

IPhO 1985

Теоретические задачи и решения · Портоторж, Югославия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1985/

Задача 1: Антенная решётка для радиосвязи

Юный радиолюбитель поддерживает радиосвязь с двумя девушками, живущими в двух городах. Он располагает антенную решётку так, чтобы, когда девушка, живущая в городе А, принимает сигнал максимальной интенсивности, девушка, живущая в городе В, не принимает сигнала, и наоборот. Решётка состоит из двух вертикальных штыревых антенн, излучающих с одинаковой интенсивностью равномерно во всех направлениях в горизонтальной плоскости.

а) Найдите параметры решётки, то есть расстояние между штырями, её ориентацию и сдвиг фаз между электрическими сигналами, подаваемыми на штыри, при которых расстояние между штырями минимально.

б) Найдите численное решение, если у юноши есть радиостанция, работающая на частоте 27 МГц, и он устанавливает антенную решётку в Портоторже. По карте он определил, что углы между направлением на север и направлениями на А (Копер) и на В (небольшой город Буге в Истрии) равны соответственно 72° и 157° .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- а) Пусть α — угол между направлениями на города из места расположения решётки, а λ — длина волны. Минимальное расстояние равно

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

Прямая, соединяющая штыри, должна быть перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла между направлениями на два города. Пронумеруем штыри так, чтобы штырь 2 находился относительно штыря 1 в направлении $\hat{n}_A - \hat{n}_B$, где единичные векторы направлены к городам. Для получения максимума сигнала в А и нулевого сигнала в В колебания штыря 2 должны **отставать по фазе от колебаний штыря 1 на 90°** ; для обратного случая они должны **опережать их по фазе на 90°** .

- **b)** Угол между направлениями равен 85° , откуда

$$d_{\min} \approx 4.1 \text{ м}.$$

Прямая, соединяющая штыри, имеет азимуты

$$24.5^\circ \text{ и } 204.5^\circ$$

отсчитываемые по часовой стрелке от направления на север. Для максимального приёма в Копере и нулевого приёма в Буге колебания северо-восточного штыря должны отставать по фазе от колебаний юго-западного штыря на 90° ; изменение знака разности фаз меняет эти условия приёма местами.

Решение

a)

Сигналы от штырей когерентны, имеют одинаковую частоту и одинаковую вертикальную поляризацию. Используем приближение дальней зоны: расстояния от решётки до городов намного больше расстояния между штырями, поэтому волны, приходящие в каждый из городов, имеют равные амплитуды и практически параллельные направления распространения.

Обозначим горизонтальный вектор перемещения от штыря 1 к штырю 2 через $\mathbf{d}$, а его модуль — через d . Определим разность фаз электрических сигналов как

$$\delta = \phi_2 - \phi_1,$$

где колебания источников пропорциональны $\cos(\omega t + \phi_j)$. Таким образом, положительное значение δ означает, что колебания штыря 2 опережают по фазе колебания штыря 1.

Для удалённого приёмника в направлении $\hat{\mathbf{n}}$ длины путей удовлетворяют соотношению

$$r_2 - r_1 \simeq -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}.$$

Следовательно, разность фаз принимаемых волн равна

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \delta - k(r_2 - r_1) = \delta + k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Если каждый штырь по отдельности создаёт в месте расположения этого приёмника интенсивность I_0 , то по принципу суперпозиции

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

Поэтому условие максимума имеет вид $\Delta = 2m\pi$, а условие нулевого сигнала — $\Delta = (2n + 1)\pi$.

Для максимума в А и нулевого сигнала в В

$$\begin{aligned} \delta + k\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= 2m\pi, \\ \delta + k\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= (2n + 1)\pi. \end{aligned}$$

Вычитание исключает регулируемую разность фаз электрических сигналов:

$$k(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d} = \text{нечётное кратное } \pi.$$

Таким образом,

$$|(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d}| \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Поскольку угол между двумя единичными векторами равен α ,

$$|\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B| = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Модуль скалярного произведения не может превышать произведение модулей векторов, поэтому

$$2d \sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

Равенство достигается, когда $\mathbf{d}$ параллелен $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. Кроме того,

$$(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_A + \hat{\mathbf{n}}_B) = 0.$$

Поскольку сумма направлена вдоль биссектрисы внутреннего угла, искомая прямая, соединяющая штыри, перпендикулярна этой биссектрисе.

