

المسألة 1: شقّان ومحزوز حيود: الجمع المتجهي للسعات

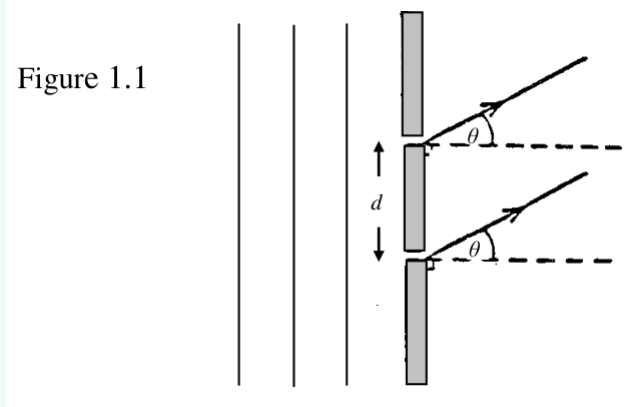


Figure 1.1

الشكل 1.1

تسقط موجة ضوئية مستوية أحادية اللون، طولها الموجي λ وترددها f ، سقوطاً عمودياً على شقّين ضيقين متماثلين، تفصل بينهما مسافة d ، كما هو موضح في الشكل 1.1. وتُعطى الموجة الضوئية الخارجة من كل شق، على مسافة x في اتجاه θ عند الزمن t ، بالعلاقة

$$y = a \cos[2\pi(ft - x/\lambda)]$$

حيث السعة a متساوية للموجتين. (افترض أن x أكبر بكثير من d).

(i) بيّن أن الموجتين المرصودتين عند زاوية θ مع العمود على الشقّين لهما سعة محصلة A يمكن الحصول عليها بجمع متجهين، مقدار كل منهما a ، ولكل منهما اتجاه يحدده طور الموجة الضوئية.

تحقق هندسياً، باستخدام مخطط المتجهات، من أن

$$A = 2a \cos \theta$$

حيث

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

(ii) يُستبدل بالشقّين محزوز حيود يحتوي على N شقوق متساوية التباعد، تفصل بين كل شقّين متجاورين مسافة d . استخدم الطريقة المتجهية لجمع السعات لتبيّن أن متجهات السعة، ومقدار كل منها a ، تشكّل جزءاً من مضلع منتظم تقع رؤوسه على دائرة نصف قطرها R يُعطى بالعلاقة

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta},$$

استنتج أن السعة المحصلة هي

$$\frac{a \sin N\beta}{\sin \beta}$$

وأوجد فرق طور المحصلة بالنسبة إلى طور الضوء الصادر من الشق الواقع عند حافة المحزوز.

(iii) ارسم تخطيطياً، في الرسم البياني نفسه، $\sin N\beta$ و $(1/\sin \beta)$ بدلالة β . وبين في رسم بياني منفصل كيف تتغير شدة الموجة المحصلة بدلالة β .

(iv) حدّد شدات القيم العظمى الرئيسية للشدة.

(v) بين أن عدد القيم العظمى الرئيسية لا يمكن أن يتجاوز

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1\right)$$

(vi) بين أن طولين موجيين λ و $\lambda + \delta\lambda$ ، حيث $\delta\lambda \ll \lambda$ ، ينتجان قيمًا عظمى رئيسية يُعطى الفصل الزاوي بينها بالعلاقة

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad \text{إلخ. } n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

احسب هذا الفصل الزاوي لخطّي الصوديوم D اللذين تكون لهما

$$\lambda = 589.0 \text{ nm}, \quad \lambda + \Delta\lambda = 589.6 \text{ nm}, \quad n = 2, \quad \text{و } d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}.$$

$$\left[\text{تذكير: } \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لتكن I_1 شدة الضوء الصادر من شق واحد فقط، ولتكن

$$\beta = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}.$$

يُرمز إلى معامل السعة ذي الإشارة بالرمز A_s ؛ وقيمتها المطلقة هي السعة الفيزيائية.

• (i) فرق الطور هو 2β ، ومنه

$$A_s = 2a \cos \beta, \quad A = 2a |\cos \beta|.$$

ينبغي أن تكون $\cos \theta$ الواردة في النص المطبوع $\cos \beta$.

• (ii)

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta} \quad (0 < \beta < \pi), \quad A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

بوجه عام، $R = a/(2|\sin \beta|)$. إذا كانت أطوار الشقوق تتزايد بمقدار 2β ، فإن طور المحصلة بالنسبة إلى شق الحافة الأول هو $(N-1)\beta$ عند استخدام المعامل ذي الإشارة أعلاه. ويؤدي استخدام سعة موجبة إلى إضافة π حيثما يكون ذلك المعامل سالباً. وعند $\beta = m\pi$ ، تكون السعة الفيزيائية Na .

• (iii) سعة $\sin N\beta$ هي 1 ودورها $2\pi/N$ ؛ والدالة $1/\sin \beta$ خطوط تقارب رأسية عند $\beta = m\pi$. وتكون الشدة

$$I(\beta) = I_1 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

وهي دالة زوجية دورها π ، ولها قمم رئيسية عند $m\pi$. وبين كل قمتين رئيسيتين متتاليتين يوجد $N-1$ صفراً و $N-2$ قيمة عظمى ثانوية.

• (iv)

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1, \quad d \sin \theta = n\lambda.$$

• (v) باحتساب الرتب المماسية بوصفها اتجاهات حدية،

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1 \leq \frac{2d}{\lambda} + 1.$$

• (vi) إلى الرتبة الأولى،

$$\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}.$$

الفصل الزاوي هو مقدار هذه الإزاحة ذات الإشارة. ولخطّي الصوديوم المحددين في الرتبة الثانية،

$$\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ.$$

الحل

(i)

يؤدي السقوط العمودي إلى تساوي طور الموجة الساقطة عند الشقين. والموجتان الخارجتان مترابطتان، لذا تُجمع إزاحتهما اللحظيتان.

في المجال البعيد، تكون الأشعة الواصلة إلى نقطة الرصد متوازية عملياً. ولذلك يكون الفرق بين طولي المسارين

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

وبالتالي، يكون مقدار فرق الطور

$$\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} = 2\beta.$$

اختر الشق المرجعي بحيث تتقدم الموجة الأخرى في الطور بمقدار 2β . ويكتابة الطور المرجعي على الصورة ψ ، تكون الموجتان

$$y_0 = a \cos \psi, \quad y_1 = a \cos(\psi + 2\beta).$$

تعطي المتطابقة المعطاة

$$y_0 + y_1 = 2a \cos \beta \cos(\psi + \beta).$$

لتفسير ذلك هندسياً، مثل كل موجة بمتجه طوله a ، يساوي اتجاهه طورها. ويكون مسقطه على محور ثابت هو الإزاحة اللحظية للموجة. يدور كلا المتجهين بسرعة زاوية $2\pi f$ ، مع الحفاظ على الفصل الزاوي بينهما 2β . ولأن المساقط تُجمع، فإن مجموعهما المتجهي يمثل الموجة المحصلة.

