

IPhO 1985

Problemas teóricos y soluciones · Portorož, Yugoslavia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1985/

Problema 1: Conjunto de antenas para un enlace de radio

Un joven radioaficionado mantiene un enlace de radio con dos chicas que viven en dos localidades. Coloca un conjunto de antenas de modo que, cuando la chica que vive en la localidad A recibe una señal máxima, la chica que vive en la localidad B no recibe señal, y viceversa. El conjunto está formado por dos antenas de varilla verticales que transmiten con igual intensidad y de manera uniforme en todas las direcciones del plano horizontal.

a) Determine los parámetros del conjunto, es decir, la distancia entre las varillas, su orientación y el desfase entre las señales eléctricas suministradas a las varillas, de modo que la distancia entre estas sea mínima.

b) Obtenga la solución numérica si el joven dispone de una estación de radio que transmite a 27 MHz e instala el conjunto de antenas en Portorož. Utilizando el mapa, ha determinado que los ángulos entre el norte y las direcciones de A (Koper) y B (la pequeña localidad de Buje, en Istria) son 72° y 157° , respectivamente.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a) Sea α la separación angular entre las localidades vistas desde el conjunto de antenas, y sea λ la longitud de onda. La separación mínima es

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

La recta que une las varillas debe ser perpendicular a la bisectriz interior de las dos direcciones hacia las localidades. Numere las varillas de modo que la varilla 2 se encuentre en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ desde la varilla 1, donde los vectores unitarios apuntan hacia las localidades. La varilla 2 debe **estar retrasada 90° respecto a la varilla 1** para que A reciba un máximo y B una señal nula; debe **estar adelantada 90°** para que ocurra lo contrario.

- **b)** La separación angular es 85° , lo que da

$$d_{\min} \approx 4.1 \text{ m}.$$

La recta que une las varillas tiene los acimutes

$$24.5^\circ \text{ y } 204.5^\circ$$

medidos en sentido horario desde el norte. La varilla situada al noreste debe estar retrasada 90° respecto a la situada al suroeste para obtener una recepción máxima en Koper y nula en Buje; al invertir la relación de fase se intercambian ambas situaciones.

Solución

a)

Las señales de las varillas son coherentes, tienen la misma frecuencia y presentan la misma polarización vertical. Utilizamos la aproximación de campo lejano: las localidades están mucho más lejos del conjunto de antenas que la separación entre las varillas, de modo que las ondas que llegan a cualquiera de las localidades tienen amplitudes iguales y direcciones de propagación prácticamente paralelas.

Sea $\mathbf{d}$ el desplazamiento horizontal desde la varilla 1 hasta la varilla 2, de módulo d . Definimos la diferencia de fase eléctrica mediante

$$\delta = \phi_2 - \phi_1,$$

donde las oscilaciones de las fuentes son proporcionales a $\cos(\omega t + \phi_j)$. Por tanto, un valor positivo de δ significa que la varilla 2 está adelantada respecto a la varilla 1.

Para un receptor lejano situado en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$, las longitudes de los trayectos satisfacen

$$r_2 - r_1 \simeq -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}.$$

En consecuencia, la diferencia de fase entre las ondas recibidas es

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \delta - k(r_2 - r_1) = \delta + k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Si cualquiera de las varillas por sí sola produce una intensidad I_0 en ese receptor, la superposición da

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

Por tanto, un máximo requiere $\Delta = 2m\pi$, mientras que una señal nula requiere $\Delta = (2n + 1)\pi$.

Para obtener un máximo en A y una señal nula en B,

$$\begin{aligned} \delta + k\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= 2m\pi, \\ \delta + k\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= (2n + 1)\pi. \end{aligned}$$

Al restar, se elimina la fase eléctrica ajustable:

$$k(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d} = \text{un múltiplo impar de } \pi.$$

Así,

$$|(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d}| \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Como el ángulo entre los dos vectores unitarios es α ,

$$|\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B| = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

El valor absoluto de un producto escalar no puede superar el producto de los módulos de los vectores, por lo que

$$2d \sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Se deduce que

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

La igualdad se alcanza cuando $\mathbf{d}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. Además,

$$(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_A + \hat{\mathbf{n}}_B) = 0.$$

Como la suma apunta a lo largo de la bisectriz interior del ángulo, la recta que une las varillas debe ser perpendicular a dicha bisectriz.

