

IPhO 1986

Problemas teóricos y soluciones · Londres (Harrow), Reino Unido · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1986/

Problema 1: Dos rendijas y una red de difracción: suma vectorial de amplitudes

Figure 1.1

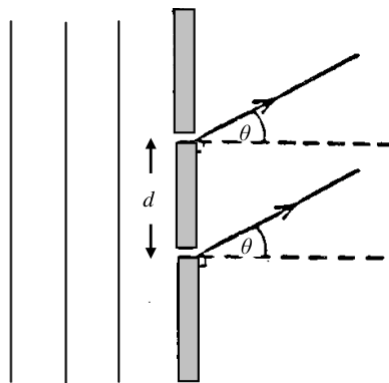


Figura 1.1

Una onda luminosa plana y monocromática, de longitud de onda λ y frecuencia f , incide normalmente sobre dos rendijas estrechas idénticas, separadas por una distancia d , como se indica en la Figura 1.1. La onda luminosa que emerge de cada rendija viene dada, a una distancia x en una dirección θ en el instante t , por

$$y = a \cos[2\pi(ft - x/\lambda)]$$

donde la amplitud a es la misma para ambas ondas. (Suponga que x es mucho mayor que d).

(i) Demuestre que las dos ondas observadas formando un ángulo θ con la normal a las rendijas tienen una amplitud resultante A que puede obtenerse sumando dos vectores, cada uno de módulo a y con una dirección asociada determinada por la fase de la onda luminosa.

Verifique geoméricamente, a partir del diagrama vectorial, que

$$A = 2a \cos \theta$$

donde

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(ii) Se sustituye la doble rendija por una red de difracción con N rendijas equiespaciadas, cuyas rendijas adyacentes están separadas por una distancia d . Utilice el método vectorial de suma de amplitudes para demostrar que los vectores de amplitud, cada uno de módulo a , forman parte de un polígono regular con vértices sobre una circunferencia de radio R dado por

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta},$$

Deduzca que la amplitud resultante es

$$\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

y obtenga la diferencia de fase de la onda resultante respecto a la de la luz procedente de la rendija situada en el borde de la red.

(iii) Represente esquemáticamente, en una misma gráfica, $\sin N\beta$ y $(1/\sin \beta)$ en función de β . En una gráfica aparte, muestre cómo varía la intensidad de la onda resultante en función de β .

(iv) Determine las intensidades de los máximos principales de intensidad.

(v) Demuestre que el número de máximos principales no puede superar

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1 \right)$$

(vi) Demuestre que dos longitudes de onda λ y $\lambda + \delta\lambda$, donde $\delta\lambda \ll \lambda$, producen máximos principales con una separación angular dada por

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad \text{donde } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{etc.}$$

Calcule esta separación angular para las líneas D del sodio, para las que

$$\lambda = 589.0 \text{ nm}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 589.6 \text{ nm}, \quad n = 2, \quad \text{y } d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

$$\left[\text{recordatorio: } \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea I_1 la intensidad debida a una sola rendija, y sea

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

El coeficiente de amplitud con signo se denota por A_s ; su valor absoluto es la amplitud física.

- (i) La diferencia de fase es 2β , lo que da

$$A_s = 2a \cos \beta, \quad A = 2a |\cos \beta|.$$

El $\cos \theta$ impreso debería ser $\cos \beta$.

- (ii)

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (0 < \beta < \pi), \quad A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

En general, $R = a/(2|\sin \beta|)$. Si las fases de las rendijas aumentan en 2β , la fase resultante respecto a la primera rendija del borde es $(N - 1)\beta$ con el coeficiente con signo anterior. Al utilizar una amplitud positiva, se añade π siempre que ese coeficiente sea negativo. En $\beta = m\pi$, la amplitud física es Na .

- (iii) $\sin N\beta$ tiene amplitud 1 y período $2\pi/N$; $1/\sin \beta$ tiene asíntotas verticales en $\beta = m\pi$. La intensidad es

$$I(\beta) = I_1 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Es una función par y tiene período π , con picos principales en $m\pi$. Entre dos picos principales consecutivos hay $N - 1$ ceros y $N - 2$ máximos secundarios.

- (iv)

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1, \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

- (v) Contando los órdenes rasantes como direcciones límite,

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

- (vi) A primer orden,

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

La separación angular es el valor absoluto de este desplazamiento con signo. Para las líneas de sodio especificadas en segundo orden,

$$\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ.$$

Solución

- (i)

La incidencia normal hace que la fase incidente sea la misma en ambas rendijas. Las ondas emergentes son coherentes, por lo que sus desplazamientos instantáneos se suman.

En el campo lejano, los rayos que alcanzan el punto de observación son prácticamente paralelos. Por tanto, la diferencia entre las dos longitudes de recorrido es

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

En consecuencia, la diferencia de fase tiene módulo

$$\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\beta.$$

Elijamos la rendija de referencia de modo que la otra onda esté adelantada en fase en 2β . Denotando la fase de referencia por ψ , las dos ondas son

$$y_0 = a \cos \psi, \quad y_1 = a \cos(\psi + 2\beta).$$

La identidad dada permite obtener

$$y_0 + y_1 = 2a \cos \beta \cos(\psi + \beta).$$

Para interpretar esto geoméricamente, representemos cada onda mediante un vector de longitud a , cuya dirección angular sea igual a su fase. Su proyección sobre un eje fijo es el desplazamiento instantáneo de la onda. Ambos vectores giran con velocidad angular $2\pi f$, manteniendo su separación angular 2β . Como las proyecciones se suman, su suma vectorial representa la onda resultante.