لرسم مخطط المتجهات، ارسم السهمين من مبدأ مشترك، بحيث يصنعان الزاويتين β و $+\beta$ مع منصف زاوية الطور بينهما. تتلاشى مركبتاهما العموديتان على هذا المنصف، وتُجمع مركبتاهما على امتداده:

$$A_s = a \cos \beta + a \cos \beta = 2a \cos \beta.$$

إن

$$A = 2a |\cos \beta|.$$

ولا يمثل المعامل ذو الإشارة السالبة إلا انعكاس اتجاه المتجه المحصل، أو طورًا إضافيًا مقداره π .

لذلك يجب استبدال θ في صيغة السعة المطبوعة بالرمز β .

(ii)

طبق تقريب المجال البعيد نفسه على المحزوز كله، مع إهمال تغير السعة وتقوس جبهة الموجة عبره. رَقِّم الشقوق بدءًا من إحدى الحافتين بحيث تكون أطوارها

$$\psi, \psi + 2\beta, \dots, \psi + 2(N-1)\beta.$$

ارسم متجهات السعة البالغ عددها N بحيث يبدأ ذيل كل متجه عند رأس سابقه. طول كل متجه a ، ويدور كل منها بالزاوية نفسها 2β بالنسبة إلى سابقه. ولذلك تشكّل نقاط نهاياتها سلسلة مضلعة ذات أوتار متساوية على دائرة.

في المخطط، سمّ نقاط النهايات المتتابة $P_0, P_1, \dots, P_N$ ، ومركز الدائرة O . طول كل ضلع $P_j P_{j+1}$ هو a ، ويقابل زاوية مركزية موجهة 2β . ويعطي تصنيف المثلث المتساوي الساقين الموافق، عندما $0 < \beta < \pi$ ،

$$\frac{a}{2} = R \sin \beta.$$

ومن ثم

$$R = \frac{a}{2 \sin \beta}.$$

لأي قيمة لـ β ، يكون نصف القطر الموجب $a/(2|\sin \beta|)$. وليس من الضروري أن تنغلق السلسلة بعد المتجهات البالغ عددها N . يمتد المتجه المحصل مباشرة من P_0 إلى P_N . وتفصل بين نقطتي النهاية هاتين زاوية مركزية موجهة كلية $2N\beta$ ، لذا يكون طوله

$$A_N = 2R|\sin N\beta| = a \left| \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right|.$$

إنّ العامل ذو الإشارة المطلوب هو

$$A_s = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

يُستنتج الطور من اتجاهات الأوتار. فنصف القطر المار بمنتصف الوتر الصغير الأول يقع عند الموضع الزاوي β ، بينما يقع نصف القطر المار بمنتصف الوتر المحصل عند $N\beta$. وكل وتر عمودي على نصف القطر المار بمنتصفه، لذا يكون الفرق الزاوي بينهما

$$N\beta - \beta = (N - 1)\beta,$$

مع احتمال انعكاس اتجاه المحصلة.

وبصورة مكافئة، تكون الموجة المحصلة الكاملة

$$y_{\text{tot}} = a \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \cos[\psi + (N - 1)\beta].$$

وعليه، وفق اصطلاح الحافة المختار، يكون الطور بالنسبة إلى شق تلك الحافة $(N - 1)\beta$ عند الإبقاء على العامل ذي الإشارة. أما عند استخدام سعة غير سالبة، فيكون

$$\phi = \begin{cases} (N - 1)\beta, & \sin N\beta / \sin \beta > 0, \\ (N - 1)\beta + \pi, & \sin N\beta / \sin \beta < 0, \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi).$$

يؤدي اتخاذ الحافة المقابلة مرجعاً إلى عكس إشارة الطور النسبي بتريديد 2π . وعندما تكون المحصلة صفراً، يكون الطور غير معرّف.

عندما $\beta = m\pi$ ، تختلف أطوار الشقوق المتجاورة بمقدار $2m\pi$. وتشير جميع المتجهات في الاتجاه نفسه، مما يعطي $A_N = Na$ وطوراً نسبياً صفرية بتريديد 2π . وعندئذ يؤول نصف قطر الدائرة في الإنشاء الهندسي إلى اللانهاية.

(iii)

تتناسب الشدة المتوسطة زمنياً مع مربع السعة الفيزيائية. ولأن سعة الشق الواحد هي a ، فإن

$$\frac{I}{I_1} = \frac{A_N^2}{a^2},$$

ومن ثم

$$\frac{I(\beta)}{I_1} = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2.$$

في الرسم البياني الأول، استخدم محوراً أفقياً مشتركاً لـ β ومحوراً رأسياً مشتركاً لقيمة الدالة:

- تتذبذب $\sin N\beta$ بين -1 و $+1$ ، بدور $2\pi/N$. وتقع أصفارها عند $\beta = k\pi/N$ ، وتحدث قيمها القصوى عند $\beta = (2k+1)\pi/(2N)$ ، وتساوي $(-1)^k$.
- للدالة $1/\sin \beta$ دور 2π ، وليس لها أصفار، ولها خطوط تقارب رأسية عند $\beta = m\pi$. وبين 0 و π ، تنخفض من $+\infty$ إلى قيمتها الصغرى 1 عند $\pi/2$ ، ثم ترتفع إلى $+\infty$. أما الفرع التالي، بين π و 2π ، فهو سالب، ويبلغ -1 عند $3\pi/2$ ، ويؤول إلى $-\infty$ عند كلا الطرفين. وتكرر هذه الفروع.

على الرغم من أن مقلوب الجيب يتباعد عند $m\pi$ ، فإن حاصل ضربه في $\sin N\beta$ له مقدار حدّي منتهٍ يساوي N .
في الرسم البياني للشدة، ارسم I/I_1 . وخصائصه الرئيسية هي:

الموضع	I/I_1
$\beta = m\pi$	N^2
$\beta = m\pi + r\pi/N, \quad r = 1, \dots, N-1$	0
$\beta = m\pi + \pi/2$ زوجي	0
$\beta = m\pi + \pi/2$ فردي	1

المنحنى غير سالب، وزوجي، ودوري بدور π . وتتناظر كل قمة رئيسية حول $\beta = m\pi$. وأقرب أصفارها هي

$$\beta = m\pi \pm \frac{\pi}{N},$$

لذا يكون عرضها بين هذين الصفرين $2\pi/N$.