Elijamos la dirección desde la varilla 1 hasta la varilla 2 en el sentido de $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. Para la separación mínima,

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d_{\min} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{4}, \quad \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda}{4}.$$

Por tanto, las diferencias de fase de las ondas recibidas son

$$\Delta_A = \delta + \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_B = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Para obtener una recepción máxima en A, elegimos

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Entonces $\Delta_A = 0$ y $\Delta_B = -\pi$, como se requiere.

Para obtener una recepción máxima en B, elegimos

$$\delta = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Entonces $\Delta_B = 0$ y $\Delta_A = \pi$. Por tanto, pasar de un modo de funcionamiento al otro requiere un cambio de 180° en la fase eléctrica relativa.

b)

La separación angular entre las localidades es

$$\alpha = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ.$$

Utilizando $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8}{27 \times 10^6} \simeq 11.1 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$d_{\min} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} \text{ m} \simeq 4.11 \text{ m},$$

o, aproximadamente,

$$d_{\min} = 4.1 \text{ m}.$$

La bisectriz interior tiene el acimut

$$\frac{72^\circ + 157^\circ}{2} = 114.5^\circ.$$

En consecuencia, la recta perpendicular que une las varillas tiene el acimut

$$114.5^\circ - 90^\circ = 24.5^\circ,$$

con la dirección opuesta a 204.5° .

Numeremos la varilla situada al suroeste como 1 y la situada al noreste como 2. Las proyecciones hacia las localidades son

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= d \cos(72^\circ - 24.5^\circ) = d \sin 42.5^\circ = \frac{\lambda}{4}, \\ \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= d \cos(157^\circ - 24.5^\circ) = -\frac{\lambda}{4}.\end{aligned}$$

Así, los ajustes de fase son:

Recepción deseada	Fase de la varilla situada al noreste respecto a la situada al suroeste
Máxima en Koper; nula en Buje	Retrasada 90°
Máxima en Buje; nula en Koper	Adelantada 90°

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Efecto Hall en una barra de InSb

Por una barra larga con forma de paralelepípedo rectangular de aristas a , b y c ($a \gg b \gg c$), fabricada con el semiconductor InSb, circula una corriente I paralela a la arista a . La barra se encuentra en un campo magnético externo B paralelo a la arista c . El campo magnético producido por la corriente I puede despreciarse. Los portadores de corriente son electrones. La velocidad media de los electrones en un semiconductor en presencia únicamente de un campo eléctrico es $v = \mu E$, donde μ se denomina movilidad. Si también hay un campo magnético, el campo eléctrico deja de ser paralelo a la corriente. Este fenómeno se conoce como efecto Hall.

- Determine el módulo y la dirección del campo eléctrico en la barra necesarios para producir la corriente descrita anteriormente.
- Calcule la diferencia de potencial eléctrico entre puntos opuestos de las superficies de la barra en la dirección de la arista b .
- Halle la expresión analítica de la componente continua de la diferencia de potencial eléctrico del caso b) si la corriente y el campo magnético son alternos (CA); $I = I_0 \sin \omega t$ y $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$.
- Diseñe y explique un circuito eléctrico que permita, aprovechando el resultado c), medir la potencia consumida por un aparato eléctrico conectado a la red de CA.

Datos: La movilidad de los electrones en InSb es $7.8 \text{ m}^2\text{T/Vs}$, la concentración de electrones en InSb es $2.5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $I = 1.0 \text{ A}$, $B = 0.10 \text{ T}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ mm}$, $e_0 = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Elijamos unos ejes que formen un sistema dextrógiro, con $+\hat{x}$ en el sentido de la corriente convencional y $+\hat{z}$ en el sentido del campo magnético. Sean $e = -e_0 > 0$ y n la concentración de electrones, y definamos la tensión de Hall como

$$U_H = V(y = +b/2) - V(y = -b/2).$$

- **a)** El campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = \frac{I}{nec\mu} \hat{x} - \frac{IB}{nec} \hat{y} = (3.2\hat{x} - 2.5\hat{y}) \text{ V m}^{-1}.$$

Su módulo es 4.1 V m^{-1} . Es perpendicular a $\mathbf{B}$ y forma un ángulo de

$$\theta = \tan^{-1}(\mu B) = 38^\circ$$

con la dirección de la corriente, hacia $-\hat{y}$, que es el sentido de $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

- **b)**

$$U_H = \frac{IB}{nec} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

La cara $+y$ está a mayor potencial.

