

IPhO 1985

Teorik sorular ve çözümler · Portorož, Yugoslavya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1985/

Soru 1: Bir radyo bağlantısı için anten dizisi

Genç bir radyo amatörü, iki ayrı kasabada yaşayan iki kızla radyo bağlantısı kurmaktadır. Anten dizisini, A kasabasında yaşayan kız en güçlü sinyali alırken B kasabasında yaşayan kız hiç sinyal almayacak ve bunun tersi de mümkün olacak şekilde yerleştirir. Dizi, yatay düzlemde her yönde düzgün olarak ve eşit şiddette yayın yapan iki dikey çubuk antenden oluşmaktadır.

a) Çubuklar arasındaki uzaklık en küçük olacak şekilde dizinin parametrelerini, yani çubuklar arasındaki uzaklığı, dizinin yönelimini ve çubuklara uygulanan elektriksel sinyaller arasındaki faz farkını bulunuz.

b) Gencin 27 MHz frekansında yayın yapan bir radyo istasyonu varsa ve anten dizisini Portorož'da kuruyorsa sayısal çözümü bulunuz. Genç, haritayı kullanarak kuzey ile A (Koper) ve B (Istria'daki küçük Buje kasabası) doğrultuları arasındaki açılarını sırasıyla 72° ve 157° olduğunu bulmuştur.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Diziden bakıldığında kasabalar arasındaki açısal ayrım α , dalga boyu ise λ olsun. En küçük aralık

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

Çubukları birleştiren doğru, iki kasaba doğrultusunun iç açıortayına dik olmalıdır. Birim vektörler kasabalara doğru yönelmiş olmak üzere, çubukları, 2 numaralı çubuk 1 numaralı çubuğa göre $\hat{n}_A - \hat{n}_B$ yönünde bulunacak şekilde numaralandırın. A'nın en güçlü sinyali alması ve B'nin hiç sinyal almaması için 2 numaralı çubuğun fazı **1 numaralı çubuğun fazından 90° geride** olmalıdır; tersi için ise 90° **ileride** olmalıdır.

- b) Açısal ayırım 85° olduğundan

$$d_{\min} \approx 4.1 \text{ m}.$$

Çubukları birleştiren doğrunun kuzeyden saat yönünde ölçülen yön açıları

$$24.5^\circ \text{ ve } 204.5^\circ$$

olur. Koper'de en güçlü sinyalin alınması ve Buje'de hiç sinyal alınmaması için kuzeydoğudaki çubuğun fazı, güneybatıdaki çubuğun fazından 90° geride olmalıdır; faz ilişkisini tersine çevirmek bu iki durumu yer değiştirir.

Çözüm

a)

Çubuklardan gelen sinyaller eşevrelidir, frekansları aynıdır ve düşey kutuplanmaları birbiriyle uyumludur. Uzak alan yaklaşımını kullanıyoruz: Kasabaların diziye olan uzaklıkları çubuklar arasındaki aralıktan çok daha büyük olduğundan, her bir kasabaya ulaşan dalgaların genlikleri eşittir ve yayılma yönleri pratik olarak paraleldir.

1 numaralı çubuktan 2 numaralı çubuğa yatay yer değiştirme vektörü $\mathbf{d}$, büyüklüğü ise d olsun. Elektriksel faz farkını

$$\delta = \phi_2 - \phi_1,$$

olarak tanımlayalım; burada kaynak salınımları $\cos(\omega t + \phi_j)$ ile orantılıdır. Dolayısıyla pozitif δ , 2 numaralı çubuğun fazının 1 numaralı çubuğun fazından ileride olduğu anlamına gelir.

$\hat{\mathbf{n}}$ yönündeki uzak bir alıcı için yol uzunlukları

$$r_2 - r_1 \simeq -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}$$

bağıntısını sağlar. Buna göre, alınan dalgalar arasındaki faz farkı

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \delta - k(r_2 - r_1) = \delta + k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

olur.