Выберем направление от штыря 1 к штырю 2 вдоль $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. При минимальном расстоянии

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d_{\min} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{4}, \quad \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda}{4}.$$

Следовательно, разности фаз принимаемых волн равны

$$\Delta_A = \delta + \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_B = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Для максимального приёма в А выберем

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Тогда $\Delta_A = 0$ и $\Delta_B = -\pi$, как и требуется.

Для максимального приёма в В выберем

$$\delta = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Тогда $\Delta_B = 0$ и $\Delta_A = \pi$. Таким образом, для переключения между двумя режимами работы необходимо изменить разность фаз электрических сигналов на 180° .

b)

Угол между направлениями на города равен

$$\alpha = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ.$$

Используя $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, получаем длину волны

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8}{27 \times 10^6} \simeq 11.1 \text{ m}.$$

Следовательно,

$$d_{\min} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} \text{ м} \simeq 4.11 \text{ м},$$

или приближённо

$$\boxed{d_{\min} = 4.1 \text{ м}}.$$

Биссектриса внутреннего угла имеет азимут

$$\frac{72^\circ + 157^\circ}{2} = 114.5^\circ.$$

Следовательно, перпендикулярная ей прямая, соединяющая штыри, имеет азимут

$$114.5^\circ - 90^\circ = 24.5^\circ,$$

а противоположное направление имеет азимут 204.5° .

Обозначим юго-западный штырь номером 1, а северо-восточный — номером 2. Проекция на направления к городам равны

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d \cos(72^\circ - 24.5^\circ) = d \sin 42.5^\circ = \frac{\lambda}{4},$$

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = d \cos(157^\circ - 24.5^\circ) = -\frac{\lambda}{4}.$$

Таким образом, требуются следующие настройки фаз:

Требуемый приём	Фаза колебаний северо-восточного штыря относительно юго-западного
Максимум в Копере; нулевой сигнал в Буге	Отставание на 90°
Максимум в Буге; нулевой сигнал в Копере	Опережение на 90°

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Эффект Холла в бруске InSb

По длинному бруску из полупроводника InSb, имеющему форму прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a , b и c ($a \gg b \gg c$), течёт ток I , параллельный ребру a . Брусок находится во внешнем магнитном поле B , параллельном ребру c . Магнитным полем, создаваемым током I , можно пренебречь. Носителями тока являются электроны. Средняя скорость электронов в полупроводнике при наличии только электрического поля равна $v = \mu E$, где μ называется подвижностью. Если присутствует также магнитное поле, электрическое поле перестаёт быть параллельным току. Это явление известно как эффект Холла.

а) Определите величину и направление электрического поля в бруске, при которых в нём течёт описанный выше ток.

б) Вычислите разность электрических потенциалов между противоположными точками на поверхностях бруска в направлении ребра b .

с) Найдите аналитическое выражение для постоянной составляющей разности электрических потенциалов в случае b), если ток и магнитное поле являются переменными; $I = I_0 \sin \omega t$ и $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$.

d) Разработайте и объясните электрическую схему, которая позволяла бы, используя результат с), измерять мощность, потребляемую электрическим прибором, подключённым к сети переменного тока.

Данные: Подвижность электронов в InSb равна $7.8 \text{ м}^2\text{T/Vs}$, концентрация электронов в InSb равна $2.5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $I = 1.0 \text{ A}$, $B = 0.10 \text{ T}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ mm}$, $e_0 = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Выберем правую систему координат, в которой направление $+\hat{x}$ совпадает с условным направлением тока, а $+\hat{z}$ — с направлением магнитного поля. Пусть $e = -e_0 > 0$, n — концентрация электронов, и определим напряжение Холла как

$$U_H = V(y = +b/2) - V(y = -b/2).$$

- a) Электрическое поле равно

$$\mathbf{E} = \frac{I}{nec\mu} \hat{x} - \frac{IB}{nec} \hat{y} = (3.2\hat{x} - 2.5\hat{y}) \text{ V m}^{-1}.$$

Его модуль равен 4.1 V m^{-1} . Оно перпендикулярно $\mathbf{B}$ и отклонено на угол

$$\theta = \tan^{-1}(\mu B) = 38^\circ$$

от направления тока в сторону $-\hat{y}$, то есть в направлении $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

- b)

$$U_H = \frac{IB}{nec} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

Грань $+y$ имеет более высокий потенциал.