- **c)**

$$U_{H,DC} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

- **d)** Utilice una bobina de corriente conectada en serie para producir $B(t) = k_I i_L(t)$, y alimente la barra de Hall mediante una rama resistiva de medida de tensión de modo que $I_H(t) = k_U u(t)$. Un voltímetro que mida el valor medio, conectado entre las caras perpendiculares a b , indicará entonces

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} P, \quad P = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Calibre su escala directamente en vatios.

Solución

Consideramos la región central uniforme de la barra larga, despreciando los efectos de los contactos y el campo magnético generado por su corriente. Las caras transversales están en circuito abierto, por lo que no hay corriente transversal en régimen estacionario.

Para los cálculos numéricos, la movilidad se interpreta como $7.8 \text{ m}^2/(\text{V s})$, tal como exige $v = \mu E$; la unidad $\text{m}^2\text{T}/\text{Vs}$ que figura en los datos es dimensionalmente incompatible con esta relación.

a) Módulo y dirección del campo eléctrico

La densidad de corriente y la velocidad de deriva de los electrones están relacionadas mediante

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_e.$$

Como el área de la sección transversal es bc ,

$$\mathbf{j} = \frac{I}{bc}\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_e = -v_d\hat{\mathbf{x}}, \quad v_d = \frac{I}{nebc}.$$

La ley de movilidad dada relaciona la rapidez con el módulo del campo. En forma vectorial, los electrones se desplazan en sentido opuesto al campo eléctrico cuando no hay campo magnético.

En el modelo habitual de movilidad isótropa, las colisiones ejercen una fuerza media de resistencia $-e\mathbf{v}_e/\mu$. Por tanto, el equilibrio de fuerzas en régimen estacionario en presencia de ambos campos es

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{e}{\mu}\mathbf{v}_e.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\mu} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}.$$

Con $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$,

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = (-v_d\hat{\mathbf{x}}) \times (B\hat{\mathbf{z}}) = v_d B\hat{\mathbf{y}},$$

de modo que

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{v_d}{\mu}\hat{\mathbf{x}} - v_d B\hat{\mathbf{y}}.}$$

La componente longitudinal mantiene el movimiento de deriva frente a las colisiones. La componente transversal equilibra la fuerza magnética. En particular, la fuerza magnética empuja inicialmente a los electrones hacia la cara $-y$; su acumulación produce el campo necesario en el sentido $-y$.

Numéricamente,

$$bc = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-3}) = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$v_d = \frac{1.0}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-5})} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

Así,

$$E_x = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ V m}^{-1}, \quad E_y = -25(0.10) = -2.5 \text{ V m}^{-1}, \quad E_z = 0.$$

El módulo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{I}{nebc\mu} \sqrt{1 + (\mu B)^2} = \boxed{4.1 \text{ V m}^{-1}}.$$

El ángulo medido desde $+\hat{\mathbf{x}}$ hacia $-\hat{\mathbf{y}}$ satisface

$$\tan \theta = \frac{|E_y|}{E_x} = \mu B = 0.78,$$

lo que da

$$\theta = 38^\circ.$$

b) Diferencia de potencial transversal

Elijamos puntos opuestos de las dos caras perpendiculares a b con la misma coordenada longitudinal. Como $\mathbf{E} = -\nabla V$,

$$U_H = - \int_{-b/2}^{b/2} E_y dy = -E_y b = v_d B b.$$

Al sustituir la rapidez de deriva se obtiene

$$U_H = \frac{IB}{nec}.$$

Numéricamente,

$$U_H = \frac{(1.0)(0.10)}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-3})} = 0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

La cara $-y$ acumula electrones y está a menor potencial; la cara $+y$ está a mayor potencial.

c) Componente continua para una corriente y un campo magnético alternos

Supongamos un funcionamiento cuasiestático: la deriva de los electrones y la distribución de carga de Hall siguen las señales aplicadas con suficiente rapidez, y la tensión inducida en los cables de medida es despreciable. La tensión instantánea de Hall es entonces

$$U_H(t) = \frac{I(t)B(t)}{nec} = \frac{I_0 B_0}{nec} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta).$$

Utilizando

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

obtenemos

$$U_H(t) = \frac{I_0 B_0}{2nec} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)].$$

El valor medio del segundo término a lo largo de un ciclo es cero. Por tanto,

$$U_{H,DC} = \overline{U_H} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

De forma equivalente,

$$\overline{U_H} = \frac{I_{rms} B_{rms}}{nec} \cos \delta.$$

La señal de salida contiene una componente continua y una ondulación al doble de la frecuencia aplicada. Su componente continua se anula cuando las dos señales de entrada están en cuadratura.

d) Circuito para medir la potencia en CA

El resultado del apartado c) convierte el elemento Hall en un multiplicador: su tensión transversal es proporcional al producto de su corriente longitudinal por el campo magnético.