Para el diagrama vectorial, dibujemos las dos flechas desde un origen común, formando ángulos $-\beta$ y $+\beta$ con la bisectriz de sus fases. Sus componentes perpendiculares a esta bisectriz se anulan; sus componentes a lo largo de ella se suman:

$$A_s = a \cos \beta + a \cos \beta = 2a \cos \beta.$$

Por tanto,

$$\boxed{A = 2a |\cos \beta|}.$$

Un coeficiente con signo negativo representa simplemente una inversión del vector resultante, o una fase adicional de π .

Por tanto, la θ de la fórmula de amplitud impresa debe sustituirse por β .

(ii)

Apliquemos la misma aproximación de campo lejano a toda la red, despreciando la variación de amplitud y la curvatura del frente de onda a lo largo de ella. Numeremos las rendijas desde un borde de modo que sus fases sean

$$\psi, \psi + 2\beta, \dots, \psi + 2(N-1)\beta.$$

Dibujemos los N vectores de amplitud colocando el origen de cada uno en el extremo del anterior. Cada vector tiene longitud a , y cada uno gira el mismo ángulo 2β respecto a su predecesor. En consecuencia, sus extremos forman una cadena poligonal de cuerdas iguales sobre una circunferencia.

Para el diagrama, designemos los extremos sucesivos por $P_0, P_1, \dots, P_N$ y el centro de la circunferencia por O . Cada lado $P_j P_{j+1}$ tiene longitud a y subtiende un ángulo central orientado 2β . Al dividir por la mitad el triángulo isósceles correspondiente se obtiene, para $0 < \beta < \pi$,

$$\frac{a}{2} = R \sin \beta.$$

De ahí,

$$\boxed{R = \frac{a}{2 \sin \beta}}.$$

Para un β arbitrario, el radio positivo es $a/(2 |\sin \beta|)$. La cadena no tiene por qué cerrarse después de los N vectores.

El vector resultante va directamente de P_0 a P_N . Estos extremos están separados por un ángulo central orientado total $2N\beta$, por lo que su longitud es

$$A_N = 2R|\sin N\beta| = a \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right|.$$

Así, el coeficiente con signo solicitado es

$$A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

La fase se deduce de las direcciones de las cuerdas. El radio que pasa por el punto medio de la primera cuerda pequeña tiene posición angular β , mientras que el que pasa por el punto medio de la cuerda resultante tiene posición angular $N\beta$. Cada cuerda es perpendicular al radio que pasa por su punto medio, por lo que su diferencia angular es

$$N\beta - \beta = (N - 1)\beta,$$

salvo una posible inversión de la resultante.

De forma equivalente, la onda resultante completa es

$$y_{\text{tot}} = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cos[\psi + (N - 1)\beta].$$

Por tanto, con la convención de borde elegida, la fase respecto a esa rendija del borde es $(N - 1)\beta$ cuando se conserva el coeficiente con signo. Con una amplitud no negativa, es

$$\phi = \begin{cases} (N - 1)\beta, & \sin N\beta / \sin \beta > 0, \\ (N - 1)\beta + \pi, & \sin N\beta / \sin \beta < 0, \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Tomar como referencia el borde opuesto invierte la fase relativa módulo 2π . Cuando la resultante es nula, la fase no está definida.

Cuando $\beta = m\pi$, las fases adyacentes difieren en $2m\pi$. Todos los vectores apuntan en la misma dirección, dando $A_N = Na$ y una fase relativa nula módulo 2π . La construcción circular tiene entonces un radio límite infinito.

(iii)

La intensidad promediada en el tiempo es proporcional al cuadrado de la amplitud física. Como la amplitud de una sola rendija es a ,

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A_N^2}{a^2},$$

y, por tanto,

$$\frac{I(\beta)}{I_1} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Para la primera gráfica, utilicemos unos ejes comunes: β en el eje horizontal y el valor de la función en el vertical:

- $\sin N\beta$ oscila entre -1 y $+1$, con período $2\pi/N$. Sus ceros están en $\beta = k\pi/N$, y sus extremos se encuentran en $\beta = (2k + 1)\pi/(2N)$, con valores $(-1)^k$.
- $1/\sin \beta$ tiene período 2π , no tiene ceros y presenta asíntotas verticales en $\beta = m\pi$. Entre 0 y π , desciende desde $+\infty$ hasta su mínimo 1 en $\pi/2$, y después asciende hasta $+\infty$. La siguiente

rama, entre π y 2π , es negativa, alcanza -1 en $3\pi/2$ y tiende a $-\infty$ en ambos extremos. Estas ramas se repiten.

Aunque el inverso del seno diverge en $m\pi$, su producto por $\sin N\beta$ tiene un valor absoluto límite finito N .

Para la gráfica de intensidad, representemos I/I_1 . Sus características principales son:

Posición	I/I_1
$\beta = m\pi$	N^2
$\beta = m\pi + r\pi/N, \quad r = 1, \dots, N-1$	0
$\beta = m\pi + \pi/2, \quad N \text{ par}$	0
$\beta = m\pi + \pi/2, \quad N \text{ impar}$	1

La curva es no negativa, par y periódica con período π . Cada pico principal es simétrico respecto a $\beta = m\pi$. Sus ceros más próximos son

$$\beta = m\pi \pm \frac{\pi}{N},$$

por lo que su anchura entre estos ceros es $2\pi/N$.