- c)

$$U_{H,DC} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

- **d)** Используем последовательно включённую токовую катушку для создания поля $B(t) = k_I i_L(t)$, а ток через брусок Холла зададим с помощью резистивной ветви измерения напряжения так, чтобы $I_H(t) = k_U u(t)$. Тогда усредняющий вольтметр, подключённый между гранями, разделёнными расстоянием b , покажет

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} P, \quad P = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Его шкалу следует проградуировать непосредственно в ваттах.

Решение

Рассмотрим однородную центральную область длинного бруска, пренебрегая контактными эффектами и магнитным полем, создаваемым протекающим по нему током. Поперечные грани не замкнуты во внешнюю цепь, поэтому установившийся поперечный ток отсутствует.

При численных расчётах подвижность принимается равной $7.8 \text{ м}^2/(\text{В с})$, как того требует соотношение $v = \mu E$; указанная в данных единица $\text{м}^2\text{T/Vs}$ несовместима с этим соотношением по размерности.

а) Величина и направление электрического поля

Плотность тока и дрейфовая скорость электронов связаны соотношением

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_e.$$

Поскольку площадь поперечного сечения равна bc ,

$$\mathbf{j} = \frac{I}{bc}\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_e = -v_d\hat{\mathbf{x}}, \quad v_d = \frac{I}{nebc}.$$

Приведённый закон подвижности связывает модуль скорости с модулем напряжённости поля. В векторной форме он означает, что при отсутствии магнитного поля электроны дрейфуют в направлении, противоположном электрическому полю.

В обычной модели с изотропной подвижностью столкновения создают среднюю силу сопротивления $-e\mathbf{v}_e/\mu$. Поэтому в установившемся режиме баланс сил при наличии обоих полей имеет вид

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{e}{\mu}\mathbf{v}_e.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\mu} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}.$$

При $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = (-v_d\hat{\mathbf{x}}) \times (B\hat{\mathbf{z}}) = v_d B\hat{\mathbf{y}},$$

так что

$$\mathbf{E} = \frac{v_d}{\mu}\hat{\mathbf{x}} - v_d B\hat{\mathbf{y}}.$$

Продольная составляющая поддерживает дрейф, преодолевая сопротивление, обусловленное столкновениями. Поперечная составляющая уравнивает магнитную силу. В частности, вначале магнитная сила направляет электроны к грани $-y$; их накопление создаёт необходимое поле в направлении $-y$.

Численно,

$$bc = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-3}) = 1.0 \times 10^{-5} \text{ м}^2,$$

$$v_d = \frac{1.0}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-5})} = 25 \text{ м с}^{-1}.$$

Таким образом,

$$E_x = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ В м}^{-1}, \quad E_y = -25(0.10) = -2.5 \text{ В м}^{-1}, \quad E_z = 0.$$

Модуль поля равен

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{I}{necb\mu} \sqrt{1 + (\mu B)^2} = \boxed{4.1 \text{ В м}^{-1}}.$$

Угол, отсчитываемый от $+\hat{x}$ в сторону $-\hat{y}$, удовлетворяет соотношению

$$\tan \theta = \frac{|E_y|}{E_x} = \mu B = 0.78,$$

откуда

$$\boxed{\theta = 38^\circ}.$$

б) Поперечная разность потенциалов

Выберем противоположные точки на двух гранях, разделённых расстоянием b , с одинаковой продольной координатой. Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla V$,

$$U_H = - \int_{-b/2}^{b/2} E_y dy = -E_y b = v_d B b.$$

Подставляя дрейфовую скорость, получаем

$$\boxed{U_H = \frac{IB}{nec}}.$$

Численно,

$$U_H = \frac{(1.0)(0.10)}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-3})} = \boxed{0.025 \text{ В} = 25 \text{ мВ}}.$$

На грани $-y$ накапливаются электроны, и её потенциал ниже; грань $+y$ имеет более высокий потенциал.