Un circuito adecuado tiene las siguientes conexiones:

1. Conecte una bobina generadora de campo en serie con el aparato. Coloque la barra de Hall dentro de la bobina, con su dirección c paralela al campo. Utilice una bobina lineal, preferiblemente con núcleo de aire, de modo que

$$B(t) = k_I i_L(t),$$

donde $i_L(t)$ es la corriente del aparato y k_I es la constante de campo de la bobina.

2. Conecte una rama independiente entre los bornes de la red de CA, formada por una resistencia no inductiva R de valor elevado en serie con los dos contactos de los extremos longitudinales de la barra de Hall. La resistencia longitudinal de la barra se obtiene del apartado a):

$$r_H = \frac{E_x a}{I_H} = \frac{a}{ne\mu bc}.$$

Así, si la reactancia de la rama es despreciable,

$$I_H(t) = \frac{u(t)}{R + r_H} = k_U u(t).$$

Al elegir $R \gg r_H$, se obtiene $k_U \simeq 1/R$ y se limita la corriente de medida.

3. Conecte los contactos Hall opuestos de las caras perpendiculares a b , situados en la misma posición longitudinal, a un voltímetro de alta impedancia de entrada que mida el valor medio. También es adecuado un filtro paso bajo con una etapa separadora, seguido de un medidor de continua. Calcule el valor medio a lo largo de muchos ciclos de CA.

Despreciemos la caída de tensión en la bobina generadora de campo y el efecto de carga de la rama de medida de tensión. Entonces $u(t)$ es también la tensión del aparato, y

$$U_H(t) = \frac{I_H(t)B(t)}{nec} = \frac{k_U k_I}{nec} u(t) i_L(t).$$

Por tanto, su valor medio es

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} \overline{u(t) i_L(t)} = \frac{k_U k_I}{nec} P.$$

Para un funcionamiento sinusoidal, escribamos

$$u(t) = U_0 \sin \omega t, \quad i_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \varphi).$$

Entonces

$$P = \frac{U_0 I_{L0}}{2} \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Por consiguiente, el medidor mide la potencia media consumida, incluida la dependencia del factor de potencia. Su calibración en vatios es

$$P = \frac{nec}{k_U k_I} \overline{U_H}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Sonda espacial que escapa del sistema solar con la ayuda

de Marte

En un proyecto de investigación espacial se estudian dos procedimientos para lanzar una sonda espacial fuera del sistema solar. El primer procedimiento (i) consiste en lanzar la sonda con una velocidad suficientemente grande para escapar directamente del sistema solar. Según el segundo (ii), la sonda debe acercarse a uno de los planetas exteriores y, con su ayuda, cambiar su dirección de movimiento y alcanzar la velocidad necesaria para escapar del sistema solar. Suponga que la sonda se mueve bajo la acción del campo gravitatorio únicamente del Sol o del planeta, según cuál de los dos campos sea más intenso en ese punto.

a) Determine la velocidad mínima y su dirección respecto al movimiento de la Tierra que debe impartirse a la sonda en el lanzamiento según el procedimiento (i).

b) Suponga que la sonda se ha lanzado en la dirección determinada en a), pero con otra velocidad. Determine la velocidad de la sonda cuando cruza la órbita de Marte, es decir, sus componentes paralela y perpendicular a esta órbita. Marte no se encuentra cerca del punto de cruce cuando este se produce.

c) Suponga que la sonda entra en el campo gravitatorio de Marte. Halle la velocidad mínima de lanzamiento desde la Tierra necesaria para que la sonda escape del sistema solar.

Indicación: A partir del resultado de a), conoce el módulo óptimo y la dirección de la velocidad que necesita la sonda para escapar del sistema solar después de abandonar el campo gravitatorio de Marte. (No es necesario preocuparse por la posición precisa de Marte durante el encuentro.) Halle la relación entre esta velocidad y las componentes de la velocidad antes de que la sonda entre en el campo gravitatorio de Marte, es decir, las componentes que determinó en b). ¿Qué ocurre con la conservación de la energía de la sonda?

d) Estime el máximo ahorro fraccionario posible de energía en el procedimiento (ii) respecto al procedimiento (i). Notas: Suponga que todos los planetas giran alrededor del Sol en órbitas circulares, en el mismo sentido y en el mismo plano. Desprecie la resistencia del aire, la rotación de la Tierra alrededor de su eje y la energía empleada para escapar del campo gravitatorio terrestre.