بين كل قمتين رئيسيتين متجاورتين يوجد $N-1$ صفراً، وبين الأصفار المتتالية توجد $N-2$ قمة ثانوية أصغر. وتحقق مواضعها الدقيقة

$$N \cot(N\beta) = \cot \beta,$$

وهي علاقة نحصل عليها باشتقاق الشدة بعيداً عن أصفارها. وبعيداً عن خطوط التقارب، يقع المنحنى أسفل الغلاف

$$I = \frac{I_1}{\sin^2 \beta}.$$

(iv)

أكبر طول ممكن لحصلة N متجهاً طول كل منها a هو Na . ويحدث ذلك عندما تشير جميع المتجهات في الاتجاه نفسه:

$$2\beta = 2n\pi.$$

لذلك تحقق القيم العظمى الرئيسية

$$\beta = n\pi \iff d \sin \theta = n\lambda.$$

في هذه الاتجاهات،

$$A_N = Na,$$

ومن ثم

$$I_{\text{principal}} = N^2 I_1.$$

وفق نموذج السعات المتساوية المذكور، تكون لجميع القيم العظمى الرئيسية هذه الشدة.

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها بأخذ النهاية:

$$\lim_{\beta \rightarrow n\pi} \frac{\sin N\beta}{\sin \beta} = N(-1)^{n(N-1)},$$

التي يساوي مربعها N^2 .

(v)

تتطلب القيمة العظمى الرئيسية من الرتبة n أن يكون

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}.$$

ولأن $|\sin \theta| \leq 1$ ، فإن

$$|n| \leq \frac{d}{\lambda}.$$

لذلك تمتد الرتب الصحيحة المسموح بها من

$$-\left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor \text{ إلى } \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor.$$

وباحتساب الرتبة الصفرية نحصل على

$$M = 2 \left\lfloor \frac{d}{\lambda} \right\rfloor + 1.$$

ولأن $|u| \leq u$ ، فإن

$$\boxed{M \leq \frac{2d}{\lambda} + 1}.$$

يشمل هذا العد أي رتب تقع تماماً عند السقوط المماسي، $\theta = \pm 90^\circ$ ، بوصفها اتجاهات حدية. ولا يمكن لاستبعاد هذه الاتجاهات إلا أن يقلل العدد.

(vi)

لننظر في القيم العظمى الرئيسية ذات الرتبة نفسها n للطولين الموجيين. وبكتابة $\Delta\lambda = \delta\lambda$ ، تكون معادلتا المحزوز لهما

$$d \sin \theta = n\lambda,$$

$$d \sin(\theta + \Delta\theta) = n(\lambda + \Delta\lambda).$$

لإزاحة زاوية صغيرة، مقيسة بالراديان،

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \simeq \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta.$$

ب طرح معادلة المحزوز الأولى من الثانية نحصل على

$$d \cos \theta \Delta\theta \simeq n\Delta\lambda,$$

ومن ثم

$$\boxed{\Delta\theta \simeq \frac{n\Delta\lambda}{d \cos \theta}}.$$

هذه نتيجة من الرتبة الأولى للقيم العظمى الموجودة وغير المماسية. وعندما تكون n سالبة، تكون الإزاحة ذات الإشارة سالبة؛ والفصل الزاوي هو قيمتها المطلقة. وتتطابق القيم العظمى من الرتبة الصفرية.

بالنسبة إلى خطّي الصوديوم،

$$\Delta\lambda = (589.6 - 589.0) \text{ nm} = 0.6 \times 10^{-9} \text{ m}.$$

عند $\lambda = 589.0 \text{ nm}$ في الرتبة الثانية،

$$\sin \theta = \frac{2(589.0 \times 10^{-9})}{1.2 \times 10^{-6}} = 0.9816667,$$

ومن ثم

$$\theta \simeq 79.01^\circ, \quad \cos \theta \simeq 0.19061.$$

وعليه،

$$\Delta\theta \simeq \frac{2(0.6 \times 10^{-9})}{(1.2 \times 10^{-6})(0.19061)} = 5.246 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

وبدقة مناسبة،

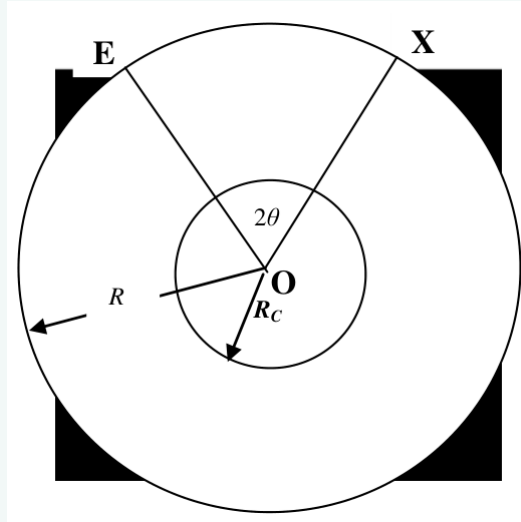
$$\boxed{\Delta\theta \simeq 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0.30^\circ}.$$

للتحقق عددياً، يعطي طرح الزاويتين المحسوبتين من معادلة المحزوز دون توسيع $5.32 \times 10^{-3} \text{ rad}$ ، وهي قيمة أعلى بنحو 1.4% من تقدير الرتبة الأولى.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: الموجات الزلزالية ولب الأرض السائل

2. في أوائل هذا القرن، اقترح نموذج للأرض يُفترض فيه أنها كرة نصف قطرها R ، تتكون من وشاح صلب متجانس ومتساوي الخواص يمتد إلى الداخل حتى نصف القطر R_c . وكانت منطقة اللب الواقعة داخل نصف القطر R_c تحتوي على سائل.



الشكل 2.1

سرعتا الموجات الزلزالية الطولية والمستعرضة، أي الموجات P والموجات S على الترتيب، ثابتتان داخل الوشاح، وتساويان V_P و V_S . أما في اللب، فللموجات الطولية سرعة ثابتة $V_{CP} < V_P$ ، ولا تنتشر فيه الموجات المستعرضة.

يُولد زلزال عند النقطة E على سطح الأرض موجات زلزالية تنتقل عبر الأرض ويرصدها راصد على السطح يستطيع وضع مقياس الزلازل الخاص به عند أي نقطة X على سطح الأرض. ويُعطى الفصل الزاوي بين E و X، وهو 2θ ، بالعلاقة

$$2\theta = \text{الزاوية } EOX$$

حيث O مركز الأرض.

(i) بين أن الموجات الزلزالية التي تنتقل عبر الوشاح في خط مستقيم تصل إلى X عند زمن t (زمن الانتقال بعد وقوع الزلزال)، يُعطى بالعلاقة

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad \text{عندما } \theta > \arccos \left[\frac{R_c}{R} \right],$$

حيث $v = v_P$ للموجات P و $v = v_S$ للموجات S.

(ii) عند بعض مواضع X ، تصل الموجات الزلزالية P إلى الراصد بعد انكسارين عند السطح الفاصل بين الوشاح واللب. ارسم مسار موجة زلزالية P من هذا النوع. أوجد، للموجات P ، علاقة بين θ و i ، حيث i زاوية سقوط الموجة الزلزالية P على السطح الفاصل بين الوشاح واللب.