с) Постоянная составляющая при переменных токе и магнитном поле

Предположим, что режим квазистатический: дрейф электронов и распределение холловского заряда достаточно быстро следуют за приложенными сигналами, а индуктивными наводками в проводах измерительной цепи напряжения можно пренебречь. Тогда мгновенное напряжение Холла равно

$$U_H(t) = \frac{I(t)B(t)}{nec} = \frac{I_0 B_0}{nec} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta).$$

Используя тождество

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

получаем

$$U_H(t) = \frac{I_0 B_0}{2nec} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)].$$

Среднее значение второго слагаемого за период равно нулю. Следовательно,

$$U_{H,DC} = \overline{U_H} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

Эквивалентная запись:

$$\overline{U_H} = \frac{I_{rms} B_{rms}}{nec} \cos \delta.$$

Выходной сигнал содержит постоянную составляющую и пульсацию с частотой, вдвое превышающей частоту приложенных сигналов. Его постоянная составляющая обращается в нуль, когда два входных сигнала находятся в квадратуре.

d) Схема для измерения мощности переменного тока

Результат пункта с) позволяет использовать элемент Холла в качестве умножителя: его поперечное напряжение пропорционально произведению продольного тока и магнитного поля.

Подходящая схема предусматривает следующие соединения:

1. Включите катушку, создающую магнитное поле, последовательно с прибором. Поместите брусок Холла внутри катушки так, чтобы его направление s было параллельно полю. Используйте катушку с линейной характеристикой, предпочтительно без сердечника, так чтобы

$$B(t) = k_I i_L(t),$$

где $i_L(t)$ — ток прибора, а k_I — постоянная катушки, связывающая поле с током.

2. Подключите параллельно сети переменного тока отдельную ветвь, состоящую из безындуктивного резистора с большим сопротивлением R , включённого последовательно с двумя продольными торцевыми контактами бруска Холла. Продольное сопротивление бруска следует из пункта а):

$$r_H = \frac{E_x a}{I_H} = \frac{a}{ne\mu b c}.$$

Поэтому при пренебрежимо малом реактивном сопротивлении ветви

$$I_H(t) = \frac{u(t)}{R + r_H} = k_U u(t).$$

Выбор $R \gg r_H$ даёт $k_U \simeq 1/R$ и ограничивает измерительный ток.

3. Подключите противоположные холловские контакты на гранях, разделённых расстоянием b , расположенные при одинаковой продольной координате, к усредняющему вольтметру с высоким входным сопротивлением. Подойдёт также фильтр нижних частот с буферным каскадом, за которым включён измеритель постоянного напряжения. Выполняйте усреднение за много периодов переменного тока.

Пренебрежём падением напряжения на катушке и нагрузкой, создаваемой ветвью измерения напряжения. Тогда $u(t)$ является также напряжением на приборе, и

$$U_H(t) = \frac{I_H(t)B(t)}{nec} = \frac{k_U k_I}{nec} u(t) i_L(t).$$

Следовательно, его среднее значение равно

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} \overline{u(t) i_L(t)} = \frac{k_U k_I}{nec} P.$$

Для синусоидального режима запишем

$$u(t) = U_0 \sin \omega t, \quad i_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \varphi).$$

Тогда

$$P = \frac{U_0 I_{L0}}{2} \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Таким образом, измеритель показывает среднюю потребляемую мощность с учётом зависимости от коэффициента мощности. Его градуировка в ваттах задаётся соотношением

$$P = \frac{nec}{k_U k_I} \overline{U_H}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Выход космического зонда из Солнечной системы с помощью Марса

В рамках проекта космических исследований обсуждаются две схемы запуска космического зонда за пределы Солнечной системы. Первая схема (i) состоит в том, чтобы сообщить зонду скорость, достаточную для непосредственного выхода из Солнечной системы. Согласно второй схеме (ii), зонд должен приблизиться к одной из внешних планет и с её помощью изменить направление движения и достичь скорости, необходимой для выхода из Солнечной системы. Считайте, что зонд движется под действием гравитационного поля только Солнца или только планеты — в зависимости от того, какое из этих полей сильнее в данной точке.

а) Определите минимальную скорость, которую следует сообщить зонду при запуске по схеме (i), и её направление относительно направления движения Земли.

б) Предположим, что зонд был запущен в направлении, определённом в а), но с другой скоростью. Определите скорость зонда при пересечении орбиты Марса, то есть её составляющие, параллельную и перпендикулярную этой орбите. В момент пересечения

Марс не находится вблизи точки пересечения.

с) Пусть зонд входит в гравитационное поле Марса. Найдите минимальную скорость запуска с Земли, необходимую для выхода зонда из Солнечной системы.

Указание: Из результата а) вам известны оптимальные модуль и направление скорости зонда, необходимые для выхода из Солнечной системы после того, как он покинет гравитационное поле Марса. (Точное положение Марса во время сближения учитывать не требуется.) Найдите связь между этой скоростью и составляющими скорости перед входом зонда в гравитационное поле Марса, то есть составляющими, определёнными в б). Что можно сказать о сохранении энергии зонда?

d) Оцените максимально возможную относительную экономию энергии при использовании схемы (ii) по сравнению со схемой (i). Примечания: Считайте, что все планеты обращаются вокруг Солнца по круговым орбитам в одном направлении и в одной плоскости.