Entre picos principales vecinos hay $N-1$ ceros, con $N-2$ picos secundarios más pequeños entre ceros sucesivos. Sus posiciones exactas satisfacen

$$N \cot(N\beta) = \cot \beta,$$

relación que se obtiene derivando la intensidad fuera de sus ceros. Lejos de las asíntotas, la curva queda por debajo de la envolvente

$$I = \frac{I_1}{\sin^2 \beta}.$$

(iv)

La mayor resultante posible de N vectores de longitud a tiene longitud Na . Esto ocurre cuando todos los vectores apuntan en la misma dirección:

$$2\beta = 2n\pi.$$

Así, los máximos principales satisfacen

$$\beta = n\pi \iff d \sin \theta = n\lambda.$$

En estas direcciones,

$$A_N = Na,$$

por lo que

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1.$$

En el modelo de amplitudes iguales indicado, todos los máximos principales tienen esta intensidad.

El mismo resultado se obtiene tomando el límite:

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N(-1)^{n(N-1)},$$

cuyo cuadrado es N^2 .

(v)

Un máximo principal de orden n requiere

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

Como $|\sin \theta| \leq 1$,

$$|n| \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Por tanto, los órdenes enteros permitidos van desde

$$-\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor \text{ hasta } +\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

Contando el orden cero se obtiene

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1.$$

Como $\lfloor u \rfloor \leq u$,

$$M \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

Este recuento incluye como direcciones límite los órdenes que se encuentran exactamente en incidencia rasante, $\theta = \pm 90^\circ$. Excluir dichas direcciones solo puede reducir el número.

(vi)

Consideremos los máximos principales del mismo orden n para las dos longitudes de onda.

Escribiendo $\Delta\lambda = \delta\lambda$, sus ecuaciones de la red son

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= n\lambda, \\ d \sin(\theta + \Delta\theta) &= n(\lambda + \Delta\lambda). \end{aligned}$$

Para un desplazamiento angular pequeño, medido en radianes,

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \simeq \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta.$$

Al restar la primera ecuación de la red de la segunda se obtiene

$$d \cos \theta \Delta\theta \simeq n\Delta\lambda,$$

de donde

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

Este es un resultado de primer orden para máximos existentes y no rasantes. Para n negativo, el desplazamiento con signo es negativo; la separación angular es su valor absoluto. Los máximos de orden cero coinciden.

Para las líneas del sodio,

$$\Delta\lambda = (589.6 - 589.0) \text{ nm} = 0.6 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

Para $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ en segundo orden,

$$\sin \theta = \frac{2(589.0 \times 10^{-9})}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.9816667,$$

por lo que

$$\theta \simeq 79.01^\circ, \quad \cos \theta \simeq 0.19061.$$

Por tanto,

$$\Delta\theta \simeq \frac{2(0.6 \times 10^{-9})}{(1.2 \times 10^{-6})(0.19061)} = 5.246 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

Con una precisión razonable,

$$\boxed{\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ}.$$

Como comprobación numérica, al restar los dos ángulos obtenidos de la ecuación de la red sin desarrollar se obtiene $5.32 \times 10^{-3} \text{ rad}$, aproximadamente un 1.4% por encima de la estimación de primer orden.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: Ondas sísmicas y el núcleo líquido de la Tierra

2. A principios de este siglo se propuso un modelo de la Tierra en el que se suponía que esta era una esfera de radio R , constituida por un manto sólido homogéneo e isótropo que se extendía hasta el radio R_c . La región del núcleo, dentro del radio R_c , contenía un líquido.

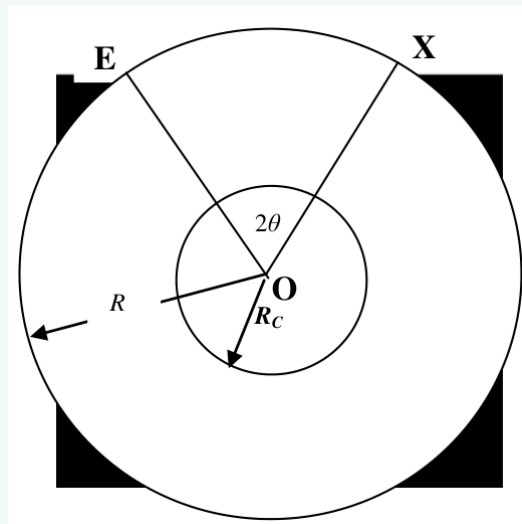


Figura 2.1

Las velocidades de las ondas sísmicas longitudinales y transversales, ondas P y S respectivamente, son constantes, V_P y V_S , dentro del manto. En el núcleo, las ondas longitudinales tienen una velocidad constante $V_{CP} < V_P$, y las ondas transversales no se propagan.

Un terremoto en E, en la superficie de la Tierra, produce ondas sísmicas que viajan por el interior de la Tierra y son observadas por un observador en la superficie que puede instalar su sismómetro en cualquier punto X de la superficie terrestre. La separación angular entre E y X, 2θ , viene dada por

$$2\theta = \text{Ángulo } EOX$$

donde O es el centro de la Tierra.

(i) Demuestre que las ondas sísmicas que viajan por el manto en línea recta llegarán a X en un tiempo t (el tiempo de propagación desde el terremoto) dado por

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \text{para } \theta > \arccos \left[\frac{R_c}{R} \right],$$

donde $v = v_P$ para las ondas P y $v = v_S$ para las ondas S.

(ii) Para algunas posiciones de X, las ondas sísmicas P llegan al observador tras dos refracciones en la interfaz entre el manto y el núcleo. Dibuje la trayectoria de una de estas ondas sísmicas P. Obtenga una relación entre θ e i , el ángulo de incidencia de la onda sísmica P en la interfaz entre el manto y el núcleo, para las ondas P.

(iii) Utilizando los datos

R	=	6370 km
R_C	=	3470 km
v_{CP}	=	10.85 km s^{-1}
v_S	=	6.31 km s^{-1}
v_{CP}	=	9.02 km s^{-1}

y el resultado obtenido en (ii), dibuje una gráfica de θ en función de i . Comente las consecuencias físicas de la forma de esta gráfica para observadores situados en distintos puntos de la superficie terrestre. Esboce la variación del tiempo de propagación de las ondas P y S en función de θ para $0 \leq \theta \leq 90$ grados.

