

IPhO 1985

理论题与解答 · 南斯拉夫波尔托罗日 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1985/

题目 1: 无线电通信天线阵列

一位年轻的业余无线电爱好者与住在两个城镇的两位女孩保持无线电通信。他布置了一个天线阵列，使得住在 A 镇的女孩接收到最强信号时，住在 B 镇的女孩接收不到信号，反之亦然。该阵列由两根竖直的杆状天线组成，两根天线以相同的强度在水平面向各个方向均匀辐射。

- a) 求该阵列的参数，即两根天线之间的距离、阵列的取向以及馈入两根天线的电信号之间的相位差，使两根天线之间的距离最小。
- b) 如果这位男孩拥有一台发射频率为 27 MHz 的无线电台，并在波尔托罗日搭建该天线阵列，求数值解。他通过地图查得，正北方向与 A 镇（科佩尔）方向及 B 镇（伊斯特拉半岛上的小镇布耶）方向之间的夹角分别为 72° 和 157° 。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 设从阵列处观察，两镇方向之间的夹角为 α ，波长为 λ 。最小间距为

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

两根天线的连线必须垂直于两镇方向夹角的内角平分线。将两根天线编号，使天线 2 位于从天线 1 沿 $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ 方向的位置，其中两个单位矢量分别指向两镇。要使 A 镇接收到最强信号而 B 镇接收不到信号，天线 2 的相位必须比天线 1 滞后 90° ；要实现相反的情况，其相位必须超前 90° 。

- b) 两镇方向之间的夹角为 85° ，由此得到

$$d_{\min} \approx 4.1 \text{ m}.$$

两根天线连线的方位角为

$$24.5^\circ \text{ 和 } 204.5^\circ$$

方位角从正北方向起沿顺时针方向测量。要使科佩尔接收到最强信号而布耶接收不到信号，东北侧天线的相位必须比西南侧天线滞后 90° ；将相位关系反转，即可使两地的接收情况互换。

解答

a)

两根天线发出的信号是相干的，频率相同，且均为相同的竖直偏振。我们采用远场近似：两镇到阵列的距离远大于天线间距，因此到达任一城镇的两列波具有相同的振幅，传播方向可视为平行。

设从天线 1 到天线 2 的水平位移为 $\mathbf{d}$ ，其大小为 d 。将电信号的相位差定义为

$$\delta = \phi_2 - \phi_1,$$

其中波源的振荡与 $\cos(\omega t + \phi_j)$ 成正比。因此， δ 为正表示天线 2 的相位超前于天线 1。

对于位于 $\hat{\mathbf{n}}$ 方向的远处接收器，传播路径长度满足

$$r_2 - r_1 \simeq -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}.$$

因此，接收到的两列波之间的相位差为

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \delta - k(r_2 - r_1) = \delta + k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

若任一根天线单独在该接收器处产生的强度为 I_0 ，则叠加后有

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

因此，强度最大要求 $\Delta = 2m\pi$ ，而强度为零要求 $\Delta = (2n+1)\pi$ 。

要使 A 处强度最大、B 处强度为零，需满足

$$\begin{aligned} \delta + k\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= 2m\pi, \\ \delta + k\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= (2n+1)\pi. \end{aligned}$$

两式相减，消去可调的电信号相位差：

$$k(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d} = \text{奇数倍的 } \pi.$$

因此

$$|(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d}| \geq \frac{\lambda}{2}.$$

由于两个单位矢量之间的夹角为 α ，

$$|\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B| = \sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

标量积的绝对值不可能超过两个矢量模长的乘积，因此

$$2d \sin\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\lambda}{2}.$$

由此可得

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4\sin(\alpha/2)}.$$

当 $\mathbf{d}$ 平行于 $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ 时，等号成立。此外，

$$(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_A + \hat{\mathbf{n}}_B) = 0.$$