Çubuklardan herhangi biri tek başına bu alıcıda I_0 şiddeti oluşturuyorsa, süperpozisyon ilkesi

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

sonucunu verir. Dolayısıyla maksimum için $\Delta = 2m\pi$, sıfır şiddet için ise $\Delta = (2n + 1)\pi$ gerekir.

A'da maksimum, B'de ise sıfır şiddet için

$$\begin{aligned} \delta + k\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= 2m\pi, \\ \delta + k\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= (2n + 1)\pi. \end{aligned}$$

İki denklemi birbirinden çıkarmak, ayarlanabilir elektriksel faz farkını ortadan kaldırır:

$$k(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d} = \text{bir tek tam sayı ile çarpılmış } \pi.$$

Dolayısıyla

$$|(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d}| \geq \frac{\lambda}{2}.$$

İki birim vektör arasındaki açı α olduğundan,

$$|\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B| = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Bir skaler çarpımın mutlak değeri, vektörlerin büyüklüklerinin çarpımını aşamaz; bu nedenle

$$2d \sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Buradan

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}$$

elde edilir.

Eşitlik, $\mathbf{d}$ vektörü $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ vektörüne paralel olduğunda sağlanır. Ayrıca,

$$(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_A + \hat{\mathbf{n}}_B) = 0.$$

Toplam vektör iç açıortay boyunca yöneldiğinden, çubukları birleştiren doğrunun bu açıortaya dik olması gerekir.

1 numaralı çubuktan 2 numaralı çubuğa olan yönü $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ boyunca seçelim. En küçük aralıkta,

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d_{\min} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{4}, \quad \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda}{4}.$$

Böylece alınan dalgaların faz farkları

$$\Delta_A = \delta + \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_B = \delta - \frac{\pi}{2}$$

olur.

A'da en güçlü sinyalin alınması için

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

seçilir. Bu durumda, gerektiği gibi $\Delta_A = 0$ ve $\Delta_B = -\pi$ olur.

B'de en güçlü sinyalin alınması için

$$\delta = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

seçilir. Bu durumda $\Delta_B = 0$ ve $\Delta_A = \pi$ olur. Dolayısıyla iki çalışma modu arasında geçiş yapmak, bağlı elektriksel fazda 180° değişiklik gerektirir.

b)

Kasabalar arasındaki açısal ayırım

$$\alpha = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ$$

olur. $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ kullanıldığında dalga boyu

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8}{27 \times 10^6} \simeq 11.1 \text{ m}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$d_{\min} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} \text{ m} \simeq 4.11 \text{ m},$$

ya da yaklaşık olarak

$$\boxed{d_{\min} = 4.1 \text{ m}}.$$

İç açıortayın yön açısı

$$\frac{72^\circ + 157^\circ}{2} = 114.5^\circ$$

olur. Buna dik olan, çubukları birleştiren doğrunun yön açısı dolayısıyla

$$114.5^\circ - 90^\circ = 24.5^\circ,$$

olup zıt yönün açısı 204.5° 'dir.

Güneybatıdaki çubuğu 1, kuzeydoğudaki çubuğu 2 olarak numaralandıralım. Kasabalar yönündeki izdüşümler

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d \cos(72^\circ - 24.5^\circ) = d \sin 42.5^\circ = \frac{\lambda}{4},$$

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = d \cos(157^\circ - 24.5^\circ) = -\frac{\lambda}{4}$$

olur. Dolayısıyla faz ayarları şöyledir:

İstenen sinyal alımı	Kuzeydoğudaki çubuğun güneybatıdaki çubuğa göre fazı
Koper'de maksimum; Buje'de sıfır	90° geride
Buje'de maksimum; Koper'de sıfır	90° ileride

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Bir InSb çubukta Hall etkisi