(iii) باستخدام البيانات

6370 km	=	R
3470 km	=	R_C
10.85 km s^{-1}	=	v_{CP}
6.31 km s^{-1}	=	v_S
9.02 km s^{-1}	=	v_{CP}

والنتيجة التي حصلت عليها في (ii)، ارسم منحنى θ بدلالة i . علّق على الآثار الفيزيائية المترتبة على شكل هذا المنحنى بالنسبة إلى الراصدين الموجودين عند نقاط مختلفة على سطح الأرض. ارسم رسماً تخطيطياً لتغيّر زمن انتقال الموجات P والموجات S بدلالة θ في المجال $0 \leq \theta \leq 90$ درجة.

(iv) بعد زلزال، قاس راصد التأخر الزمني لوصول الموجة S التي تتبع الموجة P ، فوجده دقيقتين و11 ثانية. استنتج الفصل الزاوي بين موقع الزلزال والراصد باستخدام البيانات الواردة في القسم (iii).

(v) لاحظ الراصد في القياس السابق أنه بعد مدة من وصول الموجتين P و S ، ظهر تسجيلان آخران على مقياس الزلازل يفصل بينهما فاصل زمني مقداره 6 دقائق و37 ثانية. فسّر هذه النتيجة وتحقّق من أنها ترتبط بالفعل بالفصل الزاوي الذي حدّد في القسم السابق.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (i) زمن انتقال الموجة المباشرة هو

$$t = \frac{2R \sin \theta}{v}, \quad 0 \leq \theta \leq \arccos(R_c/R).$$

تصف حالة المساواة الشعاع المماس في الحالة الحدية. أما المتباينة المطبوعة فاتجاهها معكوس.

• (ii) ضع $a = R_c/R$ ، $b = v_{CP}/v_P$. يتبع الشعاع ثلاثة مقاطع مستقيمة، وينكسر مقترباً من العمود المقام عند دخوله اللب ومبتعداً عنه عند خروجه منه. ويُعطى نصف الزاوية التي يجتاها بالعلاقة

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

عادةً تكون $\theta = \Phi$ ؛ وعند السماح بالأشعة التي تخرج بعد تجاوز النقطة المقابلة قطرياً، يُعطى الفصل الزاوي الأصغر بالعلاقة

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

- (iii) تنتهي الأشعة المباشرة P و S عند $\theta = 56.99^\circ$. وتظهر الأشعة P النافذة عبر اللب لأول مرة عند

$$\theta_{\min} = 75.58^\circ, \quad i_{\min} = 55.02^\circ.$$

ومن ثم فإن منطقة ظل الموجات P تقع تقريباً ضمن المجال

$$113.99^\circ < 2\theta < 151.15^\circ,$$

بينما لا تصل الموجات S، سواء مباشرةً أو بالنفاذ عبر اللب، عندما يكون $2\theta > 113.99^\circ$. ويلتقي فرعاً زمن انتقال الموجات P المنكسرة عند 20.789 min؛ وزمناً وصولها إلى النقطة المقابلة قطرياً هما 21.733 و 23.397 min. وترد الأوصاف الكاملة للمنحنيات أدناه.

- (iv) الفصل الزاوي بين موقع الزلزال والراصد هو

$$2\theta \approx 17.8^\circ.$$

- (v) الإشارتان اللاحقتان هما موجتان P و S انعكستا عند حد اللب. وزمناً وصولهما المحسوبان هما 551.3 s و 947.9 s بعد الزلزال، مما يعطي

$$\Delta t_{\text{ref}} = 396.65 \text{ s} \approx 6 \text{ min } 37 \text{ s}.$$

الحل

نعتمد القراءة المتسقة فيزيائياً للبيانات العددية:

$$v_P = 10.85 \text{ km s}^{-1}, \quad v_S = 6.31 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{CP} = 9.02 \text{ km s}^{-1}.$$

في جدول البيانات في الجزء (iii) طُبع الرمز v_{CP} مرتين؛ والقيمة الأولى منهما، 10.85 km s^{-1} ، هي v_P . كما أن المتباينة المطبوعة في الجزء (i) معكوسة الاتجاه؛ انظر الجزء (i).

نستخدم نظرية الأشعة الهندسية: تكون الأشعة مستقيمة داخل كل منطقة متجانسة، ويخضع الانكسار لقانون سنيل، ويخضع الانعكاس لتساوي زاويتي السقوط والانعكاس. ونهمل الحيود، والتحول بين أنماط الموجات، والانعكاسات الإضافية عند سطح الأرض.

(i)

لتكن M منتصف الوتر EX . المثلث OEM قائم الزاوية، وفيه $\angle EOM = \theta$. ومن ثم

$$EM = R \sin \theta, \quad OM = R \cos \theta.$$

وعليه، فإن طول المسار المباشر وزمن الانتقال هما

$$EX = 2R \sin \theta, \quad t = \frac{2R \sin \theta}{v}.$$

أقرب نقطة على الوتر إلى المركز هي M . لذلك لا يتجنب الشعاع اللب إلا إذا كان

$$R \cos \theta \geq R_c,$$

أي

$$\theta \leq \arccos(R_c/R).$$

تعطي المتباينة الصارمة مساراً يقع بأكمله داخل الوشاح؛ أما المساواة فتمثل حالة التماس الحدية. وللقيم الأكبر من θ ، يقطع الوتر اللب، ومن ثم لا تعود الصيغة الخاصة بالمسار المحصور في الوشاح تصف الشعاع الفعلي.

(ii)

لنرمز إلى نقطتي دخول اللب والخروج منه بـ A و B . ارسم المسار

$$E \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow X,$$

بحيث يقع EA و BX في الوشاح ويكون AB وترّاً في اللب. ارسم العمودين المقامين الشعاعيين OA و OB .

لتكن r زاوية الانكسار داخل اللب، مقيسةً من العمود المقام. يعطي قانون سنيل

$$\frac{\sin i}{v_P} = \frac{\sin r}{v_{CP}},$$

ومن ثم

$$r = \arcsin\left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i\right).$$

بما أن $v_{CP} < v_P$ ، فإن $r < i$: ينحرف الشعاع نحو العمود المقام عند دخوله اللب. وبفعل التناظر، تكون زاوية سقوطه عند الخروج r ، ويخرج إلى الوشاح بزاوية i .

لتكن $\alpha = \angle OEA$. في المثلث EOA ، تكون الزاوية عند A مساويةً لـ $\pi - i$. ويعطي قانون الجيوب

$$\frac{\sin \alpha}{R_c} = \frac{\sin i}{R},$$

وعليه

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R_c}{R} \sin i\right), \quad \angle EOA = i - \alpha.$$

ومن المثلث المتساوي الساقين AOB نحصل على

$$\angle AOB = \pi - 2r.$$

وبالتالي فإن الزاوية الكلية التي يجتاها الشعاع حول O هي

$$2\Phi = 2(i - \alpha) + \pi - 2r.$$

إذن

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin\left(\frac{R_c}{R} \sin i\right) - \arcsin\left(\frac{v_{CP}}{v_P} \sin i\right).$$

إذا كانت الزاوية المجتازة لا تتجاوز π ، فإن $\theta = \Phi$. أما إذا خرج الشعاع بعد تجاوز النقطة المقابلة قطرياً بقليل، فإن الزاوية الأصغر بين المصدر والراصد تكون $2\Phi - 2\pi$ ، مما يعطي

$$\theta = \min\{\Phi, \pi - \Phi\}.$$

لذلك ينبغي أن يُظهر الرسم المطلوب شعاعاً منكسراً متناظراً، ذا مقطعين متساويين في الوشاح ووتر مستقيم في اللب، مع بيان الزاويتين i و $r < i$ عند حد الدخول.

