей амплитуде фаза не определена.

Когда $\beta = m\pi$, фазы соседних волн различаются на $2m\pi$. Все векторы направлены одинаково, что даёт $A_N = Na$ и нулевую относительную фазу по модулю 2π . Радиус окружности в таком построении в пределе становится бесконечным.

(iii)

Усреднённая по времени интенсивность пропорциональна квадрату физической амплитуды. Поскольку амплитуда волны от одной щели равна a ,

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A_N^2}{a^2},$$

и, следовательно,

$$\frac{I(\beta)}{I_1} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Для первого графика используем общие оси: горизонтальную ось β и вертикальную ось значений функций:

- $\sin N\beta$ колеблется между -1 и $+1$ с периодом $2\pi/N$. Её нули находятся при $\beta = k\pi/N$, а экстремумы — при $\beta = (2k+1)\pi/(2N)$ и имеют значения $(-1)^k$.
- $1/\sin \beta$ имеет период 2π , не имеет нулей и имеет вертикальные асимптоты при $\beta = m\pi$. Между 0 и π она убывает от $+\infty$ до своего минимума 1 при $\pi/2$, затем возрастает до $+\infty$. Следующая ветвь, между π и 2π , отрицательна, достигает -1 при $3\pi/2$ и стремится к $-\infty$ на обоих концах. Эти ветви повторяются.

Хотя обратная величина синуса расходится при $m\pi$, модуль её произведения на $\sin N\beta$ имеет конечный предел N .

Для графика интенсивности построим I/I_1 . Его основные особенности:

Положение	I/I_1
$\beta = m\pi$	N^2
$\beta = m\pi + r\pi/N, \quad r = 1, \dots, N-1$	0
$\beta = m\pi + \pi/2, N$ чётное	0
$\beta = m\pi + \pi/2, N$ нечётное	1

Функция неотрицательна, чётна и периодична с периодом π . Каждый главный максимум симметричен относительно $\beta = m\pi$. Ближайшие к нему нули находятся при

$$\beta = m\pi \pm \frac{\pi}{N},$$

поэтому его ширина между этими нулями равна $2\pi/N$.

Между соседними главными максимумами находятся $N-1$ нулей, а между последовательными нулями — $N-2$ меньших побочных максимумов. Их точные положения удовлетворяют уравнению

$$N \cot(N\beta) = \cot \beta,$$

полученному дифференцированием интенсивности вне её нулей. Вне асимптот кривая лежит ниже огибающей

$$I = \frac{I_1}{\sin^2 \beta}.$$

(iv)

Наибольшая возможная длина суммы N векторов длины a равна Na . Она достигается, когда все векторы направлены одинаково:

$$2\beta = 2n\pi.$$

Таким образом, главные максимумы удовлетворяют условию

$$\beta = n\pi \iff \boxed{d \sin \theta = n\lambda}.$$

В этих направлениях

$$A_N = Na,$$

поэтому

$$\boxed{I_{\text{principal}} = N^2 I_1}.$$

В рамках заданной модели с одинаковыми амплитудами все главные максимумы имеют эту интенсивность.

Тот же результат получается при переходе к пределу:

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N(-1)^{n(N-1)},$$

квадрат которого равен N^2 .

(v)

Для главного максимума порядка n необходимо, чтобы

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

Поскольку $|\sin \theta| \leq 1$,

$$|n| \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Поэтому допустимые целые порядки лежат в диапазоне от

$$-\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor \quad \text{до} \quad +\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

С учётом нулевого порядка получаем

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1.$$

Поскольку $\lfloor u \rfloor \leq u$,

$$\boxed{M \leq \frac{2d}{\lambda} + 1}.$$

Этот подсчёт включает все порядки, соответствующие точно скользящим направлениям, $\theta = \pm 90^\circ$, как предельные направления. Исключение таких направлений может лишь уменьшить их число.

(vi)

Рассмотрим главные максимумы одного и того же порядка n для двух длин волн. Обозначив $\Delta\lambda = \delta\lambda$, запишем для них уравнения дифракционной решётки:

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= n\lambda, \\ d \sin(\theta + \Delta\theta) &= n(\lambda + \Delta\lambda). \end{aligned}$$

При малом угловом смещении, измеряемом в радианах,

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \simeq \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta.$$

Вычитая первое уравнение решётки из второго, получаем

$$d \cos \theta \Delta\theta \simeq n\Delta\lambda,$$

откуда

$$\boxed{\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}}.$$

Это результат первого порядка для существующих максимумов, не соответствующих скользким направлениям. При отрицательном n смещение с учётом знака отрицательно; угловое расстояние равно его модулю. Максимумы нулевого порядка совпадают.

