

IPhO 1985

Theorieaufgaben und Lösungen · Portorož, Jugoslawien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1985/

Aufgabe 1: Antennenanordnung für eine Funkverbindung

Ein junger Funkamateur unterhält eine Funkverbindung mit zwei Mädchen, die in zwei Städten wohnen. Er richtet eine Antennenanordnung so aus, dass das Mädchen in Stadt B kein Signal empfängt, wenn das Mädchen in Stadt A ein maximales Signal empfängt, und umgekehrt. Die Anordnung besteht aus zwei vertikalen Stabantennen, die mit gleicher Intensität gleichmäßig in alle Richtungen der horizontalen Ebene abstrahlen.

- Bestimmen Sie die Parameter der Anordnung, d. h. den Abstand zwischen den Stäben, ihre Ausrichtung und die Phasenverschiebung zwischen den den Stäben zugeführten elektrischen Signalen, so, dass der Abstand zwischen den Stäben minimal ist.
- Bestimmen Sie die numerische Lösung, wenn der Junge eine Funkstation besitzt, die bei 27 MHz sendet, und die Antennenanordnung in Portorož aufbaut. Anhand der Karte hat er festgestellt, dass die Winkel zwischen der Nordrichtung und den Richtungen nach A (Koper) bzw. nach B (der Kleinstadt Buje in Istrien) 72° bzw. 157° betragen.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) Es sei α der Winkelabstand der Städte, von der Antennenanordnung aus gesehen, und λ die Wellenlänge. Der minimale Abstand beträgt

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

Die Verbindungslinie der Stäbe muss senkrecht auf der inneren Winkelhalbierenden der beiden Richtungen zu den Städten stehen. Bezeichnen wir die Stäbe so, dass Stab 2 von Stab 1 aus in Richtung $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ liegt, wobei die Einheitsvektoren zu den Städten zeigen. Die Phase von Stab 2 muss der von Stab 1 **um 90° nacheilen**, damit A ein maximales Signal und B kein Signal empfängt; für den umgekehrten Fall muss sie **um 90° voreilen**.

- **b)** Der Winkelabstand beträgt 85° , woraus sich

$$d_{\min} \approx 4.1 \text{ m}$$

ergibt. Die Verbindungslinie der Stäbe hat die Richtungswinkel

$$24.5^\circ \text{ und } 204.5^\circ$$

im Uhrzeigersinn von Norden aus gemessen. Die Phase des nordöstlichen Stabes muss der des südwestlichen Stabes um 90° nacheilen, damit in Koper maximaler Empfang und in Buje kein Empfang vorliegt; eine Umkehrung der Phasenbeziehung vertauscht die beiden Fälle.

Lösung

a)

Die Signale der Stäbe sind kohärent, haben dieselbe Frequenz und übereinstimmende vertikale Polarisationen. Wir verwenden die Fernfeldnäherung: Die Städte sind viel weiter von der Anordnung entfernt, als der Stababstand beträgt, sodass die in der jeweiligen Stadt eintreffenden Wellen gleiche Amplituden und praktisch parallele Ausbreitungsrichtungen haben.

Der horizontale Verschiebungsvektor von Stab 1 zu Stab 2 sei $\mathbf{d}$ mit dem Betrag d . Wir definieren die elektrische Phasendifferenz durch

$$\delta = \phi_2 - \phi_1,$$

wobei die Schwingungen der Quellen proportional zu $\cos(\omega t + \phi_j)$ sind. Ein positives δ bedeutet somit, dass die Phase von Stab 2 der von Stab 1 voreilt.

Für einen weit entfernten Empfänger in Richtung $\hat{\mathbf{n}}$ erfüllen die Weglängen die Beziehung

$$r_2 - r_1 \simeq -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}.$$

Folglich beträgt die Phasendifferenz zwischen den empfangenen Wellen

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \delta - k(r_2 - r_1) = \delta + k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Wenn jeder Stab für sich an diesem Empfänger die Intensität I_0 erzeugt, ergibt die Überlagerung

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

Ein Maximum erfordert daher $\Delta = 2m\pi$, während vollständige Auslöschung $\Delta = (2n + 1)\pi$ erfordert.