(iii)

النسبتان عديمتا الأبعاد هما

$$a = \frac{R_c}{R} = 0.544741, \quad b = \frac{v_{CP}}{v_P} = 0.831336.$$

ومن ثم

$$\Phi(i) = \frac{\pi}{2} + i - \arcsin(a \sin i) - \arcsin(b \sin i).$$

بالتفاضل، مع قياس الزوايا بالراديان،

$$\frac{d\Phi}{di} = 1 - \frac{a \cos i}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 i}} - \frac{b \cos i}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}}.$$

وعند طرفي المجال،

$$\Phi'(0) = 1 - a - b = -0.376077, \quad \Phi'(\pi/2) = 1.$$

يتناقص كل حد من الحدين المطروحين مع i ، ولذلك تزداد Φ' وتنعدم مرة واحدة بالضبط. وعددياً،

$$i_{\min} = 55.017^\circ, \quad \Phi_{\min} = \theta_{\min} = 75.577^\circ.$$

للحصول على منحنى زمن الانتقال الموافق، فإن طول كل مقطع من مقطعي المسار في الوشاح هو

$$\ell_m = \sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i.$$

تنتج هذه العلاقة من إسقاط نصف القطر الخارجي والداخلي على الشعاع في الوشاح، الذي يبعد عمودياً عن O مسافة $R_c \sin i$. أما وتر اللب فطوله

$$\ell_c = 2R_c \cos r = 2R_c \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

وبالتالي، فإن زمن انتقال الموجة P النافذة عبر اللب هو

$$T(i) = \frac{2}{v_P} \left(\sqrt{R^2 - R_c^2 \sin^2 i} - R_c \cos i \right) + \frac{2R_c}{v_{CP}} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}.$$

تحدد النقاط التالية كلا المنحنيين المطلوبين:

i (بالدرجات)	نصف الزاوية المجتازة Φ (بالدرجات)	الزاوية الفيزيائية θ (بالدرجات)	زمن انتقال الموجة P النافذة عبر اللب (بالدقائق)
0	90.00	90.00	21.733
20	82.74	82.74	21.504
40	77.20	77.20	21.003
55.02	75.58	75.58	20.789
70	77.84	77.84	21.171
80	82.60	82.60	22.028
89.23	90.00	90.00	23.397
90	90.76	89.24	23.538

يبدأ منحنى Φ بدلالة i عند 90° ، وينخفض بسلاسة إلى قيمته الصغرى، ثم يرتفع إلى 90.7568° . وعند رسم الزاوية الفيزيائية الأصغر θ ، أطول الجزء الأخير عند 90° : تبلغ θ القيمة 90° عند $i = 89.2322^\circ$ ، ثم تنخفض قليلاً إلى 89.2432° عند السقوط المماسي.

حد انقطاع الموجات المباشرة هو

$$\theta_d = \arccos(R_c/R) = 56.993^\circ.$$

ومن ثم فإن النتائج الفيزيائية هي:

- عندما يكون $0 \leq \theta < 56.993^\circ$ ، تصل الموجات المباشرة P و S إلى الراصد.
- عندما يكون $56.993^\circ < \theta < 75.577^\circ$ ، لا تصل إلى الراصد أشعة P مباشرة ولا أشعة P نافذة عبر اللب. وهذه هي منطقة ظل الموجات P .
- عندما يكون $\theta > 56.993^\circ$ ، لا يوجد شعاع S مباشر، ولا يتيح اللب السائل نفاذ أي شعاع S .
- عند $\theta = 75.577^\circ$ ، يندمج مساران منكسران للموجات P . وبما أن الأشعة الساقطة المتجاورة تخرج عند فصل زاوي يكاد يكون واحداً، تتركز طاقة الأشعة هناك: وهذا كاي.
- في معظم المجال $75.577^\circ < \theta < 90^\circ$ ، يؤدي مساران منكسران للموجات P إلى وصولين متميزين.

عند استخدام الأعداد المعطاة كما هي تماماً، تظهر سمة إضافية صغيرة قرب النقطة المقابلة قطرياً. ففي المجال

$$89.2432^\circ < \theta < 90^\circ,$$

يصل إلى الراصد مسار منكسر ثالث بعد مروره متجاوزاً الاتجاه المقابل قطرياً. وعند النقطة المقابلة قطرياً، يتساوى زمن الانتقال على الفرعين المائلين.

لإعداد الرسم التخطيطي لزمن الانتقال، ارسم الفرعين المباشرين

$$t_{P,\text{dir}} = 1174.19 \sin \theta \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 2019.02 \sin \theta \text{ s},$$

في المجال $0 \leq \theta \leq 56.993^\circ$ فقط. يبدأ كلاهما عند نقطة الأصل ويزداد مع تقعر نحو الأسفل؛ ويقع منحنى S فوق منحنى P. ونقطتا نهايتهما هما

$$t_{P,\text{dir}}(\theta_d) = 984.68 \text{ s} = 16.411 \text{ min},$$

$$t_{S,\text{dir}}(\theta_d) = 1693.16 \text{ s} = 28.219 \text{ min}.$$

يبدأ الفرعان الرئيسيان للموجات P النافذة عبر اللب معاً عند

$$(\theta, T) = (75.577^\circ, 20.789 \text{ min})$$

ويرتفعان باتجاه 90° . ويلتقيان بمماس مشترك، إذ يعطي التفاضل

$$\frac{dT}{di} = \frac{2R_c \sin i}{v_P} \frac{d\Phi}{di}, \quad \frac{dT}{d\Phi} = \frac{2R_c \sin i}{v_P}.$$

تصل الموجة على الفرع ذي i الأصغر أولاً، ويصبح مماس هذا الفرع أفقياً عند النقطة المقابلة قطرياً، حيث يتبع الشعاع قطعاً:

$$T(0) = \frac{2(R - R_c)}{v_P} + \frac{2R_c}{v_{CP}} = 21.733 \text{ min}.$$

ويبلغ الفرع الرئيسي الآخر 23.397 min هناك. أما الفرع الثالث الصغير فينخفض من 23.538 min عند $\theta = 89.243^\circ$ إلى 23.397 min عند 90° .

ولرسم تخطيطي يشمل أيضاً الوصلات المنعكسة اللاحقة التي يناقشها الجزء (v)، ارسم كذلك

$$t_{v,\text{ref}}(\theta) = \frac{2}{v} \sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_d.$$

تزداد هذه المنحنيات بدءاً من 8.909 min للموجات P و 15.320 min للموجات S عند $\theta = 0$ ، وتلتقي بالمنحنيات المباشرة الموافقة لها مماسياً عند θ_d .