(iv) Tras un terremoto, un observador mide un retraso de 2 minutos y 11 segundos entre la llegada de la onda P y la de la onda S, que llega después. Deduzca la separación angular entre el terremoto y el observador utilizando los datos del apartado (iii).

(v) El observador de la medición anterior advierte que, algún tiempo después de la llegada de las ondas P y S, aparecen otros dos registros en el sismómetro separados por un intervalo de tiempo de 6 minutos y 37 segundos. Explique este resultado y verifique que corresponde efectivamente a la separación angular determinada en el apartado anterior.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (i) El tiempo de propagación de la onda directa es

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos(R_c/R).$$

La igualdad describe el rayo tangente límite. La desigualdad impresa está invertida.

- (ii) Sean $a = R_c/R$, $b = v_{CP}/v_P$. El rayo sigue tres segmentos rectos y se refracta acercándose a la normal al entrar en el núcleo y alejándose de ella al salir. La mitad de su recorrido angular es

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Normalmente, $\theta = \Phi$; si se admiten rayos que emergen más allá de la antípoda, la separación angular menor viene dada por

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

- (iii) Los rayos P y S directos terminan en $\theta = 56.99^\circ$. Los rayos P transmitidos a través del núcleo aparecen por primera vez en

$$\theta_{\min} = 75.58^\circ, \quad i_{\min} = 55.02^\circ.$$

Por tanto, la zona de sombra de las ondas P es aproximadamente

$$113.99^\circ < 2\theta < 151.15^\circ,$$

mientras que las ondas S no tienen ninguna llegada directa ni transmitida a través del núcleo para $2\theta > 113.99^\circ$. Las ramas del tiempo de propagación de las ondas P refractadas se unen en 20.789 min; sus tiempos de llegada a la antípoda son 21.733 y 23.397 min. Las descripciones completas de las gráficas se dan a continuación.

- (iv) La separación angular entre el terremoto y el observador es

$$2\theta \approx 17.8^\circ.$$

- (v) Las señales posteriores son ondas P y S reflejadas en la frontera del núcleo. Sus tiempos de llegada calculados son 551.3 s y 947.9 s después del terremoto, lo que da

$$\Delta t_{\text{ref}} = 396.65 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 37 \text{ s}.$$

Solución

Utilizamos la interpretación físicamente coherente de los datos numéricos:

$$v_P = 10.85 \text{ km s}^{-1}, \quad v_S = 6.31 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km s}^{-1}.$$

En la tabla de datos del apartado (iii), la etiqueta v_{CP} aparece dos veces; el primer valor así etiquetado, 10.85 km s^{-1} , es v_P . La desigualdad impresa en (i) también está invertida; véase el apartado (i).

Utilizamos la teoría geométrica de rayos: los rayos son rectos dentro de cada región homogénea, la refracción obedece la ley de Snell y la reflexión cumple la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión. Se desprecian la difracción, la conversión de modos y las reflexiones adicionales en la

superficie terrestre.

(i)

Sea M el punto medio de la cuerda EX . El triángulo OEM es rectángulo, con $\angle EOM = \theta$. Por tanto,

$$EM = R \sin \theta, \quad OM = R \cos \theta.$$

La longitud de la trayectoria directa y el tiempo de propagación son, por tanto,

$$EX = 2R \sin \theta, \quad t = \frac{2R \sin \theta}{v}.$$

El punto de la cuerda más cercano al centro es M . Por tanto, el rayo evita el núcleo únicamente si

$$R \cos \theta \geq R_c,$$

o bien

$$\theta \leq \arccos(R_c/R).$$

La desigualdad estricta corresponde a una trayectoria completamente contenida en el manto; la igualdad es el límite tangente. Para valores mayores de θ , la cuerda atraviesa el núcleo, por lo que la fórmula correspondiente a una trayectoria solo por el manto deja de describir el rayo real.

(ii)

Denotemos por A y B los puntos de entrada y salida del núcleo. Dibujemos la trayectoria

$$E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X,$$

con EA y BX en el manto y AB como cuerda del núcleo. Dibujemos las normales radiales OA y OB .

Sea r el ángulo de refracción dentro del núcleo, medido respecto de la normal. La ley de Snell da

$$\frac{\sin i}{v_P} = \frac{\sin r}{v_{CP}},$$

de modo que

$$r = \arcsin \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right).$$

Como $v_{CP} < v_P$, tenemos $r < i$: el rayo se desvía hacia la normal al entrar en el núcleo. Por simetría, su ángulo de incidencia a la salida es r , y emerge al manto con un ángulo i .

Sea $\alpha = \angle OEA$. En el triángulo EOA , el ángulo en A es $\pi - i$. El teorema del seno da

$$\frac{\sin \alpha}{R_c} = \frac{\sin i}{R},$$

por lo que

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{R_c}{R} \sin i \right), \quad \angle EOA = i - \alpha.$$

Del triángulo isósceles AOB se obtiene

$$\angle AOB = \pi - 2r.$$

El recorrido angular total del rayo alrededor de O es, en consecuencia,

$$2\Phi = 2(i - \alpha) + \pi - 2r.$$

Por tanto,

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin\left(\frac{R_c}{R}\sin i\right) - \arcsin\left(\frac{v_{CP}}{v_P}\sin i\right).$$

Para un recorrido angular no mayor que π , $\theta = \Phi$. Si el rayo emerge justo más allá de la antípoda, el ángulo menor entre la fuente y el observador es $2\pi - 2\Phi$, lo que da

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

Por tanto, el dibujo solicitado debe mostrar un rayo quebrado simétrico, con tramos iguales en el manto, una cuerda recta en el núcleo y los ángulos i y $r < i$ señalados en la frontera de entrada.