InSb yarı iletkeninden yapılmış, kenarları a , b ve c ($a \gg b \gg c$) olan dikdörtgenler prizması biçimindeki uzun bir çubuktan, a kenarına paralel bir I akımı geçmektedir. Çubuk, c kenarına paralel bir dış manyetik alan B içindedir. I akımının oluşturduğu manyetik alan ihmal edilebilir. Akım taşıyıcıları elektronlardır. Bir yarı iletkeninde yalnızca elektrik alan bulunduğunda elektronların ortalama hızı $v = \mu E$ olur; burada μ , hareketlilik olarak adlandırılır. Manyetik alan da varsa elektrik alan artık akıma paralel değildir. Bu olgu Hall etkisi olarak bilinir.

a) Yukarıda belirtilen akımın oluşması için çubuktaki elektrik alanın büyüklüğünü ve yönünü belirleyiniz.

b) Çubuğun yüzeylerinde, b kenarı doğrultusunda karşılıklı bulunan noktalar arasındaki elektriksel potansiyel farkını hesaplayınız.

c) Akım ve manyetik alanın alternatif (AC) olduğu, $I = I_0 \sin \omega t$ ve $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$ durumunda, b) şıkkındaki elektriksel potansiyel farkının doğru akım (DC) bileşeninin analitik ifadesini bulunuz.

d) c) şıkkındaki sonuçtan yararlanarak, alternatif akım şebekesine bağlı bir elektrikli cihazın güç tüketimini ölçmeyi sağlayacak bir elektrik devresi tasarlayınız ve açıklayınız.

Veriler: InSb içindeki elektron hareketliliği $7.8 \text{ m}^2\text{T/Vs}$, InSb içindeki elektron yoğunluğu $2.5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $I = 1.0 \text{ A}$, $B = 0.10 \text{ T}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ mm}$, $e_0 = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$+\hat{x}$ yönü geleneksel akım yönünde, $+\hat{z}$ yönü ise manyetik alan yönünde olacak şekilde sağ eli bir koordinat sistemi seçelim. $e = -e_0 > 0$ olsun, n elektron yoğunluğunu gösterebiliriz ve Hall gerilimini şöyle tanımlayalım:

$$U_H = V(y = +b/2) - V(y = -b/2).$$

- a) Elektrik alan

$$\mathbf{E} = \frac{I}{nec\mu} \hat{x} - \frac{IB}{nec} \hat{y} = (3.2\hat{x} - 2.5\hat{y}) \text{ V m}^{-1}.$$

biçimindedir. Büyüklüğü 4.1 V m^{-1} olur. $\mathbf{B}$ 'ye diktir ve akım yönünden, $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 'nin yönü olan $-\hat{y}$ yönüne doğru

$$\theta = \tan^{-1}(\mu B) = 38^\circ$$

kadar sapmıştır.

- b)

$$U_H = \frac{IB}{nec} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

$+y$ yüzeyi daha yüksek potansiyeldedir.

- c)

$$U_{H,DC} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

- d) $B(t) = k_I i_L(t)$ alanını oluşturmak için seri bağlı bir akım bobini kullanınız ve Hall çubuğunu, $I_H(t) = k_U u(t)$ olacak şekilde dirençli bir gerilim algılama kolundan besleyiniz. Böylece b doğrultusundaki karşılıklı yüzeyler arasına bağlanan, ortalama değeri ölçen bir voltmetre

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} P, \quad P = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

değerini gösterir. Ölçeğini doğrudan watt cinsinden kalibre ediniz.

Çözüm

Uzun çubuğun düzgün özelliklere sahip orta bölgesini ele alıyor, kontak etkilerini ve çubuğun akımının oluşturduğu manyetik alanı ihmal ediyoruz. Enine yüzeyler açık devre durumunda olduğundan, kararlı durumda enine akım yoktur.