(iv)

للموجتين المباشرين P و S طول المسار نفسه، لذلك فإن الفرق بين زمني وصولهما هو

$$\Delta t = 2R \sin \theta \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right).$$

وهنا

$$\Delta t = 2(60) + 11 = 131 \text{ s}.$$

ومن ثم

$$\sin \theta = \frac{131}{2(6370) \left(\frac{1}{6.31} - \frac{1}{10.85} \right)} = \frac{131}{844.8239} = 0.1551.$$

إذن

$$\theta = 8.9204^\circ, \quad \boxed{2\theta = 17.8408^\circ \approx 17.8^\circ}.$$

وبما أن $\theta_d < \theta$ ، فإن افتراض انحصار المسار في الوشاح متسق.

وزمنا الوصول المنفردان هما

$$t_{P,\text{dir}} = 182.07 \text{ s}, \quad t_{S,\text{dir}} = 313.07 \text{ s}.$$

(v)

يمكن لحد اللب أن يعكس طاقة الموجات P والموجات S على حد سواء. وتسلك هذه الموجات المنعكسة مسارات أطول عبر الوشاح، ولذلك تصل في أوقات لاحقة.

لتكن C نقطة الانعكاس على حد اللب، الواقعة على المنصف الشعاعي الأقرب للزاوية $\angle EOX$. ويكون المسار

$$E \rightarrow C \rightarrow X.$$

يؤدي التناظر الانعكاسي حول OC إلى تساوي زاويتي السقوط والانعكاس، وإلى $EC = CX$. وبما أن $\angle EOC = \theta$ ، فإن قانون جيب التمام يعطي

$$EC^2 = R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta.$$

ومن ثم فإن طول المسار المنعكس هو

$$L_{\text{ref}} = 2\sqrt{R^2 + R_c^2 - 2RR_c \cos \theta}.$$

عند $\theta = 8.9204^\circ$

$$L_{\text{ref}} = 5981.54 \text{ km}.$$

وبالتالي فإن زمني وصول الموجتين المنعكستين هما

$$t_{P,\text{ref}} = \frac{5981.54}{10.85} = 551.29 \text{ s},$$

$$t_{S,\text{ref}} = \frac{5981.54}{6.31} = 947.95 \text{ s}.$$

ويحدث كلاهما بعد وصول الموجة S المباشرة عند 313.07 s، كما هو مطلوب.

والفاصل الزمني بينهما هو

$$\begin{aligned} \Delta t_{\text{ref}} &= L_{\text{ref}} \left(\frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_P} \right) \\ &= 396.65 \text{ s} \\ &= 6 \text{ min } 36.65 \text{ s}. \end{aligned}$$

وبالتقريب إلى أقرب ثانية،

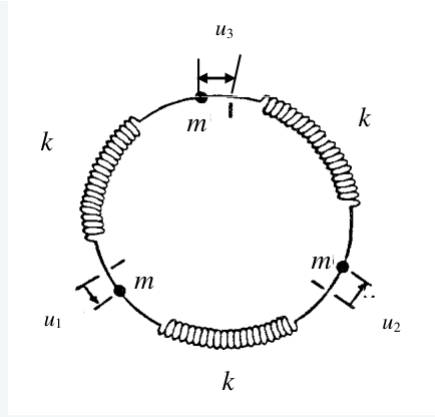
$$\boxed{\Delta t_{\text{ref}} = 6 \text{ min } 37 \text{ s}},$$

مما يؤكد التفسير والفصل الزاوي الذي وُجد في الجزء (iv).

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 3: الأنماط الطبيعية لكتل موصولة بنوابض (حلقة وسلسلة)

ثلاثة جسيمات، كتلة كل منها m ، في حالة اتزان وموصولة بنوابض عديمة الكتلة وغير مستطالة، ثابت النابض لكل منها وفق قانون هوك هو k . وهي مقيدة بالحركة في مسار دائري كما هو موضح في الشكل 3.1.



الشكل 3.1

(i) إذا أُزِيحت كل كتلة عن موضع اتزانها بإزاحات صغيرة u_1 و u_2 و u_3 على الترتيب، فاكتب معادلة الحركة لكل كتلة.

(ii) تحقق من أن للنظام حلولاً توافقية بسيطة على الصورة

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

بتسارعات $(-\omega^2 u_n)$ ، حيث a_n ($n = 1, 2, 3$) سعات ثابتة، ويمكن للتردد الزاوي ω أن يأخذ 3 قيم ممكنة، هي

$$\omega_o \sqrt{3}, \omega_o \sqrt{3} \text{ و } 0. \text{ حيث } \omega_o^2 = \frac{k}{m}.$$

(iii) يُوسَّع نظام النوابض والكتل المتناوبة ليضم N جسيماً، وتُوصَل كل كتلة m بالكتل المجاورة لها بواسطة نوابض. تكون النوابض في البداية غير مستطالة وفي حالة اتزان. اكتب معادلة حركة الكتلة ذات الرقم n ($n = 1, 2, \dots, N$) بدلالة إزاحتها وإزاحات الكتل المجاورة عندما تُزاح الجسيمات عن مواضع اتزانها.

$$u_n(t) = a_s \sin \left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi \right) \cos \omega_s t,$$

هي حلول اهتزازية، حيث $s = 1, 2, \dots, N$ و $n = 1, 2, \dots, N$ ، وحيث ϕ طور اختياري، شريطة أن تكون الترددات الزاوية معطاة بالعلاقة

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{s\pi}{N} \right),$$

حيث a_s ($s = 1, \dots, N$) سعات ثابتة مستقلة عن n .

اذكر مجال الترددات الممكنة لسلسلة تحتوي على عدد لا نهائي من الكتل.

(iv) حدد النسبة

$$u_n/u_{n+1}$$

عندما تكون N كبيرة، في الحالتين:

(a) الحلول ذات التردد المنخفض

(b) $\omega = \omega_{\max}$ ، حيث $\omega_{\max}$ هو التردد الأعظمي للحلول.

ارسم رسوماً بيانية نموذجية توضح إزاحات الجسيمات بدلالة رقم الجسيم على امتداد السلسلة عند الزمن t للحالتين (a) و (b).

(v) إذا استُبدلت إحدى الكتل بكتلة $m' \ll m$ ، فقدر أي تغير كبير يُتوقع حدوثه في توزيع الترددات الزاوية.

صف وصفاً نوعياً شكل طيف الترددات المتوقع لسلسلة ثنائية الذرة ذات كتل متناوبة m و m' ، استناداً إلى النتيجة السابقة.

تذكير

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

(i) •

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{cases}$$

(ii) •

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad 0.$$

التردد غير الصفري نمطان مستقلان يحققان $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. أما النمط الصفري فيحقق $a_1 = a_2 = a_3$.

