

IPhO 1986

Theorieaufgaben und Lösungen · London (Harrow), Vereinigtes Königreich · 3

Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/1986/

Aufgabe 1: Zwei Spalte und ein Beugungsgitter: Vektoraddition von Amplituden

Figure 1.1

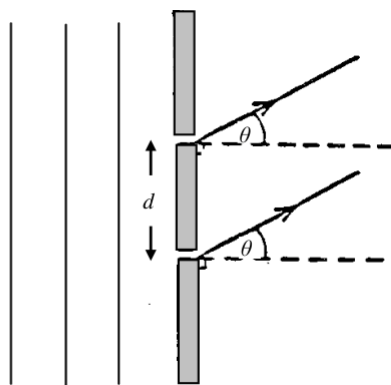


Abbildung 1.1

Eine ebene monochromatische Lichtwelle mit der Wellenlänge λ und der Frequenz f fällt senkrecht auf zwei identische schmale Spalte, deren Abstand d beträgt, wie in Abbildung 1.1 dargestellt. Die an jedem Spalt austretende Lichtwelle ist im Abstand x in einer Richtung θ zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$y = a \cos[2\pi(ft - x/\lambda)]$$

wobei die Amplitude a für beide Wellen gleich ist. (Es sei angenommen, dass x viel größer als d ist.)

(i) Zeigen Sie, dass die beiden Wellen, die unter einem Winkel θ zur Normalen auf die Spalte beobachtet werden, eine resultierende Amplitude A haben, die durch Addition zweier Vektoren ermittelt werden kann, deren Betrag jeweils a ist und deren jeweilige Richtung durch die Phase der Lichtwelle bestimmt wird.

Bestätigen Sie anhand des Vektordiagramms geometrisch, dass

$$A = 2a \cos \theta$$

wobei

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(ii) Der Doppelspalt wird durch ein Beugungsgitter mit N äquidistanten Spalten ersetzt, wobei benachbarte Spalte den Abstand d haben. Zeigen Sie mithilfe der Vektormethode zur Addition von Amplituden, dass die Amplitudenvektoren, deren Betrag jeweils a ist, einen Teil eines

regelmäßigen Vielecks bilden, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit dem Radius R liegen, der gegeben ist durch

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta},$$

Leiten Sie daraus ab, dass die resultierende Amplitude

$$\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

beträgt, und bestimmen Sie die resultierende Phasendifferenz gegenüber dem Licht aus dem Spalt am Rand des Gitters.

(iii) Skizzieren Sie in demselben Diagramm $\sin N\beta$ und $(1/\sin \beta)$ als Funktionen von β . Zeigen Sie in einem gesonderten Diagramm, wie die Intensität der resultierenden Welle von β abhängt.

(iv) Bestimmen Sie die Intensitäten der Hauptmaxima.

(v) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Hauptmaxima nicht größer sein kann als

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1 \right)$$

(vi) Zeigen Sie, dass zwei Wellenlängen λ und $\lambda + \delta\lambda$, wobei $\delta\lambda \ll \lambda$, Hauptmaxima mit einem Winkelabstand erzeugen, der gegeben ist durch

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad \text{wobei } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \text{ usw.}$$

Berechnen Sie diesen Winkelabstand für die Natrium-D-Linien, für die gilt:

$$\lambda = 589.0 \text{ nm}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 589.6 \text{ nm}, \quad n = 2, \quad \text{und } d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

$$\left[\text{Zur Erinnerung: } \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei I_1 die Intensität eines einzelnen Spalts, und es sei

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

Ein vorzeichenbehafteter Amplitudenkoeffizient wird mit A_s bezeichnet; sein Betrag ist die physikalische Amplitude.

- (i) Die Phasendifferenz beträgt 2β , woraus folgt:

$$A_s = 2a \cos \beta, \quad A = 2a |\cos \beta|.$$

Das gedruckte $\cos \theta$ muss $\cos \beta$ lauten.

- (ii)

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (0 < \beta < \pi), \quad A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

Allgemein gilt $R = a/(2|\sin \beta|)$. Wenn die Phasen der Spalte jeweils um 2β zunehmen, beträgt die resultierende Phase relativ zum ersten Randspalt bei Verwendung des obigen vorzeichenbehafteten Koeffizienten $(N-1)\beta$. Bei Verwendung einer positiven Amplitude kommt überall dort π hinzu, wo dieser Koeffizient negativ ist. Bei $\beta = m\pi$ beträgt die physikalische Amplitude Na .

- (iii) $\sin N\beta$ hat die Amplitude 1 und die Periode $2\pi/N$; $1/\sin \beta$ hat senkrechte Asymptoten bei $\beta = m\pi$. Die Intensität ist

$$I(\beta) = I_1 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Sie ist eine gerade Funktion mit der Periode π und Hauptmaxima bei $m\pi$. Zwischen aufeinanderfolgenden Hauptmaxima liegen $N-1$ Nullstellen und $N-2$ Nebenmaxima.

- (iv)

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1, \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

- (v) Zählt man streifende Beugungsordnungen als Grenzrichtungen mit, so gilt

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

- (vi) In erster Ordnung gilt

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

Der Winkelabstand ist der Betrag dieser vorzeichenbehafteten Verschiebung. Für die angegebenen Natriumlinien in zweiter Beugungsordnung gilt

$$\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ.$$

Lösung

- (i)

Bei senkrechtem Einfall ist die Phase der einfallenden Welle an beiden Spalten gleich. Die austretenden Wellen sind kohärent, sodass sich ihre momentanen Auslenkungen addieren.

Im Fernfeld sind die Strahlen, die den Beobachtungspunkt erreichen, praktisch parallel. Der Gangunterschied zwischen den beiden Strahlen beträgt daher

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

Somit hat die Phasendifferenz den Betrag

$$\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\beta.$$

Wählen wir den Referenzspalt so, dass die andere Welle einen Phasenvorsprung von 2β hat.

Bezeichnen wir die Referenzphase mit ψ , so lauten die beiden Wellen

$$y_0 = a \cos \psi, \quad y_1 = a \cos(\psi + 2\beta).$$

Mit der angegebenen Identität folgt

$$y_0 + y_1 = 2a \cos \beta \cos(\psi + \beta).$$

Zur geometrischen Deutung stellen wir jede Welle durch einen Vektor der Länge a dar, dessen Richtung ihrer Phase entspricht. Seine Projektion auf eine feste Achse ist die momentane Auslenkung der Welle. Beide Vektoren rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi f$, wobei ihr Winkelabstand 2β konstant bleibt. Da sich die Projektionen addieren, stellt ihre Vektorsumme die resultierende Welle dar.