(iii)

Los cocientes adimensionales son

$$a = \frac{R_c}{R} = 0.544741, \quad b = \frac{v_{CP}}{v_P} = 0.831336.$$

Así,

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Derivando, con los ángulos en radianes,

$$\frac{d\Phi}{di} = 1 - \frac{a \cos i}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} - \frac{b \cos i}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

En los extremos,

$$\Phi'(0) = 1 - a - b = -0.376077, \quad \Phi'(\pi/2) = 1.$$

Cada término que se resta disminuye con i , por lo que Φ' aumenta y tiene exactamente un cero. Numéricamente,

$$i_{\min} = 55.017^\circ, \quad \Phi_{\min} = \theta_{\min} = 75.577^\circ.$$

Para obtener la gráfica correspondiente del tiempo de propagación, la longitud de cualquiera de los tramos del manto es

$$\ell_m = \sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i.$$

Esto se obtiene proyectando los radios exterior e interior sobre el rayo en el manto, cuya distancia perpendicular a O es $R_c \sin i$.

La cuerda del núcleo tiene una longitud

$$\ell_c = 2R_c \cos r = 2R_c \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

En consecuencia, el tiempo de propagación de la onda P transmitida a través del núcleo es

$$T(i) = \frac{2}{v_P} \left(\sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i \right) + \frac{2R_c}{v_{CP}} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Los siguientes puntos especifican las dos gráficas solicitadas:

i (grados)	Mitad del recorrido angular Φ (grados)	Ángulo físico θ (grados)	Tiempo de la onda P transmitida a través del núcleo (min)
0	90.00	90.00	21.733
20	82.74	82.74	21.504
40	77.20	77.20	21.003
55.02	75.58	75.58	20.789
70	77.84	77.84	21.171
80	82.60	82.60	22.028
89.23	90.00	90.00	23.397
90	90.76	89.24	23.538

La curva de Φ en función de i comienza en 90° , desciende suavemente hasta su mínimo y luego asciende hasta 90.7568° . Al representar el ángulo físico menor θ , pliegue el último tramo en 90° : θ alcanza 90° en $i = 89.2322^\circ$ y luego disminuye ligeramente hasta 89.2432° para la incidencia rasante.

El límite de las ondas directas es

$$\theta_d = \arccos(R_c/R) = 56.993^\circ.$$

Por tanto, las consecuencias físicas son:

- Para $0 \leq \theta < 56.993^\circ$, las ondas P y S directas llegan al observador.
- Para $56.993^\circ < \theta < 75.577^\circ$, no llega al observador ningún rayo P directo ni transmitido a través del núcleo. Esta es la zona de sombra de las ondas P.
- Para $\theta > 56.993^\circ$, no hay ningún rayo S directo, y el núcleo líquido no transmite ningún rayo S.
- En $\theta = 75.577^\circ$, dos trayectorias P refractadas se unen. Como los rayos incidentes próximos emergen con casi la misma separación angular, la energía de los rayos se concentra allí: se trata de una cáustica.
- En la mayor parte de $75.577^\circ < \theta < 90^\circ$, dos trayectorias P refractadas producen dos llegadas distintas.

Si se utilizan exactamente los números dados, aparece una pequeña característica adicional cerca de la antípoda. Para

$$89.2432^\circ < \theta < 90^\circ,$$

una tercera trayectoria refractada llega al observador pasando más allá de la dirección antipodal. En la antípoda, las dos ramas oblicuas tienen tiempos de propagación iguales.

Para el **esbozo del tiempo de propagación**, dibuje las ramas directas

$$t_{P,\text{dir}} = 1174.19 \sin \theta \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 2019.02 \sin \theta \text{ s},$$

únicamente en $0 \leq \theta \leq 56.993^\circ$. Ambas parten del origen y crecen con concavidad hacia abajo; la curva S está por encima de la curva P. Sus extremos son

$$\begin{aligned} t_{P,\text{dir}}(\theta_d) &= 984.68 \text{ s} = 16.411 \text{ min}, \\ t_{S,\text{dir}}(\theta_d) &= 1693.16 \text{ s} = 28.219 \text{ min}. \end{aligned}$$

Las ramas principales de las ondas P transmitidas a través del núcleo comienzan juntas en

$$(\theta, T) = (75.577^\circ, 20.789 \text{ min})$$

y ascienden hacia 90° . Se unen con una tangente común, ya que al derivar se obtiene

$$\frac{dT}{di} = \frac{2R_c \sin i}{v_P} \frac{d\Phi}{di}, \quad \frac{dT}{d\Phi} = \frac{2R_c \sin i}{v_P}.$$

La rama de menor i llega antes y se aplana en la antípoda, donde el rayo sigue un diámetro:

$$T(0) = \frac{2(R - R_c)}{v_P} + \frac{2R_c}{v_{CP}} = 21.733 \text{ min.}$$

La otra rama principal alcanza allí 23.397 min. La pequeña tercera rama disminuye desde 23.538 min en $\theta = 89.243^\circ$ hasta 23.397 min en 90° .

Para un esbozo que incluya las llegadas reflejadas posteriores tratadas en el apartado (v), dibuje también

$$t_{v,\text{ref}}(\theta) = \frac{2}{v} \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_d.$$

Estas curvas crecen desde 8.909 min para P y 15.320 min para S en $\theta = 0$, y se unen tangencialmente con sus respectivas curvas directas en θ_d .