Для линий натрия

$$\Delta\lambda = (589.6 - 589.0) \text{ nm} = 0.6 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

При $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ во втором порядке

$$\sin \theta = \frac{2(589.0 \times 10^{-9})}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.9816667,$$

поэтому

$$\theta \simeq 79.01^\circ, \quad \cos \theta \simeq 0.19061.$$

Следовательно,

$$\Delta\theta \simeq \frac{2(0.6 \times 10^{-9})}{(1.2 \times 10^{-6})(0.19061)} = 5.246 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

С разумной точностью

$$\boxed{\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ}.$$

Для численной проверки: разность двух углов, найденных из уравнения решётки без разложения, равна $5.32 \times 10^{-3} \text{ rad}$, что примерно на 1.4% больше оценки первого порядка.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Сейсмические волны и жидкое ядро Земли

2. В начале этого столетия была предложена модель Земли, в которой она считалась шаром радиуса R , состоящим из однородной изотропной твёрдой мантии, простирающейся вглубь до радиуса R_c . Область ядра внутри радиуса R_c была заполнена жидкостью.

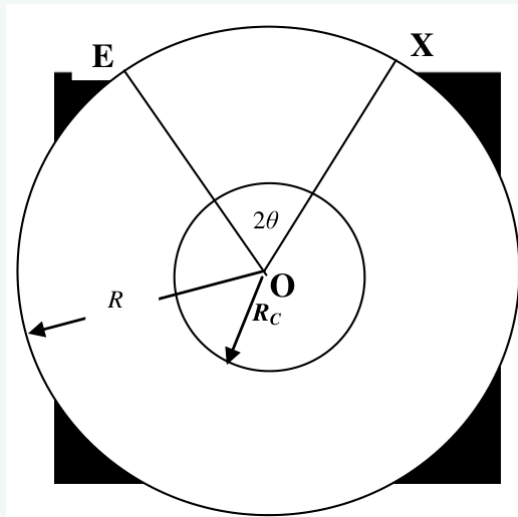


Рисунок 2.1

Скорости продольных и поперечных сейсмических волн, соответственно P- и S-волн, постоянны в мантии и равны V_P и V_S . В ядре продольные волны имеют постоянную скорость V_{CP} , $< V_P$, а поперечные волны не распространяются.

Землетрясение в точке E на поверхности Земли порождает сейсмические волны, которые проходят через Землю и регистрируются наблюдателем на поверхности, способным установить свой сейсмометр в любой точке X земной поверхности. Угловое расстояние между E и X, 2θ , задаётся выражением

$$2\theta = \text{Угол } EOX$$

где O — центр Земли.

(i) Покажите, что сейсмические волны, распространяющиеся через мантию по прямой, достигают X за время t (время распространения после землетрясения), которое определяется выражением

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \text{при } \theta > \arccos \left[\frac{R_c}{R} \right],$$

где $v = v_P$ для P-волн и $v = v_S$ для S-волн.

(ii) При некоторых положениях X сейсмические P-волны достигают наблюдателя после двух преломлений на границе мантии и ядра. Изобразите путь такой сейсмической P-волны. Получите соотношение между θ и i , углом падения сейсмической P-волны на границу мантии и ядра, для P-волн.

(iii) Используя данные

R	=	6370 km
R_c	=	3470 km
v_{CP}	=	10.85 km s^{-1}
v_S	=	6.31 km s^{-1}
v_{CP}	=	9.02 km s^{-1}

и результат, полученный в (ii), постройте график зависимости θ от i . Обсудите физические следствия формы этого графика для наблюдателей, находящихся в разных точках земной поверхности. Схематически изобразите зависимость времени распространения P- и S-волн от θ при $0 \leq \theta \leq 90$ градусов.

(iv) После землетрясения наблюдатель измерил задержку прихода S-волны относительно P-волны, составившую 2 минуты 11 секунд. Определите угловое расстояние от места землетрясения до наблюдателя, используя данные из пункта (iii).

(v) Наблюдатель, выполнивший предыдущее измерение, замечает, что спустя некоторое время после прихода P- и S-волн сейсмометр регистрирует ещё два сигнала, разделённых интервалом времени 6 минут 37 секунд. Объясните этот результат и проверьте, что он действительно соответствует угловому расстоянию, определённому в предыдущем пункте.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (i) Время распространения прямой волны равно

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos(R_c/R).$$

Равенство описывает предельный касательный луч. Знак неравенства в условии обращён.