Für das Vektordiagramm zeichnen wir die beiden Pfeile von einem gemeinsamen Ursprung aus, sodass sie mit der Winkelhalbierenden ihrer Phasenrichtungen die Winkel $-\beta$ und $+\beta$ bilden. Ihre Komponenten senkrecht zu dieser Winkelhalbierenden heben sich auf; ihre Komponenten entlang der Winkelhalbierenden addieren sich:

$$A_s = a \cos \beta + a \cos \beta = 2a \cos \beta.$$

Damit gilt

$$\boxed{A = 2a |\cos \beta|}.$$

Ein negativer vorzeichenbehafteter Koeffizient bedeutet lediglich eine Umkehrung des resultierenden Vektors oder eine zusätzliche Phase von π .

Das θ in der gedruckten Amplitudenformel muss daher durch β ersetzt werden.

(ii)

Wir wenden dieselbe Fernfeldnäherung auf das gesamte Gitter an und vernachlässigen dabei die Amplitudenänderung und die Krümmung der Wellenfront über das Gitter hinweg. Wir nummerieren die Spalte von einem Rand aus so, dass ihre Phasen

$$\psi, \psi + 2\beta, \dots, \psi + 2(N - 1)\beta.$$

betragen.

Wir zeichnen die N Amplitudenvektoren so aneinander, dass jeweils der Anfang eines Vektors an der Spitze des vorhergehenden liegt. Jeder Vektor hat die Länge a , und jeder ist gegenüber seinem Vorgänger um denselben Winkel 2β gedreht. Ihre Endpunkte bilden folglich einen Polygonzug aus gleich langen Sehnen auf einem Kreis.

Im Diagramm bezeichnen wir die aufeinanderfolgenden Endpunkte mit $P_0, P_1, \dots, P_N$ und den Kreismittelpunkt mit O . Jede Seite $P_j P_{j+1}$ hat die Länge a und spannt einen orientierten Mittelpunktswinkel 2β auf. Die Halbierung des entsprechenden gleichschenkligen Dreiecks ergibt für $0 < \beta < \pi$

$$\frac{a}{2} = R \sin \beta.$$

Daraus folgt

$$\boxed{R = \frac{a}{2 \sin \beta}}.$$

Für beliebiges β beträgt der positive Radius $a/(2|\sin \beta|)$. Der Polygonzug muss sich nach den N Vektoren nicht schließen.

Der resultierende Vektor verläuft direkt von P_0 nach P_N . Zwischen diesen Endpunkten liegt ein gesamter orientierter Mittelpunktswinkel von $2N\beta$, sodass seine Länge

$$A_N = 2R|\sin N\beta| = a \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right|.$$

beträgt. Der gesuchte vorzeichenbehaftete Koeffizient ist somit

$$A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

Die Phase ergibt sich aus den Richtungen der Sehnen. Der durch die Mitte der ersten kleinen Sehne verlaufende Radius hat die Winkellage β , während der durch die Mitte der resultierenden Sehne verlaufende Radius die Winkellage $N\beta$ hat. Jede Sehne steht senkrecht auf dem durch ihre Mitte verlaufenden Radius, sodass ihr Winkelunterschied

$$N\beta - \beta = (N - 1)\beta,$$

beträgt, bis auf eine Umkehrung der Resultierenden.

Gleichwertig dazu lautet die vollständige resultierende Welle

$$y_{\text{tot}} = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cos[\psi + (N - 1)\beta].$$

Mit der gewählten Randkonvention beträgt die Phase relativ zu diesem Randspalt daher $(N - 1)\beta$, wenn der vorzeichenbehaftete Koeffizient beibehalten wird. Bei einer nichtnegativen Amplitude beträgt sie

$$\phi = \begin{cases} (N - 1)\beta, & \sin N\beta / \sin \beta > 0, \\ (N - 1)\beta + \pi, & \sin N\beta / \sin \beta < 0, \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

Bei Bezug auf den gegenüberliegenden Rand kehrt sich das Vorzeichen der relativen Phase modulo 2π um. Bei verschwindender Resultierender ist die Phase nicht definiert.

Für $\beta = m\pi$ unterscheiden sich benachbarte Phasen um $2m\pi$. Alle Vektoren zeigen in dieselbe Richtung, sodass $A_N = Na$ gilt und die relative Phase modulo 2π null ist. Der Radius der Kreiskonstruktion wird dann im Grenzfall unendlich groß.

(iii)

Die zeitlich gemittelte Intensität ist proportional zum Quadrat der physikalischen Amplitude. Da die Amplitude eines einzelnen Spalts a beträgt, gilt

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A_N^2}{a^2},$$

und somit

$$\frac{I(\beta)}{I_1} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

Für das erste Diagramm verwenden wir eine gemeinsame waagerechte β -Achse und eine gemeinsame senkrechte Achse für die Funktionswerte:

- $\sin N\beta$ oszilliert zwischen -1 und $+1$ mit der Periode $2\pi/N$. Seine Nullstellen liegen bei $\beta = k\pi/N$, und seine Extremstellen liegen bei $\beta = (2k+1)\pi/(2N)$ mit den Werten $(-1)^k$.
- $1/\sin \beta$ hat die Periode 2π , keine Nullstellen und senkrechte Asymptoten bei $\beta = m\pi$. Zwischen 0 und π fällt die Funktion von $+\infty$ auf ihr Minimum 1 bei $\pi/2$ und steigt dann wieder auf $+\infty$. Der nächste Ast zwischen π und 2π ist negativ, erreicht bei $3\pi/2$ den Wert -1 und strebt an beiden Enden gegen $-\infty$. Diese Äste wiederholen sich.

Obwohl der Kehrwert des Sinus bei $m\pi$ divergiert, hat das Produkt mit $\sin N\beta$ einen endlichen Grenzbetrag N .

Für das Intensitätsdiagramm tragen wir I/I_1 auf. Seine wesentlichen Merkmale sind:

Position	I/I_1
$\beta = m\pi$	N^2
$\beta = m\pi + r\pi/N, \quad r = 1, \dots, N-1$	0
$\beta = m\pi + \pi/2, N$ gerade	0
$\beta = m\pi + \pi/2, N$ ungerade	1

Die Kurve ist nichtnegativ, gerade und periodisch mit der Periode π . Jedes Hauptmaximum ist symmetrisch um $\beta = m\pi$. Seine nächstgelegenen Nullstellen sind

$$\beta = m\pi \pm \frac{\pi}{N},$$

sodass seine Breite zwischen diesen Nullstellen $2\pi/N$ beträgt.