(iii) •

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \quad u_{n+N} = u_n,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\frac{s\pi}{N} \right).$$

لسلسلة لا نهائية،

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

وبدلالة التردد العادي، $0 \leq f \leq \sqrt{k/m}/\pi$.

(iv) •

(a) بعيداً عن عقد الإزاحة. الرسم البياني منحنى جيبي بطيء التغير تؤخذ قيمه عند مواضع

الجسيمات.

(b) عند الحافة العليا للنطاق. تتناوب الإزاحات بين قيم موجبة وسالبة متساوية في المقدار. وتكون هذه

النتيجة دقيقة عندما تكون N زوجية؛ أما الحلقة ذات العدد الفردي من الجسيمات فتقترب من هذا السلوك محلياً عندما تكون N كبيرة.

• (v) تُنتج كتلة خفيفة واحدة نمطاً واحداً عالي التردد، يتركز على تلك الكتلة:

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}} \gg 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

للسلسلة المتناوبة نطاق صوتي ونطاق بصري تفصل بينهما فجوة. وعندما يكون $m' < m$ ، يكون المجالان الحديان الدقيقان لهما

$$\begin{array}{ll} \text{الصوتي:} & 0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2k}{m}}, \\ \text{البصري:} & \sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}. \end{array}$$

الحل

(i)

نقيس جميع الإزاحات بوصفها أطوال أقواس في الاتجاه نفسه حول الحلقة. في تقريب الإزاحات الصغيرة، تكون استتالة النابض هي الفرق بين إزاحتي طرفيه. ومن ثم يعطي قانون هوك قوة إرجاع مماسية تتناسب مع هذا الفرق. وليس لقوة القيد مركبة مماسية.

بالنسبة إلى الجسم 1، يؤثر النابضان بالقوتين $k(u_2 - u_1)$ و $k(u_3 - u_1)$. ويعطي قانون نيوتن الثاني

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) + k(u_3 - u_1).$$

وبتطبيق الاستدلال نفسه على الجسمين 2 و 3،

$$\begin{array}{l} m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_3 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_2 = k(u_3 + u_1 - 2u_2), \\ m\ddot{u}_3 = k(u_1 + u_2 - 2u_3). \end{array}$$

(ii)

نعوض $u_n = a_n \cos \omega t$ ، بحيث يكون $\ddot{u}_n = -\omega^2 u_n$. ونعرّف

$$\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_o^2}, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \quad S = a_1 + a_2 + a_3.$$

تصبح كل معادلة

$$\lambda a_n = 3a_n - S.$$

وبجمع المعادلات الثلاث نحصل على

$$\lambda S = 0.$$

هناك احتمالان.

إذا كان $\lambda = 0$ ، فإن المعادلات المنفردة تقتضي

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

تتحرك جميع الكتل بمقدار طول القوس نفسه، فلا يتغير طول أي نابض. ومن ثم

$$\omega = 0.$$

هذا هو نمط الدوران كجسم صلب. وهو، بالمعنى الدقيق، ليس اهتزازاً: فحركته العامة هي $u_1 = u_2 = u_3 = A + Bt$. وتمثل صيغة جيب التمام المعطاة حالة الإزاحة الساكنة لهذا النمط.

إذا كان $\lambda \neq 0$ ، فإن $S = 0$ ، وتتطلب السعة غير الصفريّة أن يكون

$$\lambda = 3.$$

ولذلك

$$\omega = \sqrt{3} \omega_o = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

يترك الشرط $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ سعتين مستقلتين. فعلى سبيل المثال، شكلان مستقلان للأنماط هما $(a_1, a_2, a_3) \propto (1, -1, 0)$, $(a_1, a_2, a_3) \propto (1, 1, -2)$.

وبالتالي، تكون ترددات الأنماط الطبيعية الثلاثة

$$\sqrt{3} \omega_o, \quad \sqrt{3} \omega_o, \quad 0,$$

حيث يتكرر التردد غير الصفري مرتين.

(iii)

تؤثر في الجسيم n القوتان

$$k(u_{n+1} - u_n) \quad \text{و} \quad -k(u_n - u_{n-1}).$$

ومن ثم

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n).$$

تفرض الحلقة شروطاً حدية دورية،

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1.$$

نكتب

$$q = \frac{2\pi s}{N}, \quad u_n = a_s \sin(nq + \phi) \cos \omega_s t.$$

هذا التعبير دوري لأن $Nq = 2\pi s$ وباستخدام مطابقة الجمع المعطاة،

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= a_s [\sin(nq + \phi + q) + \sin(nq + \phi - q)] \cos \omega_s t \\ &= 2 \cos q u_n. \end{aligned}$$

ومن ثم تصبح معادلة الحركة

$$-m\omega_s^2 u_n = 2k(\cos q - 1)u_n = -4k \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right) u_n.$$

لنمط غير صفري،

$$\omega_s^2 = 4 \frac{k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{N} \right).$$

بما أن $\sin(\pi s/N) \geq 0$ في المجال المحدد $s = 1, \dots, N$ ،

$$\omega_s = 2\omega_o \sin \left(\frac{\pi s}{N} \right).$$

عندما تصبح السلسلة لا نهائية، تصبح الأعداد الموجية المسموح بها متصلة. ويأخذ عامل الجيب جميع القيم بين الصفر والواحد، فنحصل على

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_o = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

يمثل الصفر الطرف الموافق للإزاحة كجسم صلب؛ أما الاهتزازات الفعلية فتكون فيها $\omega > 0$. وبما أن $f = \omega/(2\pi)$ ،

$$0 \leq f \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

عند التعبير عن k و m بوحدة النظام الدولي، تكون الترددات الزاوية بوحدة rad s^{-1} ، والترددات العادية بوحدة Hz.

(iv)

عند الأزمنة والمواضع التي يكون فيها المقام غير صفري، يُختزل العامل الزمني المشترك:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sin(nq + \phi)}{\sin(nq + \phi + q)}.$$

ينطبق التعبير نفسه مباشرة على نسبة ساعات النمط.

(a) التردد المنخفض

نختار القيمة الممثلة لـ q قريبة من الصفر. عندئذ

$$\omega = 2\omega_o \left| \sin \frac{q}{2} \right| \simeq \omega_o |q|,$$

ومن ثم فإن التردد المنخفض يعني $|q| \ll 1$. وبكتابة $\theta = nq + \phi$.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{\cos q + \cot \theta \sin q} \simeq 1 - q \cot \theta.$$

إذن، بعيداً عن العقد،

$$\boxed{\frac{u_n}{u_{n+1}} \simeq +1.}$$

تكون إزاحات الكتل المتجاورة متساوية تقريباً، وتتحرك تقريباً بالطور نفسه. وبالقرب من العقدة، تكون الإزاحات نفسها صغيرة، ولذلك لا يلزم أن تكون نسبتها قريبة من الواحد.