由于两矢量之和沿着内角平分线方向，所需的两根天线连线垂直于该角平分线。

选取从天线 1 到天线 2 的方向为 $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ 的方向。在最小间距下，

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d_{\min} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{4}, \quad \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda}{4}.$$

因此，接收波的相位差为

$$\Delta_A = \delta + \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_B = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

要使 A 处接收到最强信号，选取

$$\boxed{\delta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}}.$$

此时 $\Delta_A = 0$, $\Delta_B = -\pi$ ，符合要求。

要使 B 处接收到最强信号，选取

$$\boxed{\delta = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}}.$$

此时 $\Delta_B = 0$, $\Delta_A = \pi$ 。因此，在两种工作模式之间切换，需要将电信号的相对相位改变 180° 。

b)

两镇方向之间的夹角为

$$\alpha = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ.$$

取 $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ，波长为

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8}{27 \times 10^6} \simeq 11.1 \text{ m}.$$

因此，

$$d_{\min} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} \text{ m} \simeq 4.11 \text{ m},$$

即近似为

$$\boxed{d_{\min} = 4.1 \text{ m}}.$$

内角平分线的方位角为

$$\frac{72^\circ + 157^\circ}{2} = 114.5^\circ.$$

因此，与之垂直的两根天线连线的方位角为

$$114.5^\circ - 90^\circ = 24.5^\circ,$$

其反方向的方位角为 204.5° 。

将西南侧天线编号为 1，东北侧天线编号为 2。位移在两镇方向上的投影为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= d \cos(72^\circ - 24.5^\circ) = d \sin 42.5^\circ = \frac{\lambda}{4}, \\ \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= d \cos(157^\circ - 24.5^\circ) = -\frac{\lambda}{4}. \end{aligned}$$

因此，相位设置如下：

所需的接收情况	东北侧天线相对于西南侧天线的相位
科佩尔最强；布耶为零	滞后 90°

所需的接收情况	东北侧天线相对于西南侧天线的相位
布耶最强；科佩尔为零	超前 90°

解答已与官方解答核对。

题目 2：InSb 棒中的霍尔效应

一根由半导体 InSb 制成的长方体长棒，三条边的长度分别为 a 、 b 和 c ($a \gg b \gg c$)，其中有平行于边 a 的电流 I 流过。长棒处于平行于边 c 的外磁场 B 中。电流 I 产生的磁场可以忽略。载流子为电子。仅有电场时，半导体中电子的平均速度为 $v = \mu E$ ，其中 μ 称为迁移率。如果同时存在磁场，电场就不再与电流平行。这种现象称为霍尔效应。

- 求为产生上述电流，棒内电场应具有的大小和方向。
- 计算沿边 b 的方向，棒的两个相对表面上正对的两点之间的电势差。
- 若电流和磁场均为交变的 (AC)，即 $I = I_0 \sin \omega t$ 和 $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$ ，求 b) 中电势差的直流分量的解析表达式。
- 设计并说明一个利用 c) 的结果测量接入交流电网的用电器所消耗功率的电路。

已知数据：InSb 中电子的迁移率为 $7.8 \text{ m}^2\text{T/Vs}$ ，InSb 中电子的浓度为 $2.5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ， $I = 1.0 \text{ A}$ ， $B = 0.10 \text{ T}$ ， $b = 1.0 \text{ cm}$ ， $c = 1.0 \text{ mm}$ ， $e_0 = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

选取右手坐标系，使 $+\hat{x}$ 沿约定的电流方向， $+\hat{z}$ 沿磁场方向。令 $e = -e_0 > 0$ ，以 n 表示电子浓度，并将霍尔电压定义为

$$U_H = V(y = +b/2) - V(y = -b/2).$$

- a) 电场为

$$\mathbf{E} = \frac{I}{nec\mu} \hat{x} - \frac{IB}{nec} \hat{y} = (3.2\hat{x} - 2.5\hat{y}) \text{ V m}^{-1}.$$