- (ii) Положим $a = R_c/R$, $b = v_{CP}/v_P$. Луч состоит из трёх прямолинейных отрезков, преломляясь к нормали при входе в ядро и от нормали при выходе из него. Половина угла, охватываемого его траекторией относительно центра Земли, равна

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Обычно $\theta = \Phi$; с учётом лучей, выходящих за антиподом, меньшее угловое расстояние определяется выражением

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

- (iii) Прямые P- и S-лучи существуют вплоть до $\theta = 56.99^\circ$. P-лучи, прошедшие через ядро, впервые появляются при

$$\theta_{\min} = 75.58^\circ, \quad i_{\min} = 55.02^\circ.$$

Таким образом, зона тени P-волн приблизительно соответствует интервалу

$$113.99^\circ < 2\theta < 151.15^\circ,$$

а при $2\theta > 113.99^\circ$ не наблюдается прихода ни прямых S-волн, ни S-волн, прошедших через ядро. Ветви зависимости времени распространения преломлённых P-волн сходятся при 20.789 min; времена их прихода в антипод составляют 21.733 и 23.397 min. Полные описания графиков приведены ниже.

- (iv) Угловое расстояние между местом землетрясения и наблюдателем равно

$$2\theta \approx 17.8^\circ.$$

- (v) Более поздние сигналы — это P- и S-волны, отражённые от границы ядра. Расчётные времена их прихода составляют 551.3 s и 947.9 s после землетрясения, что даёт

$$\Delta t_{\text{ref}} = 396.65 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 37 \text{ s}.$$

Решение

Используем физически согласованное прочтение численных данных:

$$v_P = 10.85 \text{ km s}^{-1}, \quad v_S = 6.31 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km s}^{-1}.$$

В таблице данных пункта (iii) обозначение v_{CP} напечатано дважды; первое из этих значений, 10.85 km s^{-1} , — это v_P . Знак неравенства, напечатанный в пункте (i), также обращён; см. пункт (i).

Используем геометрическую лучевую теорию: в каждой однородной области лучи прямолинейны, преломление подчиняется закону Снеллиуса, а при отражении угол падения равен углу отражения. Дифракцией, преобразованием типов волн и дополнительными отражениями от поверхности Земли пренебрегаем.

(i)

Пусть M — середина хорды EX . Треугольник OEM прямоугольный, причём $\angle EOM = \theta$. Следовательно,

$$EM = R \sin \theta, \quad OM = R \cos \theta.$$

Поэтому длина прямого пути и время распространения равны

$$EX = 2R \sin \theta, \quad t = \frac{2R \sin \theta}{v}.$$

Ближайшая к центру точка хорды — M . Таким образом, луч не пересекает ядро только при условии

$$R \cos \theta \geq R_c,$$

или

$$\theta \leq \arccos(R_c/R).$$

Строгое неравенство соответствует пути, целиком лежащему в мантии; равенство — предельному случаю касания. При больших θ хорда пересекает ядро, поэтому формула для распространения только в мантии уже не описывает действительный луч.

(ii)

Обозначим точки входа в ядро и выхода из него через A и B . Изобразим путь

$$E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X,$$

где EA и BX лежат в мантии, а AB является хордой ядра. Проведём радиальные нормали OA и OB .

Пусть r — угол преломления внутри ядра, отсчитываемый от нормали. Закон Снеллиуса даёт

$$\frac{\sin i}{v_P} = \frac{\sin r}{v_{CP}},$$

откуда

$$r = \arcsin \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right).$$

Поскольку $v_{CP} < v_P$, имеем $r < i$: при входе в ядро луч отклоняется к нормали. В силу симметрии угол его падения при выходе равен r , а в мантию он выходит под углом i .

Пусть $\alpha = \angle OEA$. В треугольнике EOA угол при вершине A равен $\pi - i$. По теореме синусов

$$\frac{\sin \alpha}{R_c} = \frac{\sin i}{R},$$

следовательно,

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{R_c}{R} \sin i \right), \quad \angle EOA = i - \alpha.$$

Из равнобедренного треугольника AOB получаем

$$\angle AOB = \pi - 2r.$$

Следовательно, полный угол, охватываемый траекторией луча относительно O , равен

$$2\Phi = 2(i - \alpha) + \pi - 2r.$$

Поэтому

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin\left(\frac{R_c}{R} \sin i\right) - \arcsin\left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i\right).$$

Если охватываемый угол не превышает π , то $\theta = \Phi$. Если луч выходит немного за антиподом, меньший угол между источником и наблюдателем равен $2\pi - 2\Phi$, что даёт

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

Таким образом, на требуемом рисунке следует изобразить симметричный ломаный луч с равными отрезками в мантии, прямолинейной хордой в ядре и углами i и $r < i$, отмеченными на границе входа.