(iv)

Para las ondas P y S directas, la longitud de la trayectoria es la misma, por lo que la diferencia entre sus tiempos de llegada es

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right).$$

Aquí,

$$\Delta t = 2(60) + 11 = 131 \text{ s.}$$

Por tanto,

$$\sin \theta = \frac{131}{2(6370) \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right)} = \frac{131}{844.8239} = 0.1551.$$

Así,

$$\theta = 8.9204^\circ, \quad \boxed{2\theta = 17.8408^\circ \approx 17.8^\circ}.$$

Como $\theta < \theta_d$, la hipótesis de una trayectoria exclusivamente por el manto es coherente.

Los tiempos de llegada individuales son

$$t_{P,\text{dir}} = 182.07 \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 313.07 \text{ s.}$$

(v)

La frontera del núcleo puede reflejar la energía tanto de las ondas P como de las ondas S. Estas ondas reflejadas recorren trayectorias más largas por el manto y, por tanto, producen llegadas posteriores.

Sea C el punto de reflexión en la frontera del núcleo, sobre la bisectriz radial más cercana de $\angle EOX$. La trayectoria es

$$E \longrightarrow C \longrightarrow X.$$

La simetría de reflexión respecto de OC hace que los ángulos de incidencia y de reflexión sean iguales, y que $EC = CX$. Como $\angle EOC = \theta$, el teorema del coseno da

$$EC^2 = R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta.$$

Por tanto, la longitud de la trayectoria reflejada es

$$L_{\text{ref}} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}.$$

Para $\theta = 8.9204^\circ$,

$$L_{\text{ref}} = 5981.54 \text{ km.}$$

En consecuencia, los tiempos de llegada de las ondas reflejadas son

$$t_{P,\text{ref}} = \frac{5981.54}{10.85} = 551.29 \text{ s,}$$

$$t_{S,\text{ref}} = \frac{5981.54}{6.31} = 947.95 \text{ s.}$$

Ambas llegan después de la onda S directa, que llega a los 313.07 s, como se requiere.

La separación entre sus tiempos de llegada es

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{ref}} &= L_{\text{ref}} \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right) \\ &= 396.65 \text{ s} \\ &= 6 \text{ min } 36.65 \text{ s.} \end{aligned}$$

Redondeando al segundo más cercano,

$$\boxed{\Delta t_{\text{ref}} = 6 \text{ min } 37 \text{ s}},$$

lo que verifica la interpretación y la separación angular hallada en el apartado (iv).

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: Modos normales de masas unidas por resortes (anillo y cadena)

Tres partículas, cada una de masa m , están en equilibrio y unidas por resortes sin estirar y sin masa, cada uno con constante elástica k según la ley de Hooke. Están obligadas a moverse en una trayectoria circular, como se indica en la Figura 3.1.

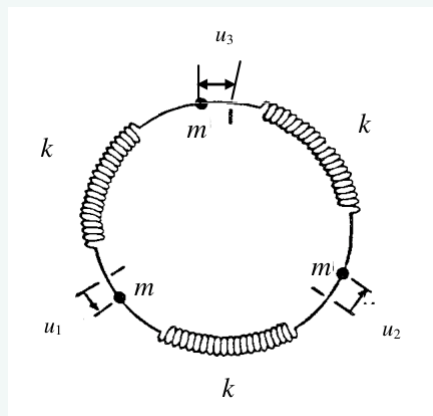


Figura 3.1

(i) Si cada masa se desplaza de su posición de equilibrio una pequeña distancia u_1 , u_2 y u_3 , respectivamente, escriba la ecuación de movimiento de cada masa.

(ii) Verifique que el sistema tiene soluciones armónicas simples de la forma

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

con aceleraciones $(-\omega^2 u_n)$, donde a_n ($n = 1, 2, 3$) son amplitudes constantes, y ω , la frecuencia angular, puede tomar 3 valores posibles,

$$\omega_o \sqrt{3}, \omega_o \sqrt{3} \text{ y } 0. \quad \text{donde } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

(iii) El sistema de resortes y masas alternados se amplía a N partículas; cada masa m está unida mediante resortes a sus masas vecinas. Inicialmente, los resortes están sin estirar y en equilibrio. Escriba la ecuación de movimiento de la masa n -ésima ($n = 1, 2, \dots, N$) en función de su desplazamiento y de los de las masas adyacentes cuando las partículas se desplazan del equilibrio.

$$u_n(t) = a_s \sin \left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi \right) \cos \omega_s t,$$

son soluciones oscilatorias donde $s = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N$ y donde ϕ es una fase arbitraria, siempre que las frecuencias angulares estén dadas por

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{s\pi}{N} \right),$$

donde a_s ($s = 1, \dots, N$) son amplitudes constantes independientes de n .

Indique el intervalo de frecuencias posibles para una cadena que contiene un número infinito de masas.

(iv) Determine el cociente

$$u_n / u_{n+1}$$

para N grande, en los dos casos:

(a) soluciones de baja frecuencia

(b) $\omega = \omega_{\max}$, donde $\omega_{\max}$ es la frecuencia máxima de las soluciones.

Esboce gráficas típicas que indiquen los desplazamientos de las partículas en función del número de partícula a lo largo de la cadena en el instante t , para los casos (a) y (b).

(v) Si una de las masas se sustituye por una masa $m' \ll m$, estime cualquier cambio importante que cabría esperar en la distribución de frecuencias angulares.

Describa cualitativamente la forma del espectro de frecuencias que se predeciría para una cadena diatómica con masas alternadas m y m' , basándose en el resultado anterior.