其大小为 4.1 V m^{-1} 。电场垂直于 $\mathbf{B}$ ，偏转角为

$$\theta = \tan^{-1}(\mu B) = 38^\circ$$

这一偏转是从电流方向朝 $-\hat{y}$ 方向，即 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 的方向发生的。

- b)

$$U_H = \frac{IB}{nec} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

$+y$ 侧表面的电势较高。

• c)

$$U_{H,DC} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

- d) 用串联的电流线圈产生 $B(t) = k_I i_L(t)$ ，并通过电阻性电压采样支路驱动霍尔棒，使 $I_H(t) = k_U u(t)$ 。接在沿 b 方向相对的两个表面之间的平均值电压表读数为

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} P, \quad P = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

将其刻度直接标定为瓦特。

解答

我们考虑长棒中部的均匀区域，忽略接触效应以及棒内电流产生的磁场。横向表面开路，因此不存在稳恒的横向电流。

在数值计算中，根据 $v = \mu E$ 的要求，将迁移率理解为 $7.8 \text{ m}^2/(\text{V s})$ ；已知数据中给出的单位 $\text{m}^2\text{T}/\text{Vs}$ 与该关系式的量纲不符。

a) 电场的大小和方向

电流密度与电子漂移速度之间的关系为

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_e.$$

由于横截面积为 bc ，有

$$\mathbf{j} = \frac{I}{bc} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_e = -v_d \hat{\mathbf{x}}, \quad v_d = \frac{I}{necb}.$$

题给的迁移率关系将速率与电场大小联系起来。用矢量形式表述，在没有磁场时，电子的漂移方向与电场方向相反。

在通常的各向同性迁移率模型中，碰撞产生的平均阻力为 $-e\mathbf{v}_e/\mu$ 。因此，在电场和磁场同时存在时，稳态下的受力平衡方程为

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{e}{\mu} \mathbf{v}_e.$$

于是，

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\mu} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}.$$

由 $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ ，得

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = (-v_d \hat{\mathbf{x}}) \times (B\hat{\mathbf{z}}) = v_d B \hat{\mathbf{y}},$$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{v_d}{\mu} \hat{\mathbf{x}} - v_d B \hat{\mathbf{y}}.$$

纵向分量用于克服碰撞的阻碍，维持漂移运动。横向分量用于平衡磁场力。具体而言，磁场力最初将电子推向 $-y$ 侧表面；电子在那里积累，产生所需的沿 $-y$ 方向的电场。

代入数值得

$$bc = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-3}) = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$v_d = \frac{1.0}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-5})} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

因此

$$E_x = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ V m}^{-1}, \quad E_y = -25(0.10) = -2.5 \text{ V m}^{-1}, \quad E_z = 0.$$

电场大小为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{I}{nec\mu} \sqrt{1 + (\mu B)^2} = \boxed{4.1 \text{ V m}^{-1}}.$$

从 $+\hat{x}$ 向 $-\hat{y}$ 偏转的角度满足

$$\tan \theta = \frac{|E_y|}{E_x} = \mu B = 0.78,$$

由此得

$$\boxed{\theta = 38^\circ}.$$

b) 横向电势差

在沿 b 方向相对的两个表面上，选取纵向坐标相同的两个正对点。由于 $\mathbf{E} = -\nabla V$ ，有

$$U_H = - \int_{-b/2}^{b/2} E_y dy = -E_y b = v_d B b.$$

代入漂移速率，得

$$\boxed{U_H = \frac{IB}{nec}}.$$

代入数值得

$$U_H = \frac{(1.0)(0.10)}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-3})} = \boxed{0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}}.$$

$-y$ 侧表面积累电子，电势较低； $+y$ 侧表面的电势较高。

c) 交变电流和磁场下的直流分量

假设系统在准静态条件下工作：电子漂移和霍尔电荷分布能够足够迅速地跟随外加信号变化，且电压引线中的感应干扰可以忽略。此时，瞬时霍尔电压为

$$U_H(t) = \frac{I(t)B(t)}{nec} = \frac{I_0 B_0}{nec} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta).$$