Datos: La velocidad de la Tierra alrededor del Sol es de 30 km/s, y la razón entre las distancias de la Tierra y de Marte al Sol es $2/3$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea $V = 30 \text{ km s}^{-1}$, y sea u la rapidez de lanzamiento respecto a la Tierra.

- **a)** El lanzamiento debe realizarse en la dirección y el sentido del movimiento orbital de la Tierra, con

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

- **b)** Para un lanzamiento pródigo con rapidez u , las componentes heliocéntricas en la órbita de Marte son

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}(V + u), \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2},$$

donde $v_{\perp}$ apunta radialmente hacia fuera en el primer cruce. Para alcanzar esta órbita se requiere $u \geq 2.86 \text{ km s}^{-1}$.

- **c)** Con $V_M = \sqrt{2/3} V$, la rapidez mínima de lanzamiento respecto a la Tierra es

$$u_{ii,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

El lanzamiento es pródigo; la velocidad de salida óptima también es pródigo y tangencial a la órbita de Marte.

- **d)** El máximo ahorro fraccionario de energía de lanzamiento es

$$\frac{E_i - E_{ii}}{E_i} = 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \simeq 0.800,$$

es decir, aproximadamente **80%**.

Solución

Denotemos los radios orbitales de la Tierra y de Marte por r y R , respectivamente, y definamos $\mu = GM_{\odot}$. La razón proporcionada y la condición de órbita circular dan

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \quad V^2 = \frac{\mu}{r}.$$

Todas las velocidades de la sonda que aparecen a continuación son heliocéntricas, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Se desprecia el campo gravitatorio terrestre, tal como se indica en el enunciado.

a)

La sonda escapa del Sol si su energía mecánica específica es no negativa:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} \geq 0.$$

Por tanto, su rapidez heliocéntrica inicial debe satisfacer

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2} V.$$

Para una rapidez de lanzamiento dada u respecto a la Tierra, la mayor rapidez heliocéntrica posible es $V + u$, que se obtiene al lanzar la sonda paralelamente al movimiento de la Tierra y en su mismo sentido. Por tanto,

$$V + u_{i,\min} = \sqrt{2} V,$$

de modo que

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

La rapidez heliocéntrica correspondiente es 42.4 km s^{-1} . En este umbral, la trayectoria es parabólica, con rapidez nula en el infinito.

b)

Para un lanzamiento prógrado, definamos

$$v_0 = V + u.$$

La velocidad inicial es tangencial a la órbita terrestre.

Entre las órbitas de la Tierra y de Marte, la fuerza del Sol es central, por lo que se conserva el momento angular respecto al Sol:

$$rv_0 = Rv_{\parallel}.$$

En consecuencia,

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}(V + u).$$

La conservación de la energía mecánica da

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{\mu}{R}.$$

Utilizando $\mu/r = V^2$ y $\mu/R = \frac{2}{3}V^2$,

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 - \frac{2}{3}V^2.$$

Restando $v_{\parallel}^2 = \frac{4}{9}v_0^2$,

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}v_0^2 - \frac{2}{3}V^2} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2}.$$

Esta es la componente radial hacia fuera en el primer cruce. Su signo se invierte en un cruce hacia dentro.

Para que la sonda alcance el radio orbital de Marte, el radicando debe ser no negativo:

$$v_0^2 \geq \frac{6}{5}V^2.$$

Por tanto,

$$u \geq \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right)V = 2.86 \text{ km s}^{-1}.$$

La igualdad corresponde a una órbita cuyo afelio toca justo la órbita de Marte.

c)

La rapidez orbital de Marte es

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}}V = 24.5 \text{ km s}^{-1}.$$

Consideremos que el encuentro está localizado y es breve en comparación con el movimiento orbital de Marte, de modo que la velocidad de Marte puede considerarse constante. En el sistema de referencia de Marte, la velocidad de la sonda a la entrada tiene las componentes

$$w_{\parallel} = v_{\parallel} - V_M, \quad w_{\perp} = v_{\perp}.$$

Por tanto, su módulo viene dado por

$$w^2 = (v_{\parallel} - V_M)^2 + v_{\perp}^2.$$

En este sistema de referencia, el encuentro gravitatorio conserva la energía mecánica. A distancias iguales de Marte antes y después del encuentro, la rapidez relativa es la misma, aunque su dirección cambia.