Für ein Maximum bei A und vollständige Auslöschung bei B gilt

$$\begin{aligned} \delta + k\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} &= 2m\pi, \\ \delta + k\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} &= (2n + 1)\pi. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion wird die einstellbare elektrische Phase eliminiert:

$$k(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d} = \text{ein ungeradzahliges Vielfaches von } \pi.$$

Somit gilt

$$|(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d}| \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Da der Winkel zwischen den beiden Einheitsvektoren α beträgt, gilt

$$|\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B| = \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Der Betrag eines Skalarprodukts kann das Produkt der Vektorbeträge nicht überschreiten, also gilt

$$2d \sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Daraus folgt

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

Gleichheit wird erreicht, wenn $\mathbf{d}$ parallel zu $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$ ist. Außerdem gilt

$$(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_A + \hat{\mathbf{n}}_B) = 0.$$

Da die Summe entlang der inneren Winkelhalbierenden zeigt, steht die gesuchte Verbindungslinie der Stäbe senkrecht auf dieser Winkelhalbierenden.

Wir wählen die Richtung von Stab 1 zu Stab 2 entlang $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. Beim minimalen Abstand gilt

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d_{\min} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{4}, \quad \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda}{4}.$$

Die Phasendifferenzen der empfangenen Wellen betragen daher

$$\Delta_A = \delta + \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_B = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Für maximalen Empfang bei A wählen wir

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Dann gilt wie gefordert $\Delta_A = 0$ und $\Delta_B = -\pi$.

Für maximalen Empfang bei B wählen wir

$$\delta = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Dann gilt $\Delta_B = 0$ und $\Delta_A = \pi$. Das Umschalten zwischen den beiden Betriebsarten erfordert daher eine Änderung der relativen elektrischen Phase um 180° .

b)

Der Winkelabstand der Städte beträgt

$$\alpha = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ.$$

Mit $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ beträgt die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8}{27 \times 10^6} \simeq 11.1 \text{ m}.$$

Damit ergibt sich

$$d_{\min} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} \text{ m} \simeq 4.11 \text{ m},$$

oder näherungsweise

$$d_{\min} = 4.1 \text{ m}.$$

Die innere Winkelhalbierende hat den Richtungswinkel

$$\frac{72^\circ + 157^\circ}{2} = 114.5^\circ.$$

Die dazu senkrechte Verbindungslinie der Stäbe hat folglich den Richtungswinkel

$$114.5^\circ - 90^\circ = 24.5^\circ,$$

wobei die entgegengesetzte Richtung bei 204.5° liegt.

Wir bezeichnen den südwestlichen Stab mit 1 und den nordöstlichen Stab mit 2. Die Projektionen in Richtung der Städte betragen

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d \cos(72^\circ - 24.5^\circ) = d \sin 42.5^\circ = \frac{\lambda}{4},$$

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = d \cos(157^\circ - 24.5^\circ) = -\frac{\lambda}{4}.$$

Somit lauten die Phaseneinstellungen:

Gewünschter Empfang	Phase des nordöstlichen Stabes relativ zum südwestlichen Stab
Koper maximal; Buje null	Eilt um 90° nach
Buje maximal; Koper null	Eilt um 90° vor

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Hall-Effekt in einem InSb-Stab

In einem langen Stab aus dem Halbleiter InSb, der die Form eines Quaders mit den Kantenlängen a , b und c ($a \gg b \gg c$) hat, fließt ein Strom I parallel zur Kante a . Der Stab befindet sich in einem äußeren Magnetfeld B , das parallel zur Kante c gerichtet ist. Das vom Strom I erzeugte Magnetfeld kann vernachlässigt werden. Die Ladungsträger sind Elektronen. Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen in einem Halbleiter beträgt bei alleiniger Anwesenheit eines elektrischen Feldes $v = \mu E$, wobei μ als Beweglichkeit bezeichnet wird. Ist zusätzlich ein Magnetfeld vorhanden, so ist das elektrische Feld nicht mehr parallel zum Strom gerichtet. Dieses Phänomen ist als Hall-Effekt bekannt.

a) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung des elektrischen Feldes im Stab, das den oben beschriebenen Strom hervorruft.

b) Berechnen Sie die elektrische Potentialdifferenz zwischen gegenüberliegenden Punkten auf den Oberflächen des Stabes in Richtung der Kante b .

c) Bestimmen Sie den analytischen Ausdruck für den Gleichspannungsanteil der elektrischen Potentialdifferenz aus Fall b), wenn der Strom und das Magnetfeld zeitlich alternieren (AC); $I = I_0 \sin \omega t$ und $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$.

d) Entwerfen und erläutern Sie eine elektrische Schaltung, mit der sich unter Ausnutzung des Ergebnisses aus c) die Leistungsaufnahme eines an das Wechselstromnetz angeschlossenen elektrischen Geräts messen lässt.

Gegeben: Die Elektronenbeweglichkeit in InSb beträgt $7.8 \text{ m}^2\text{T/Vs}$, die Elektronenkonzentration in InSb beträgt $2.5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$, $I = 1.0 \text{ A}$, $B = 0.10 \text{ T}$, $b = 1.0 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ mm}$, $e_0 = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wir wählen ein rechtshändiges Koordinatensystem mit $+\hat{\mathbf{x}}$ in technischer Stromrichtung und $+\hat{\mathbf{z}}$ in Richtung des Magnetfeldes. Es sei $e = -e_0 > 0$, n sei die Elektronenkonzentration, und die Hall-Spannung sei definiert als

$$U_H = V(y = +b/2) - V(y = -b/2).$$

- **a)** Das elektrische Feld ist

$$\mathbf{E} = \frac{I}{nec\mu} \hat{\mathbf{x}} - \frac{IB}{nec} \hat{\mathbf{y}} = (3.2\hat{\mathbf{x}} - 2.5\hat{\mathbf{y}}) \text{ V m}^{-1}.$$

Sein Betrag ist 4.1 V m^{-1} . Es steht senkrecht auf $\mathbf{B}$ und ist gegenüber der Stromrichtung um den Winkel

$$\theta = \tan^{-1}(\mu B) = 38^\circ$$

in Richtung $-\hat{\mathbf{y}}$, also in Richtung von $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, geneigt.

- **b)**

$$U_H = \frac{IB}{nec} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

Die $+y$ -Fläche liegt auf höherem Potential.

- **c)**

$$U_{H,DC} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

- **d)** Eine in Reihe geschaltete Stromspule erzeugt $B(t) = k_I i_L(t)$, und der Hall-Stab wird über einen ohmschen Spannungsmesszweig so gespeist, dass $I_H(t) = k_U u(t)$ gilt. Ein mittelwertbildendes Voltmeter zwischen den b -Flächen zeigt dann

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} P, \quad P = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Seine Skala wird direkt in Watt kalibriert.

Lösung

Wir betrachten den homogenen mittleren Bereich des langen Stabes und vernachlässigen Kontakteffekte sowie das durch seinen Strom erzeugte Magnetfeld. Die quer zur Stromrichtung liegenden Seitenflächen sind elektrisch offen, sodass kein stationärer Querstrom fließt.

Für die numerischen Berechnungen wird die Beweglichkeit als $7.8 \text{ m}^2/(\text{V s})$ interpretiert, wie es $v = \mu E$ erfordert; die in den Angaben genannte Einheit $\text{m}^2\text{T}/\text{Vs}$ ist mit dieser Beziehung dimensionsmäßig nicht vereinbar.

a) Betrag und Richtung des elektrischen Feldes

Die Stromdichte und die Driftgeschwindigkeit der Elektronen hängen zusammen gemäß

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_e.$$

Da die Querschnittsfläche bc beträgt, gilt

$$\mathbf{j} = \frac{I}{bc}\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_e = -v_d\hat{\mathbf{x}}, \quad v_d = \frac{I}{nebc}.$$

Das angegebene Beweglichkeitsgesetz verknüpft den Geschwindigkeitsbetrag mit dem Feldbetrag. In vektorieller Form driften die Elektronen bei Abwesenheit eines Magnetfeldes entgegen der Richtung des elektrischen Feldes.