利用

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

可得

$$U_H(t) = \frac{I_0 B_0}{2nec} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)].$$

第二项在一个周期内的平均值为零。因此

$$\boxed{U_{H,\text{DC}} = \overline{U_H} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.}$$

等价地,

$$\overline{U_H} = \frac{I_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{nec} \cos \delta.$$

输出包含一个直流分量和一个频率为外加信号频率两倍的纹波分量。当两个输入信号的相位相差四分之一周期时, 直流分量为零。

d) 测量交流功率的电路

c) 部分的结果表明, 霍尔元件可以用作乘法器: 其横向电压正比于纵向电流与磁场的乘积。

一种可行电路的连接方式如下:

1. 将励磁线圈与用电器串联。将霍尔棒置于线圈内部, 使其 c 方向平行于磁场。采用线性线圈, 最好使用空心线圈, 使

$$B(t) = k_I i_L(t),$$

其中 $i_L(t)$ 为用电器电流, k_I 为线圈的磁场常数。

2. 在交流电网两端另接一个支路, 由一个大阻值无感电阻 R 与霍尔棒纵向两端的接触电极串联组成。由 a) 部分可得棒的纵向电阻:

$$r_H = \frac{E_x a}{I_H} = \frac{a}{ne\mu bc}.$$

因此, 在支路电抗可忽略时,

$$I_H(t) = \frac{u(t)}{R + r_H} = k_U u(t).$$

取 $R \gg r_H$, 即可使 $k_U \simeq 1/R$, 并限制采样电流。

3. 将沿 b 方向相对的两个表面上、纵向位置相同的两个霍尔接触电极接至高输入阻抗的平均值电压表。也可使用带缓冲级的低通滤波器, 再接直流电表。对多个交流周期取平均。

忽略励磁线圈上的电压降和电压采样支路的负载效应。于是, $u(t)$ 也就是用电器两端的电压, 且

$$U_H(t) = \frac{I_H(t) B(t)}{nec} = \frac{k_U k_I}{nec} u(t) i_L(t).$$

因此, 其平均值为

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} \overline{u(t) i_L(t)} = \frac{k_U k_I}{nec} P.$$

对于正弦交流, 令

$$u(t) = U_0 \sin \omega t, \quad i_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \varphi).$$

则

$$P = \frac{U_0 I_{L0}}{2} \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

因此, 电表测得的是用电器消耗的平均功率, 其中已包含功率因数的影响。其瓦特刻度的标定关系为

$$P = \frac{nec}{k_U k_I} \overline{U_H}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：借助火星逃离太阳系的空间探测器

在一项空间研究计划中，人们讨论了将空间探测器发射到太阳系之外的两种方案。第一种方案 (i) 是以足够大的速度发射探测器，使其直接逃离太阳系。按照第二种方案 (ii)，探测器先接近一颗地外行星，借助该行星改变运动方向，并达到逃离太阳系所需的速度。假设探测器只在太阳或行星的引力场作用下运动，具体取决于所在位置哪个引力场更强。

a) 求按照方案 (i) 发射探测器时，应赋予探测器的最小速度，以及该速度相对于地球运动方向的方向。

b) 假设探测器沿 a) 中确定的方向发射，但速度大小不同。求探测器穿过火星轨道时的速度，即相对于该轨道的平行分量和垂直分量。探测器穿过火星轨道时，火星不在交点附近。

c) 令探测器进入火星的引力场。求探测器逃离太阳系所需的、相对于地球的最小发射速度。

提示：根据 a) 的结果，你已知探测器离开火星引力场后，为逃离太阳系所需的最佳速度大小和方向。（不必考虑交会时火星的精确位置。）求这一速度与探测器进入火星引力场之前的速度分量之间的关系，即与 b) 中求出的分量之间的关系。探测器的能量守恒情况如何？

d) 估算方案 (ii) 相对于方案 (i) 最多可节省的能量比例。说明：假设所有行星都在同一平面内沿同一方向绕太阳做圆周运动。忽略空气阻力、地球自转以及逃离地球引力场所消耗的能量。