Zwischen benachbarten Hauptmaxima liegen $N-1$ Nullstellen und zwischen aufeinanderfolgenden Nullstellen $N-2$ kleinere Nebenmaxima. Ihre genauen Positionen erfüllen

$$N \cot(N\beta) = \cot \beta,$$

was sich durch Differenzieren der Intensität außerhalb ihrer Nullstellen ergibt. Abseits der Asymptoten liegt die Kurve unterhalb der Einhüllenden

$$I = \frac{I_1}{\sin^2 \beta}.$$

(iv)

Die größtmögliche Resultierende von N Vektoren der Länge a hat die Länge Na . Dies tritt ein, wenn alle Vektoren in dieselbe Richtung zeigen:

$$2\beta = 2n\pi.$$

Die Hauptmaxima erfüllen somit

$$\beta = n\pi \iff \boxed{d \sin \theta = n\lambda}.$$

In diesen Richtungen gilt

$$A_N = Na,$$

also

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1.$$

Im angegebenen Modell gleicher Amplituden haben alle Hauptmaxima diese Intensität.

Dasselbe Ergebnis folgt durch den Grenzübergang:

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N(-1)^{n(N-1)},$$

dessen Quadrat N^2 ist.

(v)

Ein Hauptmaximum der Ordnung n erfordert

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

Da $|\sin \theta| \leq 1$, gilt

$$|n| \leq \frac{d}{\lambda}.$$

Die zulässigen ganzzahligen Ordnungen reichen daher von

$$-\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor \quad \text{bis} \quad +\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

Zählt man die nullte Ordnung mit, so ergibt sich

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1.$$

Wegen $\lfloor u \rfloor \leq u$ gilt

$$M \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

Diese Zählung schließt etwaige Ordnungen bei exakt streifendem Einfall, $\theta = \pm 90^\circ$, als Grenzrichtungen ein. Werden solche Richtungen ausgeschlossen, kann sich die Anzahl nur verringern.

(vi)

Wir betrachten die Hauptmaxima derselben Ordnung n für die beiden Wellenlängen. Mit $\Delta\lambda = \delta\lambda$ lauten ihre Gittergleichungen

$$\begin{aligned} d \sin \theta &= n\lambda, \\ d \sin(\theta + \Delta\theta) &= n(\lambda + \Delta\lambda). \end{aligned}$$

Für eine kleine, im Bogenmaß gemessene Winkelverschiebung gilt

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \simeq \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta.$$

Subtraktion der ersten Gittergleichung von der zweiten ergibt

$$d \cos \theta \Delta\theta \simeq n\Delta\lambda,$$

also

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

Dies ist ein Ergebnis erster Ordnung für existierende, nicht streifende Maxima. Für negatives n ist die vorzeichenbehaftete Verschiebung negativ; der Winkelabstand ist ihr Betrag. Die Maxima nullter Ordnung fallen zusammen.

Für die Natriumlinien gilt

$$\Delta\lambda = (589.6 - 589.0) \text{ nm} = 0.6 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

Bei $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ in zweiter Beugungsordnung ist

$$\sin \theta = \frac{2(589.0 \times 10^{-9})}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.9816667,$$

also

$$\theta \simeq 79.01^\circ, \quad \cos \theta \simeq 0.19061.$$

Daher gilt

$$\Delta\theta \simeq \frac{2(0.6 \times 10^{-9})}{(1.2 \times 10^{-6})(0.19061)} = 5.246 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

Mit sinnvoller Genauigkeit ergibt sich

$$\boxed{\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ}.$$

Als numerische Kontrolle ergibt die Subtraktion der beiden Winkel aus der nicht entwickelten Gittergleichung $5.32 \times 10^{-3} \text{ rad}$, etwa 1.4% mehr als die Näherung erster Ordnung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Seismische Wellen und der flüssige Erdkern

2. Zu Beginn dieses Jahrhunderts wurde ein Erdmodell vorgeschlagen, in dem die Erde als Kugel mit dem Radius R angenommen wurde, deren homogener, isotroper, fester Mantel bis zum Radius R_c reicht. Der Kernbereich innerhalb des Radius R_c enthielt eine Flüssigkeit.

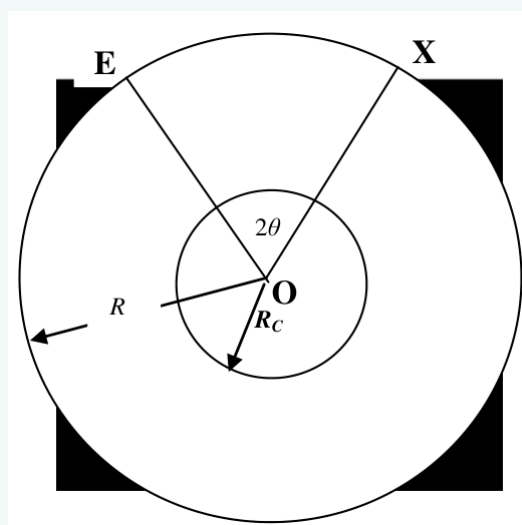


Abbildung 2.1

Die Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen seismischen Wellen, der P- bzw. S-Wellen, sind innerhalb des Mantels konstant und betragen V_P bzw. V_S . Im Kern haben Longitudinalwellen eine konstante Geschwindigkeit V_{CP} , $< V_P$, und Transversalwellen breiten sich dort nicht aus.

Ein Erdbeben bei E an der Erdoberfläche erzeugt seismische Wellen, die sich durch die Erde ausbreiten und von einem Beobachter an der Oberfläche registriert werden, der sein Seismometer an einem beliebigen Punkt X der Erdoberfläche aufstellen kann. Der Winkelabstand zwischen E und X, 2θ , ist gegeben durch

$$2\theta = \text{Winkel } EOX$$

wobei O der Erdmittelpunkt ist.

(i) Zeigen Sie, dass die seismischen Wellen, die sich geradlinig durch den Mantel ausbreiten, bei X zu einer Zeit t eintreffen (der Laufzeit seit dem Erdbeben), die gegeben ist durch

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \text{für } \theta > \arccos \left[\frac{R_c}{R} \right],$$

wobei $v = v_P$ für die P-Wellen und $v = v_S$ für die S-Wellen gilt.

(ii) Für einige Positionen von X erreichen die seismischen P-Wellen den Beobachter nach zweimaliger Brechung an der Mantel-Kern-Grenze. Zeichnen Sie den Weg einer solchen seismischen P-Welle. Leiten Sie für P-Wellen eine Beziehung zwischen θ und i , dem Einfallswinkel der seismischen P-Welle an der Mantel-Kern-Grenze, her.