(iii)

Безразмерные отношения равны

$$a = \frac{R_c}{R} = 0.544741, \quad b = \frac{v_{CP}}{v_P} = 0.831336.$$

Таким образом,

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Дифференцируя, причём углы выражены в радианах, получаем

$$\frac{d\Phi}{di} = 1 - \frac{a \cos i}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} - \frac{b \cos i}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

На концах интервала

$$\Phi'(0) = 1 - a - b = -0.376077, \quad \Phi'(\pi/2) = 1.$$

Каждое вычитаемое слагаемое убывает с ростом i , поэтому Φ' возрастает и имеет ровно один ноль. Численно получаем

$$i_{\min} = 55.017^\circ, \quad \Phi_{\min} = \theta_{\min} = 75.577^\circ.$$

Для построения соответствующего графика времени распространения найдём длину каждого из двух отрезков в мантии:

$$\ell_m = \sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i.$$

Это выражение получается при проецировании внешнего и внутреннего радиусов на луч в мантии, перпендикулярное расстояние от которого до O равно $R_c \sin i$.

Длина хорды ядра равна

$$\ell_c = 2R_c \cos r = 2R_c \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Следовательно, время распространения Р-волны, прошедшей через ядро, равно

$$T(i) = \frac{2}{v_P} \left(\sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i \right) + \frac{2R_c}{v_{CP}} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Следующие точки задают оба требуемых графика:

i (градусы)	Половина охватываемого угла Φ (градусы)	Физический угол θ (градусы)	Время распространения Р- волны через ядро (мин)
0	90.00	90.00	21.733
20	82.74	82.74	21.504
40	77.20	77.20	21.003
55.02	75.58	75.58	20.789
70	77.84	77.84	21.171
80	82.60	82.60	22.028
89.23	90.00	90.00	23.397
90	90.76	89.24	23.538

Кривая зависимости Φ от i начинается при 90° , плавно убывает до минимума, затем возрастает до 90.7568° . При построении графика физического меньшего угла θ отразите последнюю часть относительно уровня 90° : θ достигает 90° при $i = 89.2322^\circ$, затем немного уменьшается до 89.2432° при скользящем падении.

Предельный угол для прямой волны равен

$$\theta_d = \arccos(R_c/R) = 56.993^\circ.$$

Отсюда следуют физические выводы:

- При $0 \leq \theta < 56.993^\circ$ прямые Р- и S-волны достигают наблюдателя.
- При $56.993^\circ < \theta < 75.577^\circ$ наблюдателя не достигают ни прямые Р-лучи, ни Р-лучи, прошедшие через ядро. Это зона тени Р-волн.
- При $\theta > 56.993^\circ$ прямого S-луча нет, а через жидкое ядро S-луч не проходит.
- При $\theta = 75.577^\circ$ два пути преломлённых Р-волн сливаются. Поскольку близкие падающие лучи выходят почти на одном и том же угловом расстоянии, энергия лучей концентрируется в этой области: это каустика.
- В большей части интервала $75.577^\circ < \theta < 90^\circ$ два пути преломлённых Р-волн дают два отдельных прихода.

При использовании приведённых чисел без изменений вблизи антипода возникает небольшая дополнительная особенность. При

$$89.2432^\circ < \theta < 90^\circ,$$

наблюдателя достигает третий преломлённый луч, проходящий за направлением на антипод. В антипode времена распространения по двум наклонным ветвям равны.

На **схематическом графике времени распространения** изобразите прямые ветви

$$t_{P,\text{dir}} = 1174.19 \sin \theta \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 2019.02 \sin \theta \text{ s},$$

только на интервале $0 \leq \theta \leq 56.993^\circ$. Обе начинаются в начале координат и возрастают с отрицательной второй производной; кривая S лежит выше кривой Р. Их конечные точки:

$$t_{P,\text{dir}}(\theta_d) = 984.68 \text{ s} = 16.411 \text{ min},$$

$$t_{S,\text{dir}}(\theta_d) = 1693.16 \text{ s} = 28.219 \text{ min}.$$

Основные ветви Р-волн, прошедших через ядро, начинаются вместе в точке

$$(\theta, T) = (75.577^\circ, 20.789 \text{ min})$$

и возрастают по направлению к 90° . В точке соединения у них общая касательная, поскольку дифференцирование даёт

$$\frac{dT}{di} = \frac{2R_c \sin i}{v_P} \frac{d\Phi}{di}, \quad \frac{dT}{d\Phi} = \frac{2R_c \sin i}{v_P}.$$