数据：地球绕太阳运动的速度为 30 km/s ，地球与火星到太阳的距离之比为 $2/3$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

令 $V = 30 \text{ km s}^{-1}$ ，并用 u 表示相对于地球的发射速率。

- a) 沿地球公转方向发射，速率为

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

- b) 以速率 u 顺行发射时，在火星轨道处的日心速度分量为

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}(V + u), \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2},$$

其中，首次穿过火星轨道时， $v_{\perp}$ 沿径向向外。要到达这条轨道，须满足 $u \geq 2.86 \text{ km s}^{-1}$ 。

- c) 取 $V_M = \sqrt{2/3}V$ ，相对于地球的最小发射速率为

$$u_{ii,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

发射方向为顺行方向；最佳出射速度也沿顺行方向，并与火星轨道相切。

- d) 发射能量最多可节省的比例为

$$\frac{E_i - E_{ii}}{E_i} = 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \simeq 0.800,$$

即约为 $\boxed{80\%}$ 。

解答

将地球和火星的轨道半径分别记为 r 和 R ，并令 $\mu = GM_\odot$ 。由给定的距离比和圆轨道条件可得

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \quad V^2 = \frac{\mu}{r}.$$

除非另有明确说明，下文中探测器的所有速度均相对于日心参考系。按照题目要求，忽略地球引力场。

a)

若探测器的单位质量机械能非负，它便能逃离太阳的引力束缚：

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} \geq 0.$$

因此，其初始日心速率必须满足

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V.$$

对于给定的相对于地球的发射速率 u ，沿地球运动方向平行发射时，日心速率达到最大值 $V + u$ 。因此

$$V + u_{i,\min} = \sqrt{2}V,$$

所以

$$\boxed{u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

对应的日心速率为 42.4 km s^{-1} 。在这一临界条件下，轨迹为抛物线，无穷远处的速率为零。

b)

对于顺行发射，令

$$v_0 = V + u.$$

初速度与地球轨道相切。

在地球轨道与火星轨道之间，太阳的引力是有心力，因此探测器相对于太阳的角动量守恒：

$$rv_0 = Rv_{\parallel}.$$

于是，

$$\boxed{v_{\parallel} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}(V + u).$$

由机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{\mu}{R}.$$

利用 $\mu/r = V^2$ 和 $\mu/R = \frac{2}{3}V^2$ ，得到

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 - \frac{2}{3}V^2.$$

减去 $v_{\parallel}^2 = \frac{4}{9}v_0^2$ ，得到

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}v_0^2 - \frac{2}{3}V^2} = \sqrt{\frac{5}{9}(V+u)^2 - \frac{2}{3}V^2}.$$

这是首次穿过火星轨道时沿径向向外的分量。向内穿过轨道时，其符号相反。

要使探测器到达火星的轨道半径，被开方数必须非负：

$$v_0^2 \geq \frac{6}{5}V^2.$$

因此

$$u \geq \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right) V = 2.86 \text{ km s}^{-1}.$$

等号对应于远日点恰好接触火星轨道的轨道。

c)

火星的公转速率为

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}} V = 24.5 \text{ km s}^{-1}.$$