(iii) Zeichnen Sie mithilfe der Daten

R	=	6370 km
R_C	=	3470 km
v_{CP}	=	10.85 km s ⁻¹
v_S	=	6.31 km s ⁻¹
v_{CP}	=	9.02 km s ⁻¹

und des in (ii) erhaltenen Ergebnisses einen Graphen von θ in Abhängigkeit von i . Erläutern Sie die physikalischen Folgen der Form dieses Graphen für Beobachter an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche. Skizzieren Sie den Verlauf der Laufzeiten der P- und S-Wellen als Funktion von θ für $0 \leq \theta \leq 90$ Grad.

(iv) Nach einem Erdbeben misst ein Beobachter zwischen der Ankunft der P-Welle und der nachfolgenden S-Welle eine Zeitdifferenz von 2 Minuten 11 Sekunden. Bestimmen Sie mithilfe der in Abschnitt (iii) angegebenen Daten den Winkelabstand zwischen dem Erdbeben und dem Beobachter.

(v) Der Beobachter aus der vorherigen Messung stellt fest, dass einige Zeit nach der Ankunft der P- und S-Wellen zwei weitere Signale auf dem Seismometer registriert werden, zwischen denen ein Zeitintervall von 6 Minuten 37 Sekunden liegt. Erklären Sie dieses Ergebnis und überprüfen Sie, dass es tatsächlich dem im vorherigen Abschnitt bestimmten Winkelabstand entspricht.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (i) Die Laufzeit der direkten Welle ist

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos(R_c/R).$$

Die Gleichheit beschreibt den Grenzfall des tangentialen Strahls. Das gedruckte Ungleichheitszeichen ist umgekehrt.

- (ii) Setzen wir $a = R_c/R$, $b = v_{CP}/v_P$. Der Strahl verläuft entlang dreier gerader Abschnitte und wird beim Eintritt in den Kern zum Lot hin und beim Austritt vom Lot weg gebrochen. Die Hälfte seines insgesamt durchlaufenen Zentriwinkels ist

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Gewöhnlich gilt $\theta = \Phi$; berücksichtigt man Strahlen, die jenseits des Antipoden austreten, so ist der kleinere Winkelabstand gegeben durch

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

- (iii) Direkte P- und S-Strahlen enden bei $\theta = 56.99^\circ$. Durch den Kern laufende P-Strahlen treten erstmals bei

$$\theta_{\min} = 75.58^\circ, \quad i_{\min} = 55.02^\circ$$

auf. Somit liegt der P-Wellen-Schatten ungefähr im Bereich

$$113.99^\circ < 2\theta < 151.15^\circ,$$

während für $2\theta > 113.99^\circ$ weder direkte noch durch den Kern laufende S-Wellen eintreffen. Die Laufzeitäste der gebrochenen P-Wellen treffen sich bei 20.789 min; ihre Ankunftszeiten am Antipoden betragen 21.733 und 23.397 min. Die vollständigen Beschreibungen der Graphen folgen weiter unten.

- (iv) Der Winkelabstand zwischen Erdbeben und Beobachter beträgt

$$2\theta \approx 17.8^\circ.$$

- (v) Die späteren Signale sind P- und S-Wellen, die an der Kerngrenze reflektiert wurden. Ihre berechneten Ankunftszeiten betragen 551.3 s und 947.9 s nach dem Erdbeben, woraus sich

$$\Delta t_{\text{ref}} = 396.65 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 37 \text{ s}$$

ergibt.

Lösung

Wir verwenden die physikalisch konsistente Lesart der Zahlenangaben:

$$v_P = 10.85 \text{ km s}^{-1}, \quad v_S = 6.31 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km s}^{-1}.$$

Die Datentabelle in Teil (iii) führt die Bezeichnung v_{CP} zweimal auf; der erste so bezeichnete Wert, 10.85 km s^{-1} , ist v_P . Auch die in (i) gedruckte Ungleichung ist umgekehrt; siehe Teil (i).

Wir verwenden die geometrische Strahlentheorie: Innerhalb jedes homogenen Bereichs verlaufen die Strahlen geradlinig, die Brechung folgt dem Snelliusschen Brechungsgesetz, und bei der Reflexion sind Einfallswinkel und Reflexionswinkel gleich. Beugung, Modenumwandlung und zusätzliche Reflexionen an der Erdoberfläche werden vernachlässigt.

(i)

Sei M der Mittelpunkt der Sehne EX . Das Dreieck OEM ist rechtwinklig, wobei $\angle EOM = \theta$ gilt. Daher ist

$$EM = R \sin \theta, \quad OM = R \cos \theta.$$

Die direkte Weglänge und die Laufzeit sind somit

$$EX = 2R \sin \theta, \quad t = \frac{2R \sin \theta}{v}.$$

Der dem Mittelpunkt nächstgelegene Punkt der Sehne ist M . Der Strahl verläuft also nur dann außerhalb des Kerns, wenn

$$R \cos \theta \geq R_c,$$

oder

$$\theta \leq \arccos(R_c/R).$$

Bei strenger Ungleichheit liegt der Weg vollständig im Mantel; Gleichheit entspricht dem tangentialen Grenzfall. Für größere θ schneidet die Sehne den Kern, sodass die nur für den Mantel geltende Formel den tatsächlichen Strahl nicht mehr beschreibt.

(ii)

Bezeichnen wir den Eintritts- und Austrittspunkt am Kern mit A und B . Zeichnen Sie den Weg

$$E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X,$$

wobei EA und BX im Mantel liegen und AB eine Sehne des Kerns ist. Zeichnen Sie die radialen Lote OA und OB .

Sei r der Brechungswinkel innerhalb des Kerns, gemessen zum Lot. Das Snelliussche Brechungsgesetz liefert

$$\frac{\sin i}{v_P} = \frac{\sin r}{v_{CP}},$$

also

$$r = \arcsin \left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i \right).$$

Da $v_{CP} < v_P$, gilt $r < i$: Der Strahl wird beim Eintritt in den Kern zum Lot hin gebrochen. Aufgrund der Symmetrie beträgt sein Einfallswinkel beim Austritt r , und er tritt unter dem Winkel i in den Mantel aus.

Sei $\alpha = \angle OEA$. Im Dreieck EOA beträgt der Winkel bei A gerade $\pi - i$. Der Sinussatz liefert

$$\frac{\sin \alpha}{R_c} = \frac{\sin i}{R},$$

folglich

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R_c}{R}\sin i\right), \quad \angle EOA = i - \alpha.$$

Aus dem gleichschenkligen Dreieck AOB folgt

$$\angle AOB = \pi - 2r.$$

Der insgesamt vom Strahl um O durchlaufene Zentriwinkel ist demnach

$$2\Phi = 2(i - \alpha) + \pi - 2r.$$

Daher gilt

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin\left(\frac{R_c}{R}\sin i\right) - \arcsin\left(\frac{v_{CP}}{v_P}\sin i\right).$$

Für einen durchlaufenen Zentriwinkel von höchstens π gilt $\theta = \Phi$. Tritt der Strahl knapp jenseits des Antipoden aus, so beträgt der kleinere Winkel zwischen Quelle und Beobachter $2\pi - 2\Phi$, woraus

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}$$

folgt.