Sayısal hesaplamalarda hareketlilik, $v = \mu E$ bağıntısının gerektirdiği üzere $7.8 \text{ m}^2/(\text{V s})$ olarak yorumlanmıştır; verilerde geçen $\text{m}^2\text{T}/\text{Vs}$ birimi bu bağıntıyla boyutsal olarak tutarlı değildir.

a) Elektrik alanın büyüklüğü ve yönü

Akım yoğunluğu ile elektronların sürüklenme hızı arasındaki ilişki

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_e.$$

biçimindedir. Kesit alanı bc olduğundan,

$$\mathbf{j} = \frac{I}{bc}\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_e = -v_d\hat{\mathbf{x}}, \quad v_d = \frac{I}{nebc}.$$

Verilen hareketlilik bağıntısı, sürati alanın büyüklüğüyle ilişkilendirir. Vektörel olarak, manyetik alan yokken elektronlar elektrik alanın ters yönünde sürüklenir.

Alışlagelmiş izotropik hareketlilik modelinde, çarpışmalar ortalama $-e\mathbf{v}_e/\mu$ direnç kuvveti uygular. Dolayısıyla her iki alanın varlığında kararlı durumdaki kuvvet dengesi

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{e}{\mu}\mathbf{v}_e.$$

biçimindedir. Buradan,

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\mu} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}.$$

$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ için,

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = (-v_d\hat{\mathbf{x}}) \times (B\hat{\mathbf{z}}) = v_d B\hat{\mathbf{y}},$$

dolayısıyla

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{v_d}{\mu}\hat{\mathbf{x}} - v_d B\hat{\mathbf{y}}.}$$

Boyuna bileşen, çarpışmalara karşı sürüklenmenin devam etmesini sağlar. Enine bileşen ise manyetik kuvveti dengeler. Özellikle, manyetik kuvvet başlangıçta elektronları $-y$ yüzeyine doğru iter; elektronların burada birikmesi, $-y$ yönündeki gerekli alanı oluşturur.

Sayısal olarak,

$$bc = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-3}) = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2, \\ v_d = \frac{1.0}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-5})} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

Böylece

$$E_x = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ V m}^{-1}, \quad E_y = -25(0.10) = -2.5 \text{ V m}^{-1}, \quad E_z = 0.$$

Büyüklik

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{I}{nebc\mu} \sqrt{1 + (\mu B)^2} = \boxed{4.1 \text{ V m}^{-1}}.$$

olur. $+\hat{\mathbf{x}}$ yönünden $-\hat{\mathbf{y}}$ yönüne doğru ölçülen açı

$$\tan \theta = \frac{|E_y|}{E_x} = \mu B = 0.78,$$

bağıntısını sağlar ve buradan

$$\theta = 38^\circ.$$

elde edilir.

b) Enine potansiyel farkı

b doğrultusundaki iki karşılıklı yüzey üzerinde, boyuna koordinatları aynı olan karşılıklı noktaları seçelim.

$\mathbf{E} = -\nabla V$ olduğundan,

$$U_H = - \int_{-b/2}^{b/2} E_y dy = -E_y b = v_d B b.$$

Sürüklenme sürati yerine yazılırsa

$$U_H = \frac{IB}{nec}.$$

elde edilir.

Sayısal olarak,

$$U_H = \frac{(1.0)(0.10)}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-3})} = \boxed{0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}}.$$

$-y$ yüzeyinde elektronlar birikir ve bu yüzey daha düşük potansiyelindedir; $+y$ yüzeyi ise daha yüksek potansiyelindedir.

c) Alternatif akım ve manyetik alan için DC bileşeni

Yarı statik çalışma varsayalım: elektronların sürüklenmesi ve Hall yük dağılımı, uygulanan sinyalleri yeterince hızlı izlesin ve gerilim ölçüm kablolarında indüklenen parazit gerilim ihmal edilebilir olsun. Bu durumda anlık Hall gerilimi

$$U_H(t) = \frac{I(t)B(t)}{nec} = \frac{I_0 B_0}{nec} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta).$$

olur.