Пренебрегите сопротивлением воздуха, вращением Земли вокруг своей оси, а также энергией, затрачиваемой на преодоление гравитационного притяжения Земли.

Данные: Скорость движения Земли вокруг Солнца равна 30 км/с, а отношение расстояний от Земли и Марса до Солнца равно 2/3.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть $V = 30 \text{ km s}^{-1}$, а u обозначает скорость запуска относительно Земли.

- а) Запуск следует осуществлять в направлении орбитального движения Земли со скоростью

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

- б) При запуске в направлении движения Земли со скоростью u гелиоцентрические составляющие скорости на орбите Марса равны

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}(V + u), \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2},$$

где при первом пересечении $v_{\perp}$ направлена радиально наружу. Для достижения этой орбиты необходимо $u \geq 2.86 \text{ km s}^{-1}$.

- с) При $V_M = \sqrt{2/3} V$ минимальная скорость запуска относительно Земли равна

$$u_{ii,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

Запуск осуществляется в направлении движения Земли; оптимальная скорость после сближения также направлена по ходу движения Марса, по касательной к его орбите.

- **d)** Максимальная относительная экономия энергии запуска равна

$$\frac{E_i - E_{ii}}{E_i} = 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \simeq 0.800,$$

или приблизительно $\boxed{80\%}$.

Решение

Обозначим радиусы орбит Земли и Марса через r и R соответственно и положим $\mu = GM_\odot$. Из заданного отношения расстояний и условия движения по круговой орбите получаем

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \quad V^2 = \frac{\mu}{r}.$$

Все приведённые ниже скорости зонда даны в гелиоцентрической системе отсчёта, если явно не указано иное. Согласно условию, гравитационным полем Земли пренебрегаем.

a)

Зонд преодолевает притяжение Солнца, если его удельная механическая энергия неотрицательна:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} \geq 0.$$

Следовательно, его начальная гелиоцентрическая скорость должна удовлетворять условию

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V.$$

При заданной скорости запуска относительно Земли u наибольшая возможная гелиоцентрическая скорость равна $V + u$; она достигается при запуске в направлении движения Земли. Поэтому

$$V + u_{i,\min} = \sqrt{2}V,$$

откуда

$$\boxed{u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

Соответствующая гелиоцентрическая скорость равна 42.4 km s^{-1} . При этом пороговом значении траектория является параболической, а скорость на бесконечности равна нулю.

b)

Для запуска в направлении движения Земли положим

$$v_0 = V + u.$$

Начальная скорость направлена по касательной к орбите Земли.

Между орбитами Земли и Марса сила притяжения Солнца является центральной, поэтому момент импульса относительно Солнца сохраняется:

$$rv_0 = Rv_{\parallel}.$$

Следовательно,

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}(V + u).$$

Закон сохранения механической энергии даёт

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{\mu}{R}.$$

Используя $\mu/r = V^2$ и $\mu/R = \frac{2}{3}V^2$, получаем

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 - \frac{2}{3}V^2.$$

Вычитая $v_{\parallel}^2 = \frac{4}{9}v_0^2$, находим

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}v_0^2 - \frac{2}{3}V^2} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2}.$$

Это радиальная составляющая, направленная наружу при первом пересечении. При пересечении орбиты на пути к Солнцу её знак меняется на противоположный.

Чтобы зонд достиг радиуса орбиты Марса, подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$$v_0^2 \geq \frac{6}{5}V^2.$$

Отсюда

$$u \geq \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right)V = 2.86 \text{ km s}^{-1}.$$

Равенство соответствует орбите, которая лишь касается орбиты Марса в своём афелии.

с)

Орбитальная скорость Марса равна

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}}V = 24.5 \text{ km s}^{-1}.$$

Будем считать, что сближение происходит в небольшой области пространства и за время, малое по сравнению с характерным временем орбитального движения Марса, так что скорость Марса можно считать постоянной. В системе отсчёта Марса скорость подлетающего зонда имеет составляющие

$$w_{\parallel} = v_{\parallel} - V_M, \quad w_{\perp} = v_{\perp}.$$

Поэтому её модуль определяется выражением

$$w^2 = (v_{\parallel} - V_M)^2 + v_{\perp}^2.$$

В этой системе отсчёта при гравитационном сближении механическая энергия сохраняется. На одинаковых расстояниях от Марса до и после сближения модуль относительной скорости одинаков, хотя её направление меняется.