Die geforderte Zeichnung sollte daher einen symmetrischen gebrochenen Strahl mit gleich langen Mantelabschnitten und einer geraden Kernsehne zeigen; an der Eintrittsgrenze sind die Winkel i und $r < i$ einzuzeichnen.

(iii)

Die dimensionslosen Verhältnisse betragen

$$a = \frac{R_c}{R} = 0.544741, \quad b = \frac{v_{CP}}{v_P} = 0.831336.$$

Somit ist

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

Durch Differenzieren mit Winkeln im Bogenmaß ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{di} = 1 - \frac{a \cos i}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} - \frac{b \cos i}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

An den Endpunkten gilt

$$\Phi'(0) = 1 - a - b = -0.376077, \quad \Phi'(\pi/2) = 1.$$

Jeder der subtrahierten Terme nimmt mit i ab, sodass Φ' zunimmt und genau eine Nullstelle besitzt. Numerisch ergibt sich

$$i_{\min} = 55.017^\circ, \quad \Phi_{\min} = \theta_{\min} = 75.577^\circ.$$

Um den zugehörigen Laufzeitgraphen zu erhalten, bestimmen wir die Länge jedes der beiden Mantelabschnitte:

$$\ell_m = \sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i.$$

Dies ergibt sich durch Projektion des äußeren und inneren Radius auf den Mantelstrahl, dessen senkrechter Abstand von O gleich $R_c \sin i$ ist.

Die Kernsehne hat die Länge

$$\ell_c = 2R_c \cos r = 2R_c \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Folglich beträgt die Laufzeit der durch den Kern laufenden P-Welle

$$T(i) = \frac{2}{v_P} \left(\sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i \right) + \frac{2R_c}{v_{CP}} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

Die folgenden Punkte legen die beiden geforderten Graphen fest:

i (Grad)	Halber durchlaufener Zentriwinkel Φ (Grad)	Physikalischer Winkel θ (Grad)	Laufzeit der durch den Kern laufenden P-Welle (min)
0	90.00	90.00	21.733
20	82.74	82.74	21.504
40	77.20	77.20	21.003
55.02	75.58	75.58	20.789
70	77.84	77.84	21.171
80	82.60	82.60	22.028
89.23	90.00	90.00	23.397
90	90.76	89.24	23.538

Die Kurve von Φ in Abhängigkeit von i beginnt bei 90° , fällt glatt bis zu ihrem Minimum und steigt dann auf 90.7568° an. Bei der Darstellung des physikalischen kleineren Winkels θ ist der letzte Abschnitt an 90° zu spiegeln: θ erreicht bei $i = 89.2322^\circ$ den Wert 90° und nimmt dann bis zum streifenden Einfall leicht auf 89.2432° ab.

Der Grenzwinkel für direkte Wellen ist

$$\theta_d = \arccos(R_c/R) = 56.993^\circ.$$

Daraus ergeben sich die folgenden physikalischen Konsequenzen:

- Für $0 \leq \theta < 56.993^\circ$ erreichen direkte P- und S-Wellen den Beobachter.
- Für $56.993^\circ < \theta < 75.577^\circ$ erreichen weder direkte noch durch den Kern laufende P-Strahlen den Beobachter. Dies ist die P-Wellen-Schattenzone.
- Für $\theta > 56.993^\circ$ gibt es keinen direkten S-Strahl, und der flüssige Kern lässt keinen S-Strahl hindurch.
- Bei $\theta = 75.577^\circ$ fallen zwei gebrochene P-Strahlwege zusammen. Da benachbarte einfallende Strahlen bei nahezu demselben Winkelabstand austreten, konzentriert sich dort die Strahlenergie: Es handelt sich um eine Kaustik.
- Im größten Teil des Bereichs $75.577^\circ < \theta < 90^\circ$ führen zwei gebrochene P-Strahlwege zu zwei getrennten Ankünften.

Verwendet man die angegebenen Zahlen exakt, ergibt sich in der Nähe des Antipoden eine kleine zusätzliche Besonderheit. Für

$$89.2432^\circ < \theta < 90^\circ,$$

erreicht ein dritter gebrochener Strahl den Beobachter, indem er über die antipodale Richtung hinausläuft. Am Antipoden haben die beiden schräg verlaufenden Äste gleiche Laufzeiten.

Zeichnen Sie für die **Laufzeitskizze** die direkten Äste

$$t_{P,\text{dir}} = 1174.19 \sin \theta \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 2019.02 \sin \theta \text{ s},$$

nur im Bereich $0 \leq \theta \leq 56.993^\circ$. Beide beginnen im Ursprung und steigen mit nach unten gerichteter Krümmung an; die S-Kurve liegt oberhalb der P-Kurve. Ihre Endpunkte sind

$$\begin{aligned} t_{P,\text{dir}}(\theta_d) &= 984.68 \text{ s} = 16.411 \text{ min}, \\ t_{S,\text{dir}}(\theta_d) &= 1693.16 \text{ s} = 28.219 \text{ min}. \end{aligned}$$

Die Hauptäste der durch den Kern laufenden P-Wellen beginnen gemeinsam bei

$$(\theta, T) = (75.577^\circ, 20.789 \text{ min})$$

und steigen in Richtung 90° an. Sie treffen sich mit einer gemeinsamen Tangente, denn durch Differenzieren erhält man

$$\frac{dT}{di} = \frac{2R_c \sin i}{v_P} \frac{d\Phi}{di}, \quad \frac{dT}{d\Phi} = \frac{2R_c \sin i}{v_P}.$$

Der Ast mit kleinerem i trifft früher ein und flacht am Antipoden ab, wo der Strahl entlang eines Durchmessers verläuft:

$$T(0) = \frac{2(R - R_c)}{v_P} + \frac{2R_c}{v_{CP}} = 21.733 \text{ min}.$$

Der andere Hauptast erreicht dort 23.397 min. Der kleine dritte Ast fällt von 23.538 min bei $\theta = 89.243^\circ$ auf 23.397 min bei 90° .