Si la velocidad relativa de salida forma un ángulo θ con el movimiento de Marte, la rapidez heliocéntrica de salida satisface

$$v_{\text{out}}^2 = V_M^2 + w^2 + 2V_M w \cos \theta.$$

Es máxima cuando $\theta = 0$, lo que da

$$v_{\text{out,max}} = V_M + w.$$

Así pues, el encuentro óptimo orienta la velocidad relativa de salida en la dirección y el sentido del movimiento de Marte.

La rapidez de escape del Sol al radio orbital de Marte es

$$v_{\text{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} V_M.$$

En consecuencia, la rapidez relativa mínima necesaria es

$$w_{\min} = (\sqrt{2} - 1)V_M.$$

Utilicemos ahora las componentes halladas en el apartado b):

$$\begin{aligned} w^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - 2V_M v_{\parallel} + V_M^2 \\ &= v_0^2 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 + V_M^2. \end{aligned}$$

Puesto que $V_M^2 = \frac{2}{3}V^2$, esto se simplifica a

$$w^2 = v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0.$$

En el umbral de escape,

$$v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 V_M^2.$$

La raíz positiva es

$$v_{0,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] = 35.555 \dots \text{ km s}^{-1}.$$

Por tanto, la rapidez de lanzamiento necesaria respecto a la Tierra es

$$u_{\text{ii,min}} = v_{0,\min} - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

Este valor supera los 2.86 km s^{-1} necesarios para alcanzar la órbita de Marte, por lo que la trayectoria de entrada es posible.

El lanzamiento prógrado también minimiza la rapidez necesaria entre todas las direcciones de lanzamiento posibles. Para verlo, sea α el ángulo de lanzamiento respecto al movimiento de la Tierra y escribamos $q = r/R = 2/3$. Las mismas relaciones de energía y momento angular dan

$$w^2 = u^2 + 2Vu(1 - q^{3/2}) \cos \alpha + V^2(3q - 1 - 2q^{3/2}).$$

Para un valor fijo de u , esta expresión es máxima cuando $\cos \alpha = 1$, puesto que $q < 1$. Por tanto, el lanzamiento prógrado proporciona la mayor rapidez relativa disponible durante el encuentro para una rapidez de lanzamiento dada.

Numéricamente, la trayectoria de entrada óptima tiene

$$v_{\parallel} = 23.70 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{\perp} = 10.12 \text{ km s}^{-1}.$$

Estos valores dan $w = 10.15 \text{ km s}^{-1}$. Después de la desviación óptima,

$$v_{\text{out}} = V_M + w = 34.64 \text{ km s}^{-1} = \sqrt{2} V_M,$$

tal como se requiere.

No se viola la conservación de la energía. La energía heliocéntrica de la sonda aumenta durante el encuentro en

$$\Delta E = m \mathbf{V}_M \cdot (\mathbf{w}_{\text{out}} - \mathbf{w}_{\text{in}}).$$

Para la desviación óptima, esto se convierte en

$$\Delta E = m V_M [w - (v_{\parallel} - V_M)] > 0.$$

Esta energía procede del movimiento orbital de Marte. El cambio de velocidad correspondiente de Marte es despreciable porque su masa es mucho mayor que la de la sonda.

d)

Despreciando la energía de escape terrestre, la energía impartida en el lanzamiento en el sistema de referencia de la Tierra es

$$E_{\text{launch}} = \frac{1}{2} m u^2.$$

Por tanto, el máximo ahorro fraccionario es

$$\begin{aligned} f_{\text{max}} &= \frac{E_i - E_{\text{ii}}}{E_i} \\ &= 1 - \left(\frac{u_{\text{ii,min}}}{u_{\text{i,min}}} \right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{5.55519}{12.42641} \right)^2 \\ &= 0.80015. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\boxed{f_{\text{max}} \simeq 80\%.$$

Las energías de lanzamiento correspondientes por unidad de masa de la sonda son aproximadamente 77.2 MJ kg^{-1} para el escape directo y 15.4 MJ kg^{-1} con la asistencia gravitatoria ideal de Marte.

La solución se comprobó con la solución oficial.