Ветвь с меньшим i соответствует более раннему приходу и имеет горизонтальную касательную в антиподе, где луч проходит по диаметру:

$$T(0) = \frac{2(R - R_c)}{v_P} + \frac{2R_c}{v_{CP}} = 21.733 \text{ min}.$$

Другая основная ветвь достигает там 23.397 min. Небольшая третья ветвь убывает от 23.538 min при $\theta = 89.243^\circ$ до 23.397 min при 90° .

Если на схематическом графике нужно также показать более поздние приходы отражённых волн, обсуждаемые в пункте (v), изобразите дополнительно

$$t_{v,\text{ref}}(\theta) = \frac{2}{v} \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_d.$$

Эти кривые возрастают от 8.909 min для Р и 15.320 min для S при $\theta = 0$ и касаются соответствующих прямых ветвей при θ_d .

(iv)

Для прямых Р- и S-волн длина пути одинакова, поэтому разность времён их прихода равна

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right).$$

Здесь

$$\Delta t = 2(60) + 11 = 131 \text{ s}.$$

Поэтому

$$\sin \theta = \frac{131}{2(6370) \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right)} = \frac{131}{844.8239} = 0.1551.$$

Таким образом,

$$\theta = 8.9204^\circ, \quad \boxed{2\theta = 17.8408^\circ \approx 17.8^\circ}.$$

Поскольку $\theta < \theta_d$, предположение о пути, проходящем только через мантию, согласуется с результатом.

Времена прихода каждой из волн равны

$$t_{P,\text{dir}} = 182.07 \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 313.07 \text{ s}.$$

(v)

Граница ядра может отражать энергию как Р-, так и S-волн. Эти отражённые волны проходят более длинные пути через мантию и поэтому приходят позже.

Пусть C — точка отражения на границе ядра, лежащая на ближайшем радиусе, делящем $\angle EOX$ пополам. Путь имеет вид

$$E \longrightarrow C \longrightarrow X.$$

Зеркальная симметрия относительно OC обеспечивает равенство углов падения и отражения, причём $EC = CX$. Поскольку $\angle EOC = \theta$, по теореме косинусов

$$EC^2 = R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta.$$

Таким образом, длина пути отражённой волны равна

$$L_{\text{ref}} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}.$$

При $\theta = 8.9204^\circ$

$$L_{\text{ref}} = 5981.54 \text{ km}.$$

Следовательно, времена прихода отражённых волн равны

$$t_{P,\text{ref}} = \frac{5981.54}{10.85} = 551.29 \text{ s},$$

$$t_{S,\text{ref}} = \frac{5981.54}{6.31} = 947.95 \text{ s}.$$

Обе волны приходят после прямой S-волны в момент 313.07 s, как и требуется.

Интервал между ними равен

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{ref}} &= L_{\text{ref}} \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right) \\ &= 396.65 \text{ s} \\ &= 6 \text{ min } 36.65 \text{ s}. \end{aligned}$$

Округляя до ближайшей секунды, получаем

$$\boxed{\Delta t_{\text{ref}} = 6 \text{ min } 37 \text{ s}},$$

что подтверждает данную интерпретацию и угловое расстояние, найденное в пункте (iv).

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 3: Нормальные моды системы грузов, соединённых пружинами (кольцо и цепочка)

Три частицы, каждая массой m , находятся в равновесии и соединены нерастяннутыми невесомыми пружинами, каждая из которых имеет жёсткость k и подчиняется закону Гука. Частицы могут двигаться только по окружности, как показано на рисунке 3.1.

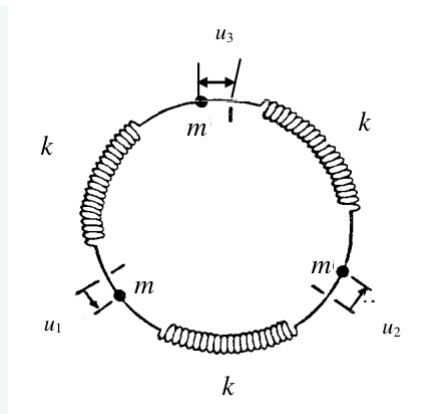


Рисунок 3.1

(i) Если каждый груз сместить из положения равновесия на малые величины u_1 , u_2 и u_3 соответственно, запишите уравнение движения для каждого груза.