Für eine Skizze, die auch die in Teil (v) behandelten späteren reflektierten Ankünfte enthält, zeichnen Sie zusätzlich

$$t_{v,\text{ref}}(\theta) = \frac{2}{v} \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_d.$$

Diese Kurven steigen von 8.909 min für P und 15.320 min für S bei $\theta = 0$ an und treffen bei θ_d tangential auf die jeweiligen direkten Kurven.

(iv)

Für direkte P- und S-Wellen ist die Weglänge gleich, sodass die Differenz ihrer Ankunftszeiten

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right)$$

beträgt. Hier gilt

$$\Delta t = 2(60) + 11 = 131 \text{ s}.$$

Somit ergibt sich

$$\sin \theta = \frac{131}{2(6370) \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right)} = \frac{131}{844.8239} = 0.1551.$$

Also gilt

$$\theta = 8.9204^\circ, \quad \boxed{2\theta = 17.8408^\circ \approx 17.8^\circ}.$$

Da $\theta < \theta_d$, ist die Annahme eines ausschließlich durch den Mantel verlaufenden Weges konsistent.

Die einzelnen Ankunftszeiten betragen

$$t_{P,\text{dir}} = 182.07 \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 313.07 \text{ s}.$$

(v)

Die Kerngrenze kann sowohl P- als auch S-Wellenenergie reflektieren. Diese reflektierten Wellen legen längere Wege durch den Mantel zurück und treffen daher später ein.

Sei C der Reflexionspunkt an der Kerngrenze auf dem näher gelegenen radialen Strahl der Winkelhalbierenden von $\angle EOX$. Der Weg ist

$$E \longrightarrow C \longrightarrow X.$$

Aufgrund der Spiegelsymmetrie bezüglich OC sind Einfallswinkel und Reflexionswinkel gleich, und es gilt $EC = CX$. Da $\angle EOC = \theta$, liefert der Kosinussatz

$$EC^2 = R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta.$$

Somit beträgt die Länge des reflektierten Weges

$$L_{\text{ref}} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}.$$

Für $\theta = 8.9204^\circ$ gilt

$$L_{\text{ref}} = 5981.54 \text{ km}.$$

Die Ankunftszeiten der reflektierten Wellen sind folglich

$$t_{P,\text{ref}} = \frac{5981.54}{10.85} = 551.29 \text{ s},$$

$$t_{S,\text{ref}} = \frac{5981.54}{6.31} = 947.95 \text{ s}.$$

Beide liegen, wie gefordert, nach der Ankunft der direkten S-Welle bei 313.07 s.

Ihr zeitlicher Abstand beträgt

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{ref}} &= L_{\text{ref}} \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right) \\ &= 396.65 \text{ s} \\ &= 6 \text{ min } 36.65 \text{ s}. \end{aligned}$$

Auf die nächste Sekunde gerundet ergibt sich

$$\boxed{\Delta t_{\text{ref}} = 6 \text{ min } 37 \text{ s}},$$

womit die Deutung und der in Teil (iv) gefundene Winkelabstand bestätigt sind.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 3: Eigenschwingungen von durch Federn verbundenen Massen (Ring und Kette)

Drei Teilchen mit jeweils der Masse m befinden sich im Gleichgewicht und sind durch ungedehnte, masselose Federn verbunden, die jeweils die Federkonstante k gemäß dem Hooke'schen Gesetz haben. Sie können sich nur auf einer Kreisbahn bewegen, wie in Abbildung 3.1 dargestellt.

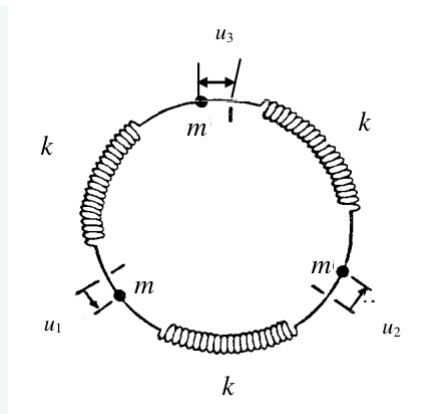


Abbildung 3.1

(i) Wenn die Massen jeweils um die kleinen Auslenkungen u_1 , u_2 bzw. u_3 aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben werden, geben Sie die Bewegungsgleichung für jede Masse an.

(ii) Zeigen Sie, dass das System harmonische Lösungen der Form

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

mit den Beschleunigungen $(-\omega^2 u_n)$ besitzt, wobei a_n ($n = 1, 2, 3$) konstante Amplituden sind und die Kreisfrequenz ω drei mögliche Werte annehmen kann:

$$\omega_o \sqrt{3}, \omega_o \sqrt{3} \text{ und } 0. \quad \text{wobei } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

(iii) Das System aus abwechselnd angeordneten Federn und Massen wird auf N Teilchen erweitert; jede Masse m ist durch Federn mit ihren benachbarten Massen verbunden. Anfangs sind die Federn ungedehnt und im Gleichgewicht. Geben Sie die Bewegungsgleichung der n -ten Masse ($n = 1, 2, \dots, N$) in Abhängigkeit von ihrer Auslenkung und den Auslenkungen der benachbarten Massen an, wenn die Teilchen aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben werden.

$$u_n(t) = a_s \sin \left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi \right) \cos \omega_s t,$$

sind Schwingungslösungen, wobei $s = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N$ und ϕ eine beliebige Phase ist, sofern die Kreisfrequenzen durch

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{s\pi}{N} \right),$$

gegeben sind, wobei a_s ($s = 1, \dots, N$) konstante, von n unabhängige Amplituden sind.

Geben Sie den Bereich der möglichen Frequenzen für eine Kette mit unendlich vielen Massen an.

(iv) Bestimmen Sie das Verhältnis

$$u_n / u_{n+1}$$

für große N in den beiden Fällen:

(a) Lösungen mit niedriger Frequenz

(b) $\omega = \omega_{\max}$, wobei $\omega_{\max}$ die maximale Frequenz einer Lösung ist.

Skizzieren Sie für die Fälle (a) und (b) typische Diagramme, in denen die Auslenkungen der Teilchen zum Zeitpunkt t gegen die Teilchennummer entlang der Kette aufgetragen sind.

(v) Wenn eine der Massen durch eine Masse $m' \ll m$ ersetzt wird, schätzen Sie ab, welche wesentliche Änderung der Kreisfrequenzverteilung zu erwarten ist.

Beschreiben Sie auf der Grundlage des vorherigen Ergebnisses qualitativ die Form des Frequenzspektrums, das Sie für eine zweiatomige Kette mit abwechselnden Massen m und m' vorhersagen würden.