Recordatorio

$$\begin{aligned} \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right) \\ 2 \sin^2 A &= 1 - \cos 2A \end{aligned}$$

Respuestas

- (i)

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 &= k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 &= k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{aligned}$$

- (ii)

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad 0.$$

La frecuencia no nula tiene dos modos independientes que satisfacen $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. El modo de frecuencia cero tiene $a_1 = a_2 = a_3$.

- (iii)

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad u_{n+N} = u_n,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right).$$

Para una cadena infinita,

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En términos de frecuencia ordinaria, $0 \leq f \leq \sqrt{k/m}/\pi$.

- (iv)

(a) $u_n/u_{n+1} \simeq +1$, lejos de los nodos de desplazamiento. La gráfica es una senoide que varía lentamente, muestreada en las posiciones de las partículas.

(b) $u_n/u_{n+1} = -1$ en el borde superior de la banda. Los desplazamientos alternan entre valores positivos y negativos de igual magnitud. Esto es exacto para N par; un anillo con un número impar de partículas se aproxima localmente a este comportamiento para N grande.

- (v) Una sola masa ligera produce un modo de alta frecuencia, concentrado en esa masa:

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}} \gg 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Una cadena alternada tiene una banda acústica y una banda óptica separadas por una brecha. Para $m' < m$, sus intervalos límite exactos son

$$\begin{array}{ll} \text{Acústica:} & 0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ \text{Óptica:} & \sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}. \end{array}$$

Solución

(i)

Midamos todos los desplazamientos como longitudes de arco en el mismo sentido alrededor del anillo. En la aproximación de pequeños desplazamientos, el alargamiento de un resorte es la diferencia entre los desplazamientos de sus extremos. Por tanto, la ley de Hooke da una fuerza recuperadora tangencial proporcional a esa diferencia. La fuerza de ligadura no tiene componente tangencial.

Sobre la partícula 1, los dos resortes ejercen fuerzas $k(u_2 - u_1)$ y $k(u_3 - u_1)$. La segunda ley de Newton da

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1).$$

Aplicando el mismo razonamiento a las partículas 2 y 3,

$$\begin{array}{l} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{array}$$

(ii)

Sustituimos $u_n = a_n \cos \omega t$, de modo que $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$. Definimos

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \quad S = a_1 + a_2 + a_3.$$

Cada ecuación se convierte en

$$\lambda a_n = 3a_n - S.$$

Al sumar las tres ecuaciones se obtiene

$$\lambda S = 0.$$

Hay dos posibilidades.

Si $\lambda = 0$, las ecuaciones individuales exigen

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Todas las masas recorren la misma longitud de arco, por lo que ningún resorte cambia de longitud. Así,

$$\omega = 0.$$

Este es el modo de rotación rígida. Estrictamente, no es una oscilación: su movimiento general es $u_1 = u_2 = u_3 = A + Bt$. La forma cosenoidal prescrita representa el caso de desplazamiento estático.

Si $\lambda \neq 0$, entonces $S = 0$, y una amplitud no nula exige

$$\lambda = 3.$$

Por tanto,

$$\omega = \sqrt{3} \omega_o = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

La condición $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ deja dos amplitudes independientes. Por ejemplo, dos formas modales independientes son

$$(a_1, a_2, a_3) \propto (1, -1, 0), \quad (a_1, a_2, a_3) \propto (1, 1, -2).$$

En consecuencia, los tres modos normales tienen frecuencias

$$\sqrt{3} \omega_o, \quad \sqrt{3} \omega_o, \quad 0,$$

y la frecuencia no nula aparece dos veces.

(iii)

La partícula n experimenta las fuerzas

$$k(u_{n+1} - u_n) \quad \text{y} \quad -k(u_n - u_{n-1}).$$

Por consiguiente,

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

El anillo impone condiciones de contorno periódicas,

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1.$$

Escribimos

$$q = \frac{2\pi s}{N}, \quad u_n = a_s \sin(nq + \phi) \cos \omega_s t.$$

Esta expresión es periódica porque $Nq = 2\pi s$. Usando la identidad de adición proporcionada,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= a_s [\sin(nq + \phi + q) + \sin(nq + \phi - q)] \cos \omega_s t \\ &= 2 \cos q u_n. \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento se convierte en

$$-m\omega_s^2 u_n = 2k(\cos q - 1)u_n = -4k \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right) u_n.$$

Para un modo no trivial,

$$\omega_s^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{N} \right).$$

Como $\sin(\pi s/N) \geq 0$ para el intervalo indicado $s = 1, \dots, N$,

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{\pi s}{N} \right).$$

Cuando la cadena se hace infinita, los números de onda permitidos forman un continuo. El factor seno toma todos los valores entre cero y uno, lo que da

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_o = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

El cero es el extremo correspondiente al desplazamiento rígido; las oscilaciones propiamente dichas tienen $\omega > 0$. Como $f = \omega/(2\pi)$,

$$0 \leq f \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Con valores de k y m en el SI, las frecuencias angulares se expresan en rad s^{-1} , y las frecuencias ordinarias en Hz.

(iv)

En los instantes y posiciones en que el denominador no es nulo, el factor temporal común se cancela:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin(nq + \phi)}{\sin(nq + \phi + q)}.$$

La misma expresión se aplica directamente al cociente de las amplitudes modales.

(a) Baja frecuencia

Elegimos el representante de q próximo a cero. Entonces

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin \frac{q}{2} \right| \simeq \omega_o |q|,$$

de modo que una frecuencia baja implica $|q| \ll 1$. Escribiendo $\theta = nq + \phi$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{\cos q + \cot \theta \sin q} \simeq 1 - q \cot \theta.$$

Así, lejos de los nodos,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq +1.$$

Las masas vecinas tienen desplazamientos casi iguales y se mueven aproximadamente en fase. Cerca de un nodo, los propios desplazamientos son pequeños, por lo que su cociente no tiene por qué ser próximo a uno.