Şu özdeşliği kullanarak

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

şunu elde ederiz:

$$U_H(t) = \frac{I_0 B_0}{2nec} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)].$$

İkinci terimin bir periyot boyunca ortalaması sıfırdır. Dolayısıyla

$$U_{H,DC} = \overline{U_H} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

Eşdeğer olarak,

$$\overline{U_H} = \frac{I_{rms} B_{rms}}{nec} \cos \delta.$$

Çıkış, bir DC bileşeni ve uygulanan frekansın iki katında bir dalgalanma içerir. İki giriş arasında çeyrek periyotluk faz farkı olduğunda DC bileşeni sıfır olur.

d) AC gücü ölçme devresi

c) şıkkındaki sonuç, Hall elemanının bir çarpan olarak kullanılmasını sağlar: enine gerilimi, boyuna akımı ile manyetik alanın çarpımıyla orantılıdır.

Uygun bir devre şu bağlantılara sahiptir:

1. Bir alan bobinini cihaza seri bağlayınız. Hall çubuğunu, c doğrultusu alana paralel olacak şekilde bobinin içine yerleştiriniz. Doğrusal, tercihen hava çekirdekli bir bobin kullanınız; böylece

$$B(t) = k_I i_L(t),$$

olur; burada $i_L(t)$ cihaz akımı, k_I ise bobinin alan sabitidir.

2. AC şebekesine paralel olarak, Hall çubuğunun boyuna doğrultudaki iki uç kontağına seri bağlı, endüktansı ihmal edilebilir büyük bir R direncinden oluşan ayrı bir kol bağlayınız. Çubuğun boyuna direnci a) şıkkından bulunur:

$$r_H = \frac{E_x a}{I_H} = \frac{a}{ne\mu bc}.$$

Böylece, kolun reaktansı ihmal edilebilir olduğunda,

$$I_H(t) = \frac{u(t)}{R + r_H} = k_U u(t).$$

$R \gg r_H$ seçilmesi, $k_U \simeq 1/R$ olmasını sağlar ve algılama akımını sınırlar.

3. b doğrultusundaki karşılıklı yüzeylerde, aynı boyuna konumda bulunan Hall kontaklarını, giriş empedansı yüksek ve ortalama değeri ölçen bir voltmetreye bağlayınız. Ardından bir DC ölçü aleti bağlanmış, tampon devreli bir alçak geçiren filtre de uygundur. Çok sayıda AC periyodu üzerinden ortalama alınız.

Alan bobinindeki gerilim düşümünü ve gerilim algılama kolunun yükleme etkisini ihmal edelim. Bu durumda $u(t)$ aynı zamanda cihazın gerilimidir ve

$$U_H(t) = \frac{I_H(t)B(t)}{nec} = \frac{k_U k_I}{nec} u(t)i_L(t).$$

Dolayısıyla ortalaması

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} \overline{u(t)i_L(t)} = \frac{k_U k_I}{nec} P.$$

olur.

Sinüzoidal çalışma için şöyle yazalım:

$$u(t) = U_0 \sin \omega t, \quad i_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \varphi).$$

O hâlde

$$P = \frac{U_0 I_{L0}}{2} \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Dolayısıyla ölçü aleti, güç faktörüne bağımlılığı da içerecek şekilde tüketilen ortalama gücü ölçer. Watt cinsinden kalibrasyonu

$$P = \frac{nec}{k_U k_I} \overline{U_H}.$$

biçimindedir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Mars'ın yardımıyla Güneş sisteminden kaçan uzay sondası

Bir uzay araştırma projesinde, bir uzay sondasını Güneş sisteminin dışına göndermek için iki yöntem tartışılmaktadır. Birinci yöntem (i), sondayı Güneş sisteminden doğrudan kaçmasına yetecek kadar büyük bir hızla fırlatmaktır. İkinci yöntem (ii) göre ise sonda dış gezegenlerden birine yaklaşacak ve bu gezegenin yardımıyla hareket yönünü değiştirerek Güneş sisteminden kaçmak için gerekli hıza ulaşacaktır. Sondanın, bulunduğu noktada hangi alan daha kuvvetliyse yalnızca Güneş'in ya da gezegenin kütleçekim alanının etkisi altında hareket ettiğini varsayın.