Zur Erinnerung

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin A + \sin B &= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\ 2 \sin^2 A &= 1 - \cos 2A\end{aligned}$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

• (i)

$$\begin{aligned}m\ddot{u}_1 &= k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 &= k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 &= k(u_1 + u_2 - 2u_3).\end{aligned}$$

• (ii)

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad 0.$$

Zur von null verschiedenen Frequenz gehören zwei unabhängige Moden, die $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ erfüllen. Für die Nullmode gilt $a_1 = a_2 = a_3$.

• (iii)

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad u_{n+N} = u_n,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right).$$

Für eine unendliche Kette gilt

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Für die gewöhnliche Frequenz gilt $0 \leq f \leq \sqrt{k/m}/\pi$.

• (iv)

(a) $u_n/u_{n+1} \simeq +1$, abseits der Schwingungsknoten. Das Diagramm zeigt eine langsam veränderliche Sinuskurve, deren Werte an den Teilchenpositionen abgetastet werden.

(b) $u_n/u_{n+1} = -1$ am oberen Bandrand. Die Auslenkungen wechseln zwischen gleich großen positiven und negativen Werten. Dies gilt für gerade N exakt; ein Ring mit ungerader Teilchenzahl nähert sich diesem Verhalten für große N lokal an.

- **(v)** Eine einzelne leichte Masse erzeugt eine hochfrequente Mode, die auf diese Masse konzentriert ist:

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}} \gg 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Eine alternierende Kette besitzt ein akustisches und ein optisches Band, die durch eine Lücke getrennt sind. Für $m' < m$ lauten ihre exakten Grenzbereiche

$$\begin{array}{ll} \text{Akustisch:} & 0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ \text{Optisch:} & \sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}. \end{array}$$

Lösung

(i)

Alle Auslenkungen werden als Bogenlängen in derselben Umlaufrichtung entlang des Rings gemessen. In der Näherung kleiner Auslenkungen ist die Dehnung einer Feder gleich der Differenz der Auslenkungen ihrer Enden. Nach dem Hooke'schen Gesetz ergibt sich daher eine tangentielle Rückstellkraft, die proportional zu dieser Differenz ist. Die Zwangskraft besitzt keine tangentielle Komponente.

Auf Teilchen 1 üben die beiden Federn die Kräfte $k(u_2 - u_1)$ und $k(u_3 - u_1)$ aus. Das zweite Newton'sche Gesetz liefert

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1).$$

Dieselbe Überlegung ergibt für die Teilchen 2 und 3

$$\begin{array}{l} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{array}$$

(ii)

Wir setzen $u_n = a_n \cos \omega t$ ein, sodass $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$ gilt. Wir definieren

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \quad S = a_1 + a_2 + a_3.$$

Jede Gleichung wird zu

$$\lambda a_n = 3a_n - S.$$

Die Addition der drei Gleichungen ergibt

$$\lambda S = 0.$$

Es gibt zwei Möglichkeiten.

Falls $\lambda = 0$ ist, verlangen die einzelnen Gleichungen

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Alle Massen bewegen sich um dieselbe Bogenlänge, sodass keine Feder ihre Länge ändert. Somit gilt

$$\omega = 0.$$

Dies ist die Mode der starren Rotation. Streng genommen handelt es sich nicht um eine Schwingung: Ihre allgemeine Bewegung lautet $u_1 = u_2 = u_3 = A + Bt$. Die vorgegebene Kosinusform beschreibt den Fall einer statischen Auslenkung.

Falls $\lambda \neq 0$ ist, gilt $S = 0$, und eine von null verschiedene Amplitude erfordert

$$\lambda = 3.$$

Daher gilt

$$\omega = \sqrt{3} \omega_o = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Die Bedingung $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ lässt zwei unabhängige Amplituden übrig. Zwei unabhängige Schwingungsformen sind beispielsweise

$$(a_1, a_2, a_3) \propto (1, -1, 0), \quad (a_1, a_2, a_3) \propto (1, 1, -2).$$

Folglich haben die drei Eigenschwingungen die Frequenzen

$$\sqrt{3} \omega_o, \quad \sqrt{3} \omega_o, \quad 0,$$

wobei die von null verschiedene Frequenz zweimal auftritt.

(iii)

Auf Teilchen n wirken die Kräfte

$$k(u_{n+1} - u_n) \quad \text{und} \quad -k(u_n - u_{n-1}).$$

Daraus folgt

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

Der Ring erzwingt periodische Randbedingungen:

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1.$$

Wir schreiben

$$q = \frac{2\pi s}{N}, \quad u_n = a_s \sin(nq + \phi) \cos \omega_s t.$$

Dieser Ausdruck ist periodisch, da $Nq = 2\pi s$ gilt. Mit dem angegebenen Additionstheorem erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= a_s [\sin(nq + \phi + q) + \sin(nq + \phi - q)] \cos \omega_s t \\ &= 2 \cos q u_n. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung wird daher zu

$$-m\omega_s^2 u_n = 2k(\cos q - 1)u_n = -4k \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)u_n.$$

Für eine nichttriviale Mode gilt

$$\omega_s^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi s}{N}\right).$$

Da $\sin(\pi s/N) \geq 0$ im angegebenen Bereich $s = 1, \dots, N$ gilt, folgt

$$\omega_s = 2\omega_o \sin\left(\frac{\pi s}{N}\right).$$

Im Grenzfall einer unendlichen Kette werden die zulässigen Wellenzahlen kontinuierlich. Der Sinusfaktor nimmt jeden Wert zwischen null und eins an, sodass

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_o = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Der Endpunkt null entspricht einer starren Verschiebung; für echte Schwingungen gilt $\omega > 0$. Wegen $f = \omega/(2\pi)$ gilt

$$0 \leq f \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Werden für k und m SI-Werte eingesetzt, so ergeben sich Kreisfrequenzen in rad s^{-1} und gewöhnliche Frequenzen in Hz.

(iv)

Zu Zeiten und an Orten, an denen der Nenner nicht null ist, kürzt sich der gemeinsame Zeitfaktor heraus:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin(nq + \phi)}{\sin(nq + \phi + q)}.$$

Derselbe Ausdruck gilt unmittelbar für das Verhältnis der Modenamplituden.

(a) Niedrige Frequenz

Wir wählen den Repräsentanten von q nahe null. Dann gilt

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin \frac{q}{2} \right| \simeq \omega_o |q|,$$

eine niedrige Frequenz bedeutet also $|q| \ll 1$. Mit $\theta = nq + \phi$ erhalten wir

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{\cos q + \cot \theta \sin q} \simeq 1 - q \cot \theta.$$

Somit gilt abseits der Knoten

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq +1.$$

Benachbarte Massen haben nahezu gleiche Auslenkungen und bewegen sich annähernd gleichphasig. In der Nähe eines Knotens sind die Auslenkungen selbst klein, sodass ihr Verhältnis nicht nahe eins liegen muss.