لإعداد الرسم المطلوب، ارسم منحنى جيبياً ذا طول موجي $L \gg 1$ ، مقيساً بوحدة المسافة بين الجسيمات، وعلم قيمه عند الأرقام الصحيحة للجسيمات. ومن أشكال الإزاحة الممثلة

$$u_n = C(t) \sin \left(\frac{2\pi(n - n_0)}{L} \right).$$

قيمه الأساسية هي:

L	$3L/4$	$L/2$	$L/4$	0	$n - n_0$
0	-1	0	+1	0	$u_n/C(t)$

توجد جسيمات كثيرة بين كل عقدتين متتاليتين، وعادةً ما تكون ارتفاعات النقاط المتجاورة متقاربة جداً.

(b) التردد الأعظمي

عند الحافة العليا للنطاق، يكون $q = \pi$ ، مما يعطي

$$\omega_{\max} = 2\omega_o.$$

الإزاحة هي

$$u_n = a_s \sin(n\pi + \phi) \cos \omega_{\max} t = (-1)^n a_s \sin \phi \cos \omega_{\max} t.$$

وبالتالي،

$$\boxed{u_{n+1} = -u_n, \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = -1.}$$

يتحرك كل زوج من الكتل المتجاورة في اتجاهين متعاكسين وبسعتين متساويتين.

يتكون الرسم من نقاط تتناوب عند $+C(t)$ و $-C(t)$:

4	3	2	1	0	$n - n_0$
+1	-1	+1	-1	+1	$u_n/C(t)$

الدور المكاني يساوي ضعفي المسافة بين الجسيمات. وإذا وُصلت النقاط المتجاورة للمساعدة على التصور، فإنها تشكل خطاً متعرجاً. يلائم هذا النمط حلقة ذات عدد زوجي من الجسيمات تماماً. أما عندما تكون N فردية ومحدودة، فإن أكبر عدد موجي مسموح به هو $\pi \pm \pi/N$ ، ويكون

$$\omega_{\max} = 2\omega_o \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

تتناوب إشارة نمط إزاحته ضمن غلاف بطيء التغير. وعندما تكون N كبيرة، تكون نسبة إزاحتي الجسيمين المتجاورين مساوية تقريباً لـ -1 بعيداً عن عقد الغلاف.

(v)

نستبدل أولاً كتلة واحدة فقط بكتلة $m' \ll m$. يسبب الاهتزاز السريع لهذه الكتلة الخفيفة حركة ضئيلة نسبياً للكتل الثقيلة المجاورة لها. وفي التقريب عند الرتبة الرئيسية، نعامل تلك الكتل المجاورة على أنها ثابتة.

تُنتج إزاحة الكتلة الخفيفة بمقدار x قوة إرجاع $-kx$ من كل نابض. ولذلك

$$m' \ddot{x} \simeq -2kx,$$

مما يعطي

$$\omega_{\text{defect}} \simeq \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

وبالنسبة إلى الحافة العليا الأصلية للنطاق،

$$\frac{\omega_{\text{defect}}}{2\omega_o} \simeq \sqrt{\frac{m}{2m'}} \gg 1.$$

هذا التقريب متسق ذاتياً. فلكتلة ثقيلة مجاورة ذات سعة u_1 ، يكون التوازن المهيمن عند التردد العالي

$$-m\omega_{\text{defect}}^2 u_1 \simeq kx,$$

ومن ثم

$$\frac{u_1}{x} \simeq -\frac{m'}{2m}.$$

تكون حركتها صغيرة ومعاكسة لحركة الكتلة الخفيفة. وتكون الحركة على مسافات أبعد أصغر من ذلك: فالنمط عالي التردد متمركز حول العيب.

وهكذا ينتقل نمط واحد إلى تردد أعلى بكثير من نطاق الترددات الأصلي. وتتأثر الترددات الأخرى بهذا الاضطراب، لكنها تظل من رتبة $\sqrt{k/m}$ ؛ وفي سلسلة لا نهائية، يظل نطاق الأنماط الممتدة $0 \leq \omega \leq 2\omega_o$. كما يبقى نمط الإزاحة كجسم صلب ذو التردد الصفري.

في سلسلة متناوبة، تُنتج الكتل الخفيفة المتكررة نطاقاً كاملاً عالي التردد. وينقسم الطيف إلى:

- **نطاق صوتي**، يضم حركة جماعية منخفضة التردد. وعند الأطوال الموجية الكبيرة، تتحرك الكتل الثقيلة والخفيفة المتجاورة معاً تقريباً.
- **نطاق بصري**، تهتز فيه الكتل الخفيفة بسرعة، بينما تكون حركة الكتل الثقيلة أصغر بكثير. وعند الأطوال الموجية الكبيرة، يتحرك نوعا الكتل في اتجاهين متعاكسين.

يمكن اشتقاق حواف النطاقين مباشرة. لنكن x_j إزاحة الكتلة الثقيلة j ، و y_j إزاحة الكتلة الخفيفة الواقعة بين x_j و x_{j+1} . عندئذ

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_j &= k(y_{j-1} + y_j - 2x_j), \\ m'\ddot{y}_j &= k(x_j + x_{j+1} - 2y_j). \end{aligned}$$

نمط ذي تغير في الطور مقداره Q لكل خلية مكونة من جسيمين، نستخدم

$$\begin{aligned}x_j &= X \cos(jQ + \phi) \cos \omega t, \\y_j &= Y \cos \left((j + \frac{1}{2})Q + \phi \right) \cos \omega t.\end{aligned}$$

معادلات السعات هي

$$\begin{aligned}(2k - m\omega^2)X &= 2k \cos(Q/2)Y, \\(2k - m'\omega^2)Y &= 2k \cos(Q/2)X.\end{aligned}$$

يتطلب وجود حل غير صفري أن يكون

$$(2k - m\omega^2)(2k - m'\omega^2) = 4k^2 \cos^2(Q/2),$$

أو

$$mm'\omega^4 - 2k(m + m')\omega^2 + 4k^2 \sin^2(Q/2) = 0.$$

جزرا هذه المعادلة هما

$$\omega_{\pm}^2 = k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) \pm k \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)^2 - \frac{4}{mm'} \sin^2(Q/2)}.$$

عندما تزداد $|Q|$ من 0 إلى π ، يزداد الجذر الأدنى وينخفض الجذر الأعلى. ولذلك، عندما يكون $m' < m$ ، يكون مجالا هما

$$0 \leq \omega_- \leq \sqrt{\frac{2k}{m}},$$

و

$$\sqrt{\frac{2k}{m'}} \leq \omega_+ \leq \sqrt{2k \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right)}.$$

لا توجد أنماط في الفجوة

$$\sqrt{\frac{2k}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{2k}{m'}}.$$

عندما يكون $m' \ll m$ ، يكون النطاق البصري ضيقاً مقارنة بترده العالي، الذي يساوي تقريباً $\sqrt{2k/m'}$ ، وتفصله مسافة كبيرة عن النطاق الصوتي. وللسلسلة الدورية المحدودة ترددات منفصلة داخل هذين النطاقين: وتصبح هذه الترددات متصلة في حد السلسلة اللانهائية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.