a) (i) yöntemine göre fırlatma sırasında sondaya verilmesi gereken en küçük hızı ve bu hızın Dünya'nın hareketine göre yönünü belirleyin.

b) Sondanın a) kısmında belirlenen yönde, ancak farklı bir hızla fırlatıldığını varsayın. Sondanın Mars'ın yörüngesini keserken sahip olduğu hızı, yani bu yörüngeye paralel ve dik bileşenlerini belirleyin. Kesişme gerçekleştiğinde Mars, kesişme noktasının yakınında değildir.

c) Sondanın Mars'ın kütleçekim alanına girdiğini kabul edin. Sondanın Güneş sisteminden kaçabilmesi için Dünya'dan fırlatılırken sahip olması gereken en küçük hızı bulun.

İpucu: a) kısmının sonucundan, sondanın Mars'ın kütleçekim alanından çıktıktan sonra Güneş sisteminden kaçabilmesi için gerekli hızının en uygun büyüklüğünü ve yönünü biliyorsunuz.

(Karşılaşma sırasında Mars'ın tam konumunu dikkate almanız gerekmez.) Bu hız ile sondanın Mars'ın kütleçekim alanına girmeden önceki hız bileşenleri, yani b) kısmında belirlediğiniz bileşenler arasındaki bağıntıyı bulun. Sondanın enerjisinin korunumu hakkında ne söylenebilir?

d) (ii) yönteminde (i) yöntemine göre mümkün olan en büyük oransal enerji tasarrufunu tahmin edin. Notlar: Bütün gezegenlerin Güneş'in çevresinde dairesel yörüngelerde, aynı yönde ve aynı düzlemde dolandığını varsayın. Hava direncini, Dünya'nın kendi eksenini etrafındaki dönüşünü ve Dünya'nın kütleçekim alanından kaçmak için kullanılan enerjiyi ihmal edin.

Veriler: Dünya'nın Güneş çevresindeki hızı 30 km/s, Dünya'nın ve Mars'ın Güneş'e olan uzaklıklarının oranı ise 2/3'tür.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$V = 30 \text{ km s}^{-1}$ olsun ve u , Dünya'ya göre fırlatma süratini gösterson.

- **a)** Dünya'nın yörüngesel hareketi yönünde, şu süratle fırlatılmalıdır:

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

- **b)** Dünya'nın yörüngesel hareketi yönünde u süratıyla yapılan bir fırlatma için, Mars'ın yörüngesindeki Güneş merkezli hız bileşenleri

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}(V + u), \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2},$$

şeklindedir; burada $v_{\perp}$, ilk kesişimde radyal olarak dışarıya yönelmiştir. Bu yörüngeye ulaşmak için $u \geq 2.86 \text{ km s}^{-1}$ olmalıdır.

- **c)** $V_M = \sqrt{2/3} V$ olmak üzere, Dünya'ya göre en küçük fırlatma sürati

$$u_{ii,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

olur. Fırlatma, Dünya'nın yörüngesel hareketi yönündedir; en uygun çıkış hızı da Mars'ın yörüngesel hareketi yönünde ve Mars'ın yörüngesine teğettir.

- **d)** Fırlatma enerjisinde sağlanabilecek en büyük oransal tasarruf

$$\frac{E_i - E_{ii}}{E_i} = 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \simeq 0.800,$$

yani yaklaşık 80% olur.