Если относительная скорость после сближения составляет угол θ с направлением движения Марса, то гелиоцентрическая скорость после сближения удовлетворяет соотношению

$$v_{\text{out}}^2 = V_M^2 + w^2 + 2V_M w \cos \theta.$$

Она максимальна при $\theta = 0$, что даёт

$$v_{\text{out,max}} = V_M + w.$$

Таким образом, при оптимальном сближении относительная скорость после него направлена вдоль движения Марса.

Скорость убегания от Солнца на расстоянии, равном радиусу орбиты Марса, составляет

$$v_{\text{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} V_M.$$

Следовательно, минимальная необходимая относительная скорость равна

$$w_{\min} = (\sqrt{2} - 1)V_M.$$

Теперь воспользуемся составляющими, найденными в пункте b):

$$\begin{aligned} w^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - 2V_M v_{\parallel} + V_M^2 \\ &= v_0^2 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 + V_M^2. \end{aligned}$$

Поскольку $V_M^2 = \frac{2}{3}V^2$, это выражение упрощается до

$$w^2 = v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0.$$

При пороговой скорости выхода из Солнечной системы

$$v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 V_M^2.$$

Положительный корень равен

$$v_{0,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] = 35.555 \dots \text{ km s}^{-1}.$$

Следовательно, необходимая скорость запуска относительно Земли равна

$$u_{\text{ii,min}} = v_{0,\min} - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

Она превышает значение 2.86 km s^{-1} , необходимое для достижения орбиты Марса, поэтому такая траектория подлёта возможна.

Запуск в направлении движения Земли также минимизирует необходимую скорость среди всех возможных направлений запуска. Чтобы это показать, обозначим через α угол запуска относительно направления движения Земли и положим $q = r/R = 2/3$. Те же соотношения для энергии и момента импульса дают

$$w^2 = u^2 + 2Vu(1 - q^{3/2}) \cos \alpha + V^2(3q - 1 - 2q^{3/2}).$$

При фиксированном u это выражение максимально при $\cos \alpha = 1$, поскольку $q < 1$. Таким образом, запуск в направлении движения Земли обеспечивает наибольшую возможную скорость относительно Марса перед сближением при заданной скорости запуска.

Численные значения составляющих скорости для оптимальной траектории подлёта равны

$$v_{\parallel} = 23.70 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{\perp} = 10.12 \text{ km s}^{-1}.$$

Они дают $w = 10.15 \text{ km s}^{-1}$. После оптимального поворота

$$v_{\text{out}} = V_M + w = 34.64 \text{ km s}^{-1} = \sqrt{2} V_M,$$

как и требуется.

Закон сохранения энергии при этом не нарушается. Энергия зонда в гелиоцентрической системе отсчёта увеличивается при сближении на

$$\Delta E = m \mathbf{V}_M \cdot (\mathbf{w}_{\text{out}} - \mathbf{w}_{\text{in}}).$$

Для оптимального поворота это выражение принимает вид

$$\Delta E = m V_M [w - (v_{\parallel} - V_M)] > 0.$$

Эта энергия приобретается за счёт орбитального движения Марса. Соответствующее изменение скорости Марса пренебрежимо мало, поскольку его масса намного больше массы зонда.

d)

Если пренебречь энергией, необходимой для преодоления притяжения Земли, то энергия, сообщаемая при запуске в системе отсчёта Земли, равна

$$E_{\text{launch}} = \frac{1}{2} m u^2.$$

Поэтому максимальная относительная экономия составляет

$$\begin{aligned} f_{\text{max}} &= \frac{E_i - E_{ii}}{E_i} \\ &= 1 - \left(\frac{u_{ii,\text{min}}}{u_{i,\text{min}}} \right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{5.55519}{12.42641} \right)^2 \\ &= 0.80015. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{f_{\text{max}} \simeq 80\%.$$

Соответствующие энергии запуска на единицу массы зонда составляют приблизительно 77.2 MJ kg^{-1} при непосредственном выходе из Солнечной системы и 15.4 MJ kg^{-1} при идеальном гравитационном манёвре у Марса.

Решение проверено по официальному решению.