(ii) Убедитесь, что система имеет решения, описывающие простые гармонические колебания вида

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

с ускорениями $(-\omega^2 u_n)$, где a_n ($n = 1, 2, 3$) — постоянные амплитуды, а ω — угловая частота, которая может принимать 3 возможных значения:

$$\omega_o \sqrt{3}, \omega_o \sqrt{3} \text{ и } 0. \quad \text{где } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

(iii) Система чередующихся пружин и грузов расширена до N частиц; каждый груз массой m соединён пружинами с соседними грузами. Вначале пружины не растянуты и система находится в равновесии. Запишите уравнение движения n -го груза ($n = 1, 2, \dots, N$) через его смещение и смещения соседних грузов при отклонении частиц от положения равновесия.

$$u_n(t) = a_s \sin \left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi \right) \cos \omega_s t,$$

являются колебательными решениями, где $s = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N$, а ϕ — произвольная фаза, при условии, что угловые частоты задаются выражением

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{s\pi}{N} \right),$$

где a_s ($s = 1, \dots, N$) — постоянные амплитуды, не зависящие от n .

Укажите диапазон возможных частот для цепочки, содержащей бесконечное число грузов.

(iv) Определите отношение

$$u_n / u_{n+1}$$

при больших N в двух случаях:

(a) решения с низкой частотой

(b) $\omega = \omega_{\max}$, где $\omega_{\max}$ — максимальная частота решения.

Схематически изобразите характерные графики зависимости смещений частиц от номера частицы вдоль цепочки в момент времени t для случаев (a) и (b).

(v) Если один из грузов заменить грузом массой $m' \ll m$, оцените, какое существенное изменение следует ожидать в распределении угловых частот.

На основании предыдущего результата качественно опишите вид частотного спектра, который следует ожидать для двухатомной цепочки с чередующимися массами m и m' .

Напоминание

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right) \\ 2 \sin^2 A &= 1 - \cos 2A\end{aligned}$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

• (i)

$$\begin{aligned}m\ddot{u}_1 &= k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 &= k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 &= k(u_1 + u_2 - 2u_3).\end{aligned}$$

• (ii)

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad 0.$$

Ненулевой частоте соответствуют две независимые моды, удовлетворяющие условию $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Для нулевой моды $a_1 = a_2 = a_3$.

• (iii)

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad u_{n+N} = u_n,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right).$$

Для бесконечной цепочки

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Для обычной частоты $0 \leq f \leq \sqrt{k/m}/\pi$.

• (iv)

(a) $u_n/u_{n+1} \simeq +1$ вдали от узлов смещения. График представляет собой медленно меняющуюся синусоиду, значения которой берутся в положениях частиц.

(b) $u_n/u_{n+1} = -1$ на верхней границе полосы частот. Смещения чередуются между равными по модулю положительными и отрицательными значениями. Это точно выполняется для чётного N ; в кольце с нечётным числом частиц такое поведение локально достигается в пределе больших N .

- (v) Один лёгкий груз создаёт одну высокочастотную моду, сосредоточенную на этом грузе:

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}} \gg 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Цепочка с чередующимися массами имеет акустическую и оптическую полосы частот, разделённые запрещённой зоной. При $m' < m$ их точные предельные диапазоны имеют вид

$$\begin{array}{l} \text{Акустическая: } 0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ \text{Оптическая: } \sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}. \end{array}$$

Решение

(i)

Будем измерять все смещения как длины дуг в одном и том же направлении обхода кольца. В приближении малых смещений удлинение пружины равно разности смещений её концов. Поэтому закон Гука даёт тангенциальную возвращающую силу, пропорциональную этой разности. Сила реакции связи не имеет тангенциальной составляющей.

На частицу 1 две пружины действуют с силами $k(u_2 - u_1)$ и $k(u_3 - u_1)$. По второму закону Ньютона

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1).$$

Применяя те же рассуждения к частицам 2 и 3, получаем

$$\begin{array}{l} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{array}$$

(ii)

Подставим $u_n = a_n \cos \omega t$, так что $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$. Введём обозначения

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \quad S = a_1 + a_2 + a_3.$$

Каждое уравнение принимает вид

$$\lambda a_n = 3a_n - S.$$

Складывая три уравнения, получаем

$$\lambda S = 0.$$

Возможны два случая.