Çözüm

Dünya'nın ve Mars'ın yörünge yarıçaplarını sırasıyla r ve R ile gösterelim ve $\mu = GM_{\odot}$ tanımını yapalım. Verilen oran ve dairesel yörünge koşulu şu bağıntıları verir:

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \quad V^2 = \frac{\mu}{r}.$$

Aşağıda, aksi açıkça belirtilmedikçe sondanın bütün hızları Güneş'e göredir. Belirtildiği üzere Dünya'nın kütleçekim alanı ihmal edilmektedir.

a)

Sonda, birim kütle başına mekanik enerjisi negatif değilse Güneş'ten kaçır:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} \geq 0.$$

Dolayısıyla Güneş'e göre başlangıç sürati şu koşulu sağlamalıdır:

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2} V.$$

Dünya'ya göre verilen bir u fırlatma sürati için, Güneş'e göre mümkün olan en büyük sürat $V + u$ olur; bu değer, Dünya'nın hareketiyle aynı yönde fırlatılarak elde edilir. Bu nedenle

$$V + u_{i,\min} = \sqrt{2} V,$$

dolayısıyla

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

Buna karşılık gelen Güneş'e göre sürat 42.4 km s^{-1} olur. Bu eşik değerinde yörünge paraboliktir ve sonsuzdaki sürat sıfırdır.

b)

Dünya'nın yörüngesel hareketi yönündeki bir fırlatma için

$$v_0 = V + u.$$

olarak tanımlayalım. Başlangıç hızı Dünya'nın yörüngesine teğettir.

Dünya'nın ve Mars'ın yörüngeleri arasında Güneş'in uyguladığı kuvvet merkezî olduğundan, Güneş'e göre açısal momentum korunur:

$$rv_0 = Rv_{\parallel}.$$

Bunun sonucunda,

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}(V + u).$$

Mekanik enerjinin korunumu şu bağıntıyı verir:

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{\mu}{R}.$$

$\mu/r = V^2$ ve $\mu/R = \frac{2}{3}V^2$ kullanılırsa,

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 - \frac{2}{3}V^2.$$

$v_{\parallel}^2 = \frac{4}{9}v_0^2$ çıkarılırsa,

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}v_0^2 - \frac{2}{3}V^2} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2}.$$

Bu, ilk kesişmedeki dışarıya yönelmiş radyal bileşendir. İçeriye doğru bir kesişmede işareti tersine döner.

Sondanın Mars'ın yörünge yarıçapına ulaşabilmesi için karekök içindeki ifade negatif olmamalıdır:

$$v_0^2 \geq \frac{6}{5}V^2.$$

Buradan

$$u \geq \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right)V = 2.86 \text{ km s}^{-1}.$$

Eşitlik, günöte noktası Mars'ın yörüngesine ancak değen bir yörüngeye karşılık gelir.

c)

Mars'ın yörüngesel sürati

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}}V = 24.5 \text{ km s}^{-1}.$$

olur.

Karşılaşmanın dar bir bölgede gerçekleştiğini ve Mars'ın yörüngesel hareketine kıyasla kısa sürdüğünü kabul edelim; böylece Mars'ın hızı pratik olarak sabittir. Mars referans sisteminde, gelen sondanın hız bileşenleri

$$w_{\parallel} = v_{\parallel} - V_M, \quad w_{\perp} = v_{\perp}.$$

olur. Dolayısıyla büyüklüğü şu bağıntıyla verilir:

$$w^2 = (v_{\parallel} - V_M)^2 + v_{\perp}^2.$$

Bu referans sisteminde kütleçekim etkisiyle gerçekleşen karşılaşma sırasında mekanik enerji korunur. Karşılaşmadan önce ve sonra Mars'a eşit uzaklıklarda, bağıl sürat aynıdır; ancak hızın yönü değişir.

Çıkıştaki bağıl hız Mars'ın hareketiyle θ açısı yapıyorsa, çıkıştaki Güneş'e göre sürat şu bağıntıyı sağlar:

$$v_{\text{out}}^2 = V_M^2 + w^2 + 2V_M w \cos \theta.$$

Bu sürat, $\theta = 0$ olduğunda en büyüktür ve

$$v_{\text{out,max}} = V_M + w.$$

olur. Dolayısıyla en uygun karşılaşma, çıkıştaki bağıl hızı Mars'ın hareketi yönüne çevirir.