将交会视为发生在局部区域内，且其持续时间相对于火星公转的时间尺度很短，因而可将火星的速度视为恒定。在火星参考系中，入射探测器的速度分量为

$$w_{\parallel} = v_{\parallel} - V_M, \quad w_{\perp} = v_{\perp}.$$

因此，其大小满足

$$w^2 = (v_{\parallel} - V_M)^2 + v_{\perp}^2.$$

在这一参考系中，引力交会过程中的机械能守恒。在交会前后距火星相同距离的位置，相对速率相同，但方向发生改变。

若出射相对速度与火星运动方向的夹角为 θ ，则出射日心速率满足

$$v_{\text{out}}^2 = V_M^2 + w^2 + 2V_M w \cos \theta.$$

当 $\theta = 0$ 时，该速率最大，为

$$v_{\text{out,max}} = V_M + w.$$

因此，最佳交会应使出射相对速度沿火星的运动方向。

在火星轨道半径处，逃离太阳引力束缚所需的速率为

$$v_{\text{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} V_M.$$

因此，所需的最小相对速率为

$$w_{\min} = (\sqrt{2} - 1)V_M.$$

现在利用 b) 部分求出的分量：

$$\begin{aligned} w^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - 2V_M v_{\parallel} + V_M^2 \\ &= v_0^2 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 + V_M^2. \end{aligned}$$

由于 $V_M^2 = \frac{2}{3}V^2$ ，上式化简为

$$w^2 = v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0.$$

在逃逸的临界条件下，

$$v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 V_M^2.$$

正根为

$$v_{0,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] = 35.555 \dots \text{ km s}^{-1}.$$

因此，所需的相对于地球的发射速率为

$$u_{\text{ii},\min} = v_{0,\min} - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

这一速率超过了到达火星轨道所需的 2.86 km s^{-1} ，因此该入射轨迹是可实现的。

在所有可能的发射方向中，顺行发射所需的速率也最小。为说明这一点，令 α 为发射方向相对于地球运动方向的夹角，并记 $q = r/R = 2/3$ 。利用同样的能量和角动量关系可得

$$w^2 = u^2 + 2Vu(1 - q^{3/2}) \cos \alpha + V^2(3q - 1 - 2q^{3/2}).$$

对于固定的 u ，由于 $q < 1$ ，上式在 $\cos \alpha = 1$ 时取最大值。因此，在给定发射速率下，顺行发射能够提供最大的交会相对速率。

数值上，最佳入射轨迹满足

$$v_{\parallel} = 23.70 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{\perp} = 10.12 \text{ km s}^{-1}.$$

由此得到 $w = 10.15 \text{ km s}^{-1}$ 。经过最佳偏转后，

$$v_{\text{out}} = V_M + w = 34.64 \text{ km s}^{-1} = \sqrt{2} V_M,$$

符合要求。

这里并未违反能量守恒。交会过程中，探测器在日心参考系中的能量增加量为

$$\Delta E = m \mathbf{V}_M \cdot (\mathbf{w}_{\text{out}} - \mathbf{w}_{\text{in}}).$$

对于最佳偏转，上式变为

$$\Delta E = m V_M [w - (v_{\parallel} - V_M)] > 0.$$

这部分能量来自火星的公转运动。由于火星的质量远大于探测器的质量，火星相应的速度变化可以忽略。

d)

忽略逃离地球引力场所需的能量，在地球参考系中，发射时赋予探测器的能量为

$$E_{\text{launch}} = \frac{1}{2} m u^2.$$

因此，最多可节省的能量比例为

$$\begin{aligned}
 f_{\max} &= \frac{E_{\mathrm{i}} - E_{\mathrm{ii}}}{E_{\mathrm{i}}} \\
 &= 1 - \left(\frac{u_{\mathrm{ii},\min}}{u_{\mathrm{i},\min}} \right)^2 \\
 &= 1 - \left(\frac{5.55519}{12.42641} \right)^2 \\
 &= 0.80015.
 \end{aligned}$$

于是

$$f_{\max} \simeq 80\%.$$

对应的单位探测器质量所需的发射能量，直接逃逸时约为 77.2 MJ kg^{-1} ，借助理想火星引力助推时约为 15.4 MJ kg^{-1} 。

解答已与官方解答核对。