Para el esbozo solicitado, se traza una senoide de longitud de onda $L \gg 1$, medida en separaciones entre partículas, y se marcan sus valores en los números enteros de partícula. Un perfil representativo es

$$u_n = C(t) \sin \left(\frac{2\pi(n - n_0)}{L} \right).$$

Sus valores principales son:

$n - n_0$	0	$L/4$	$L/2$	$3L/4$	L
$u_n/C(t)$	0	+1	0	-1	0

Hay muchas partículas entre nodos sucesivos, y los puntos vecinos suelen tener alturas muy similares.

(b) Frecuencia máxima

En el borde superior de la banda, $q = \pi$, lo que da

$$\omega_{\max} = 2\omega_o.$$

El desplazamiento es

$$u_n = a_s \sin(n\pi + \phi) \cos \omega_{\max} t = (-1)^n a_s \sin \phi \cos \omega_{\max} t.$$

En consecuencia,

$$u_{n+1} = -u_n, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1.$$

Cada par de masas vecinas se mueve en sentidos opuestos con amplitudes iguales.

El esbozo consiste en puntos que alternan entre $+C(t)$ y $-C(t)$:

$n - n_0$	0	1	2	3	4
$u_n/C(t)$	+1	-1	+1	-1	+1

El período espacial es de dos separaciones entre partículas. Si se conectan los puntos vecinos como guía visual, forman un zigzag.

Este patrón encaja exactamente en un anillo con un número par de partículas. Para N finito e impar, el mayor número de onda permitido es $\pi \pm \pi/N$, y

$$\omega_{\max} = 2\omega_o \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

Su patrón de desplazamientos alterna de signo con una envolvente que varía lentamente. Para N grande, el cociente entre desplazamientos vecinos es aproximadamente -1 lejos de los nodos de la envolvente.

(v)

Primero sustituimos una sola masa por $m' \ll m$. Una vibración rápida de esta masa ligera provoca un movimiento comparativamente pequeño de sus vecinas pesadas. En la aproximación dominante, consideramos fijas esas vecinas.

Desplazar la masa ligera una distancia x produce una fuerza recuperadora $-kx$ debida a cada resorte. Por tanto,

$$m' \ddot{x} \simeq -2kx,$$

lo que da

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

Con respecto al borde superior de la banda original,

$$\frac{\omega_{\text{defect}}}{2\omega_o} \simeq \sqrt{\frac{m}{2m'}} \gg 1.$$

La aproximación es autoconsistente. Para una masa pesada vecina con amplitud u_1 , el balance dominante a alta frecuencia es

$$-m\omega_{\text{defect}}^2 u_1 \simeq kx,$$

por lo que

$$\frac{u_1}{x} \simeq -\frac{m'}{2m}.$$

Su movimiento es pequeño y opuesto al de la masa ligera. Más lejos, el movimiento es aún menor: el modo de alta frecuencia está localizado alrededor del defecto.

Así, un modo se desplaza muy por encima de la banda de frecuencias original. Las demás frecuencias se perturban, pero siguen siendo del orden de $\sqrt{k/m}$; en una cadena infinita, la banda de modos extendidos sigue siendo $0 \leq \omega \leq 2\omega_o$. También se conserva el modo de desplazamiento rígido de frecuencia cero.

Para una **cadena alternada**, la repetición de masas ligeras da lugar a toda una banda de alta frecuencia. El espectro se divide en:

- Una **banda acústica**, que contiene movimiento colectivo de baja frecuencia. A longitudes de onda grandes, las masas pesadas y ligeras vecinas se mueven aproximadamente juntas.
- Una **banda óptica**, en la que las masas ligeras oscilan rápidamente, con un movimiento mucho menor de las masas pesadas. A longitudes de onda grandes, los dos tipos de masa se mueven en sentidos opuestos.

Los bordes de las bandas pueden deducirse directamente. Sea x_j el desplazamiento de la masa pesada j , e y_j el de la masa ligera situada entre x_j y x_{j+1} . Entonces

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= k(y_{j-1} + y_j - 2x_j), \\ m'\ddot{y}_j &= k(x_j + x_{j+1} - 2y_j). \end{aligned}$$

Para un modo con un cambio de fase Q por celda de dos partículas, usamos

$$\begin{aligned} x_j &= X \cos(jQ + \phi) \cos \omega t, \\ y_j &= Y \cos\left((j + \frac{1}{2})Q + \phi\right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las amplitudes son

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)X &= 2k \cos(Q/2)Y, \\ (2k - m'\omega^2)Y &= 2k \cos(Q/2)X. \end{aligned}$$

Una solución no nula exige

$$(2k - m\omega^2)(2k - m'\omega^2) = 4k^2 \cos^2(Q/2),$$

o bien

$$mm'\omega^4 - 2k(m + m')\omega^2 + 4k^2 \sin^2(Q/2) = 0.$$

Sus dos raíces son

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)^2 - \frac{4}{mm'} \sin^2(Q/2)}.$$

A medida que $|Q|$ aumenta de 0 a π , la raíz inferior aumenta y la superior disminuye. Para $m' < m$, sus intervalos son, por tanto,

$$\boxed{0 \leq \omega_- \leq \sqrt{\frac{2k}{m}},}$$

y

$$\sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega_+ \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}.$$

No hay modos en la brecha

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

Para $m' \ll m$, la banda óptica es estrecha en relación con su alta frecuencia, aproximadamente $\sqrt{2k/m'}$, y está muy separada de la banda acústica. Una cadena periódica finita tiene frecuencias discretas dentro de estas bandas; estas se vuelven continuas en el límite de una cadena infinita.

La solución se comprobó con la solución oficial.