Mars'ın yörünge yarıçapında Güneş'ten kaçış sürati

$$v_{\text{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} V_M.$$

olur. Sonuç olarak gerekli en küçük bağıl sürat

$$w_{\min} = (\sqrt{2} - 1)V_M.$$

olur.

Şimdi b) kısmında bulunan bileşenleri kullanalım:

$$\begin{aligned} w^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - 2V_M v_{\parallel} + V_M^2 \\ &= v_0^2 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 + V_M^2. \end{aligned}$$

$V_M^2 = \frac{2}{3}V^2$ olduğundan bu ifade

$$w^2 = v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0.$$

biçiminde sadeleşir. Kaçış eşiğinde,

$$v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 V_M^2.$$

Pozitif kök

$$v_{0,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] = 35.555 \dots \text{ km s}^{-1}.$$

olur. Dolayısıyla Dünya'ya göre gerekli fırlatma sürati

$$u_{\text{ii,min}} = v_{0,\min} - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

olur. Bu değer, Mars'ın yörüngesine ulaşmak için gereken 2.86 km s^{-1} değerinden büyüktür; dolayısıyla geliş yörüngesi mümkündür.

Dünya'nın yörüngesel hareketi yönünde fırlatma, olası fırlatma yönleri arasında gerekli sürati de en aza indirir. Bunu görmek için, Dünya'nın hareketine göre fırlatma açısı α olsun ve $q = r/R = 2/3$ yazalım. Aynı enerji ve açısal momentum bağıntıları şu sonucu verir:

$$w^2 = u^2 + 2Vu(1 - q^{3/2}) \cos \alpha + V^2(3q - 1 - 2q^{3/2}).$$

Sabit u için, $q < 1$ olduğundan bu ifade $\cos \alpha = 1$ iken en büyüktür. Dolayısıyla Dünya'nın yörüngesel hareketi yönünde fırlatma, verilen bir fırlatma sürati için karşılaşmada Mars'a göre mümkün olan en büyük bağlı sürati sağlar.

Sayısal olarak, en uygun geliş yörüngesinde

$$v_{\parallel} = 23.70 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{\perp} = 10.12 \text{ km s}^{-1}.$$

olur. Bunlar $w = 10.15 \text{ km s}^{-1}$ sonucunu verir. En uygun yön değişiminden sonra,

$$v_{\text{out}} = V_M + w = 34.64 \text{ km s}^{-1} = \sqrt{2} V_M,$$

gerektiği gibi elde edilir.

Enerjinin korunumu ihlal edilmez. Sondanın Güneş'e göre enerjisi karşılaşma sırasında şu miktarda artar:

$$\Delta E = m \mathbf{V}_M \cdot (\mathbf{w}_{\text{out}} - \mathbf{w}_{\text{in}}).$$

En uygun yön değişimi için bu ifade

$$\Delta E = m V_M [w - (v_{\parallel} - V_M)] > 0.$$

olur. Bu enerji Mars'ın yörüngesel hareketinden gelir. Mars'ın kütlesi sondaninkinden çok daha büyük olduğundan, Mars'ın hızında buna karşılık gelen değişim ihmal edilebilir.

d)

Dünya'dan kaçış enerjisi ihmal edildiğinde, Dünya referans sisteminde fırlatma sırasında verilen enerji

$$E_{\text{launch}} = \frac{1}{2} m u^2.$$

olur. Dolayısıyla en büyük oransal tasarruf

$$\begin{aligned} f_{\text{max}} &= \frac{E_i - E_{ii}}{E_i} \\ &= 1 - \left(\frac{u_{ii,\text{min}}}{u_{i,\text{min}}} \right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{5.55519}{12.42641} \right)^2 \\ &= 0.80015. \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f_{\text{max}} \simeq 80\%.$$

Buna karşılık gelen birim sonda kütlesi başına fırlatma enerjileri, doğrudan kaçış için yaklaşık 77.2 MJ kg^{-1} , ideal Mars yardımıyla kaçış için ise 15.4 MJ kg^{-1} olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.