Если $\lambda = 0$, то из отдельных уравнений следует

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Все грузы перемещаются на одинаковую длину дуги, поэтому ни одна пружина не меняет своей длины. Следовательно,

$$\omega = 0.$$

Это мода вращения системы как жёсткого целого. Строго говоря, она не является колебанием: соответствующее общее движение имеет вид $u_1 = u_2 = u_3 = A + Bt$. Заданный вид решения с косинусом описывает случай статического смещения.

Если $\lambda \neq 0$, то $S = 0$, и для ненулевой амплитуды необходимо

$$\lambda = 3.$$

Поэтому

$$\omega = \sqrt{3}\omega_o = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Условие $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ оставляет две независимые амплитуды. Например, две независимые формы мод задаются соотношениями

$$(a_1, a_2, a_3) \propto (1, -1, 0), \quad (a_1, a_2, a_3) \propto (1, 1, -2).$$

Таким образом, три нормальные моды имеют частоты

$$\sqrt{3}\omega_o, \quad \sqrt{3}\omega_o, \quad 0,$$

причём ненулевая частота встречается дважды.

(iii)

На частицу n действуют силы

$$k(u_{n+1} - u_n) \quad \text{и} \quad -k(u_n - u_{n-1}).$$

Следовательно,

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

Замкнутость кольца задаёт периодические граничные условия:

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1.$$

Запишем

$$q = \frac{2\pi s}{N}, \quad u_n = a_s \sin(nq + \phi) \cos \omega_s t.$$

Это выражение периодически, поскольку $Nq = 2\pi s$. Используя приведённую формулу сложения, получаем

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= a_s [\sin(nq + \phi + q) + \sin(nq + \phi - q)] \cos \omega_s t \\ &= 2 \cos q u_n. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение движения принимает вид

$$-m\omega_s^2 u_n = 2k(\cos q - 1)u_n = -4k \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)u_n.$$

Для нетривиальной моды

$$\omega_s^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right).$$

Поскольку $\sin(\pi s/N) \geq 0$ в указанном диапазоне $s = 1, \dots, N$,

$$\omega_s = 2\omega_o \sin\left(\frac{\pi s}{N}\right).$$

При переходе к бесконечной цепочке допустимые волновые числа образуют непрерывный набор. Синус принимает все значения от нуля до единицы, что даёт

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_o = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Нулевая граничная частота соответствует смещению системы как жёсткого целого; собственно колебания имеют $\omega > 0$. Поскольку $f = \omega/(2\pi)$,

$$0 \leq f \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Если значения k и m выражены в единицах СИ, угловые частоты выражаются в rad s^{-1} , а обычные частоты — в Hz .

(iv)

В те моменты времени и в тех положениях, где знаменатель отличен от нуля, общий временной множитель сокращается:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin(nq + \phi)}{\sin(nq + \phi + q)}.$$

Это же выражение непосредственно применимо к отношению амплитуд моды.

(a) Низкая частота

Выберем эквивалентное значение q , близкое к нулю. Тогда

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin \frac{q}{2} \right| \simeq \omega_o |q|,$$

так что низкая частота означает $|q| \ll 1$. Обозначив $\theta = nq + \phi$, получаем

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{\cos q + \cot \theta \sin q} \simeq 1 - q \cot \theta.$$

Таким образом, вдали от узлов

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq +1.$$

Соседние грузы имеют почти одинаковые смещения и движутся приблизительно в фазе. Вблизи узла сами смещения малы, поэтому их отношение не обязательно близко к единице.

Чтобы построить требуемый эскиз, изобразите синусоиду с длиной волны $L \gg 1$, измеренной в расстояниях между частицами, и отметьте её значения при целочисленных номерах частиц. Характерный профиль имеет вид

$$u_n = C(t) \sin\left(\frac{2\pi(n - n_0)}{L}\right).$$

Его основные значения:

$n - n_0$	0	$L/4$	$L/2$	$3L/4$	L
$u_n/C(t)$	0	+1	0	-1	0

Между соседними узлами находится много частиц, и ординаты соседних точек обычно очень близки.

(b) Максимальная частота

На верхней границе полосы частот $q = \pi$, откуда

$$\omega_{\max} = 2\omega_o.$$

Смещение имеет вид

$$u_n = a_s \sin(n\pi + \phi) \cos \omega_{\max} t = (-1)^n a_s \sin \phi \cos \omega_{\max} t.$$

Следовательно,

$$u_{n+1} = -u_n, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1.$$

В каждой паре соседние частицы движутся в противоположных направлениях с одинаковыми амплитудами.