Für die verlangte Skizze zeichnet man eine Sinuskurve mit der in Teilchenabständen gemessenen Wellenlänge $L \gg 1$ und markiert ihre Werte bei ganzzahligen Teilchennummern. Ein repräsentatives Profil ist

$$u_n = C(t) \sin\left(\frac{2\pi(n - n_0)}{L}\right).$$

Seine charakteristischen Werte sind:

$n - n_0$	0	$L/4$	$L/2$	$3L/4$	L
$u_n/C(t)$	0	+1	0	-1	0

Zwischen aufeinanderfolgenden Knoten liegen viele Teilchen, und benachbarte Punkte haben meist sehr ähnliche Höhen.

(b) Maximale Frequenz

Am oberen Bandrand gilt $q = \pi$, woraus folgt

$$\omega_{\max} = 2\omega_o.$$

Die Auslenkung lautet

$$u_n = a_s \sin(n\pi + \phi) \cos \omega_{\max} t = (-1)^n a_s \sin \phi \cos \omega_{\max} t.$$

Folglich gilt

$$u_{n+1} = -u_n, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1.$$

Jedes Paar benachbarter Massen bewegt sich mit gleichen Amplituden in entgegengesetzte Richtungen.

Die Skizze besteht aus Punkten, die abwechselnd bei $+C(t)$ und $-C(t)$ liegen:

$n - n_0$	0	1	2	3	4
$u_n/C(t)$	+1	-1	+1	-1	+1

Die räumliche Periode beträgt zwei Teilchenabstände. Verbindet man benachbarte Punkte zur Veranschaulichung, entsteht eine Zickzacklinie.

Dieses Muster passt exakt auf einen Ring mit gerader Teilchenzahl. Für ungerade, endliche N ist die größte zulässige Wellenzahl $\pi \pm \pi/N$, und es gilt

$$\omega_{\max} = 2\omega_o \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

Das Auslenkungsmuster wechselt im Vorzeichen und besitzt eine langsam veränderliche Einhüllende. Für große N ist das Verhältnis benachbarter Auslenkungen abseits der Knoten der Einhüllenden näherungsweise -1 .

(v)

Zunächst ersetzen wir nur eine Masse durch $m' \ll m$. Eine schnelle Schwingung dieser leichten Masse bewirkt eine vergleichsweise geringe Bewegung ihrer schweren Nachbarn. In führender Näherung betrachten wir diese Nachbarn als festgehalten.

Eine Auslenkung der leichten Masse um x erzeugt durch jede Feder eine Rückstellkraft $-kx$. Daher gilt

$$m'\ddot{x} \simeq -2kx,$$

woraus folgt

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

Im Verhältnis zum ursprünglichen oberen Bandrand gilt

$$\frac{\omega_{\text{defect}}}{2\omega_o} \simeq \sqrt{\frac{m}{2m'}} \gg 1.$$

Die Näherung ist selbstkonsistent. Für eine benachbarte schwere Masse mit der Amplitude u_1 lautet die führende Bilanz bei hoher Frequenz

$$-m\omega_{\text{defect}}^2 u_1 \simeq kx,$$

sodass

$$\frac{u_1}{x} \simeq -\frac{m'}{2m}.$$

Ihre Bewegung ist klein und derjenigen der leichten Masse entgegengerichtet. Weiter entfernt ist die Bewegung noch kleiner: Die hochfrequente Mode ist um die Fehlstelle herum lokalisiert.

Somit verschiebt sich eine Mode weit über das ursprüngliche Frequenzband hinaus. Die anderen Frequenzen werden gestört, bleiben aber von der Größenordnung $\sqrt{k/m}$; in einer unendlichen Kette bleibt das Band der ausgedehnten Moden bei $0 \leq \omega \leq 2\omega_o$. Auch die Mode der starren Verschiebung mit der Frequenz null bleibt erhalten.

Bei einer **alternierenden Kette** erzeugen die wiederholt auftretenden leichten Massen ein ganzes hochfrequentes Band. Das Spektrum teilt sich auf in:

- Ein **akustisches Band**, das niederfrequente kollektive Bewegungen umfasst. Bei großen Wellenlängen bewegen sich benachbarte schwere und leichte Massen annähernd gemeinsam.
- Ein **optisches Band**, in dem die leichten Massen schnell schwingen, während die Bewegung der schweren Massen wesentlich kleiner ist. Bei großen Wellenlängen bewegen sich die beiden Massentypen in entgegengesetzte Richtungen.

Die Bandränder lassen sich direkt herleiten. Sei x_j die Auslenkung der schweren Masse j und y_j diejenige der leichten Masse zwischen x_j und x_{j+1} . Dann gilt

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= k(y_{j-1} + y_j - 2x_j), \\ m'\ddot{y}_j &= k(x_j + x_{j+1} - 2y_j). \end{aligned}$$

Für eine Mode mit der Phasenänderung Q pro Zweiteilchenzelle verwenden wir den Ansatz

$$\begin{aligned} x_j &= X \cos(jQ + \phi) \cos \omega t, \\ y_j &= Y \cos\left((j + \frac{1}{2})Q + \phi\right) \cos \omega t. \end{aligned}$$

Die Amplitudengleichungen lauten

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)X &= 2k \cos(Q/2)Y, \\ (2k - m'\omega^2)Y &= 2k \cos(Q/2)X. \end{aligned}$$

Eine von null verschiedene Lösung erfordert

$$(2k - m\omega^2)(2k - m'\omega^2) = 4k^2 \cos^2(Q/2),$$

oder

$$mm'\omega^4 - 2k(m + m')\omega^2 + 4k^2 \sin^2(Q/2) = 0.$$

Die beiden Lösungen sind

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)^2 - \frac{4}{mm'} \sin^2(Q/2)}.$$

Wenn $|Q|$ von 0 auf π zunimmt, wächst die untere Lösung, während die obere abnimmt. Für $m' < m$ lauten ihre Bereiche daher

$$0 \leq \omega_- \leq \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

und

$$\sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega_+ \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}.$$

Es gibt keine Moden in der Lücke

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

Für $m' \ll m$ ist das optische Band im Verhältnis zu seiner hohen Frequenz von näherungsweise $\sqrt{2k/m'}$ schmal und vom akustischen Band weit getrennt. Eine endliche periodische Kette besitzt innerhalb dieser Bänder diskrete Frequenzen; im Grenzfall einer unendlichen Kette werden sie kontinuierlich.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.