Эскиз состоит из чередующихся точек на уровнях $+C(t)$ и $-C(t)$:

$n - n_0$	0	1	2	3	4
$u_n/C(t)$	+1	-1	+1	-1	+1

Пространственный период равен двум расстояниям между частицами. Если для наглядности соединить соседние точки, получится зигзаг.

Такая картина точно согласуется с кольцом, содержащим чётное число частиц. При нечётном конечном N наибольшее допустимое волновое число равно $\pi \pm \pi/N$, и

$$\omega_{\max} = 2\omega_o \cos \left(\frac{\pi}{2N} \right).$$

Соответствующие смещения чередуются по знаку и имеют медленно меняющуюся огибающую. При больших N отношение смещений соседних частиц приблизительно равно -1 вдали от узлов огибающей.

(v)

Сначала заменим только один груз грузом массой $m' \ll m$. Быстрые колебания этого лёгкого груза вызывают сравнительно малое движение его тяжёлых соседей. В главном приближении будем считать этих соседей неподвижными.

Смещение лёгкого груза на x создаёт со стороны каждой пружины возвращающую силу $-kx$. Поэтому

$$m'\ddot{x} \simeq -2kx,$$

откуда

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

По отношению к исходной верхней границе полосы частот

$$\frac{\omega_{\text{defect}}}{2\omega_o} \simeq \sqrt{\frac{m}{2m'}} \gg 1.$$

Приближение самосогласованно. Для соседнего тяжёлого груза с амплитудой u_1 основной баланс сил при высокой частоте имеет вид

$$-m\omega_{\text{defect}}^2 u_1 \simeq kx,$$

так что

$$\frac{u_1}{x} \simeq -\frac{m'}{2m}.$$

Его движение мало и противоположно движению лёгкого груза. На большем удалении движение ещё слабее: высокочастотная мода локализована вблизи дефекта.

Таким образом, одна мода оказывается далеко выше исходной полосы частот. Остальные частоты изменяются, но остаются порядка $\sqrt{k/m}$; в бесконечной цепочке полоса частот протяжённых мод остаётся $0 \leq \omega \leq 2\omega_o$. Сохраняется и мода смещения системы как жёсткого целого с нулевой частотой.

В цепочке с чередующимися массами повторяющиеся лёгкие грузы создают целую высокочастотную полосу. Спектр разделяется на:

- **Акустическую полосу**, содержащую низкочастотные коллективные движения. При больших длинах волн соседние тяжёлые и лёгкие грузы движутся приблизительно вместе.
- **Оптическую полосу**, в которой лёгкие грузы быстро колеблются, а движение тяжёлых грузов значительно слабее. При больших длинах волн грузы двух типов движутся в противоположных направлениях.

Границы полос можно вывести непосредственно. Пусть x_j — смещение тяжёлого груза j , а y_j — смещение лёгкого груза между x_j и x_{j+1} . Тогда

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= k(y_{j-1} + y_j - 2x_j), \\ m'\ddot{y}_j &= k(x_j + x_{j+1} - 2y_j). \end{aligned}$$

Для моды с изменением фазы на Q при переходе на одну ячейку из двух частиц используем

$$\begin{aligned} x_j &= X \cos(jQ + \phi) \cos \omega t, \\ y_j &= Y \cos\left((j + \frac{1}{2})Q + \phi\right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Уравнения для амплитуд имеют вид

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)X &= 2k \cos(Q/2)Y, \\ (2k - m'\omega^2)Y &= 2k \cos(Q/2)X. \end{aligned}$$

Для существования ненулевого решения необходимо

$$(2k - m\omega^2)(2k - m'\omega^2) = 4k^2 \cos^2(Q/2),$$

или

$$mm'\omega^4 - 2k(m + m')\omega^2 + 4k^2 \sin^2(Q/2) = 0.$$

Два корня этого уравнения:

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)^2 - \frac{4}{mm'} \sin^2(Q/2)}.$$

При увеличении $|Q|$ от 0 до π меньший корень возрастает, а больший убывает. Поэтому при $m' < m$ их диапазоны имеют вид

$$0 \leq \omega_- \leq \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

и

$$\sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega_+ \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}.$$

В запрещённой зоне мод нет:

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

При $m' \ll m$ оптическая полоса узка по сравнению с её высокой частотой, приблизительно равной $\sqrt{2k/m'}$, и далеко отстоит от акустической полосы. Конечная периодическая цепочка имеет дискретные частоты внутри этих полос; в пределе бесконечной цепочки они образуют непрерывный спектр.

Решение проверено по официальному решению.