Im üblichen isotropen Beweglichkeitsmodell bewirken Stöße eine mittlere bremsende Kraft $-e\mathbf{v}_e/\mu$. Das stationäre Kräftegleichgewicht in beiden Feldern lautet daher

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{e}{\mu}\mathbf{v}_e.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\mu} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}.$$

Mit $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ gilt

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = (-v_d\hat{\mathbf{x}}) \times (B\hat{\mathbf{z}}) = v_d B\hat{\mathbf{y}},$$

also

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{v_d}{\mu}\hat{\mathbf{x}} - v_d B\hat{\mathbf{y}}.}$$

Die Längskomponente hält die Drift entgegen der abbremssenden Wirkung der Stöße aufrecht. Die Querkomponente gleicht die magnetische Kraft aus. Insbesondere drückt die magnetische Kraft die Elektronen zunächst zur $-y$ -Fläche; ihre Ansammlung erzeugt das erforderliche Feld in $-y$ -Richtung.

Numerisch ergibt sich

$$bc = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-3}) = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2, \\ v_d = \frac{1.0}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-5})} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

Damit gilt

$$E_x = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ V m}^{-1}, \quad E_y = -25(0.10) = -2.5 \text{ V m}^{-1}, \quad E_z = 0.$$

Der Betrag ist

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{I}{nebc\mu} \sqrt{1 + (\mu B)^2} = \boxed{4.1 \text{ V m}^{-1}}.$$

Für den Winkel von $+\hat{\mathbf{x}}$ in Richtung $-\hat{\mathbf{y}}$ gilt

$$\tan \theta = \frac{|E_y|}{E_x} = \mu B = 0.78,$$

woraus folgt

$$\boxed{\theta = 38^\circ}.$$

b) Transversale Potentialdifferenz

Wir wählen gegenüberliegende Punkte auf den beiden b -Flächen mit derselben Längskoordinate. Wegen $\mathbf{E} = -\nabla V$ gilt

$$U_H = - \int_{-b/2}^{b/2} E_y dy = -E_y b = v_d B b.$$

Einsetzen des Betrags der Driftgeschwindigkeit ergibt

$$\boxed{U_H = \frac{IB}{nec}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$U_H = \frac{(1.0)(0.10)}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-3})} = \boxed{0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}}.$$

An der $-y$ -Fläche sammeln sich Elektronen an, und sie liegt auf niedrigerem Potential; die $+y$ -Fläche liegt auf höherem Potential.

c) Gleichspannungsanteil bei Wechselstrom und wechselndem Magnetfeld

Wir nehmen einen quasistatischen Betrieb an: Die Elektronendrift und die Hall-Ladungsverteilung folgen den angelegten Signalen hinreichend schnell, und die induktive Einkopplung in die Spannungsmessleitungen ist vernachlässigbar. Die momentane Hall-Spannung beträgt dann

$$U_H(t) = \frac{I(t)B(t)}{nec} = \frac{I_0 B_0}{nec} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta).$$

Mit

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

erhalten wir

$$U_H(t) = \frac{I_0 B_0}{2nec} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)].$$

Der zweite Term hat über eine Periode den Mittelwert null. Daher gilt

$$\boxed{U_{H,DC} = \overline{U_H} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta}.$$

Gleichwertig lässt sich schreiben

$$\overline{U_H} = \frac{I_{rms} B_{rms}}{nec} \cos \delta.$$

Die Ausgangsspannung enthält einen Gleichspannungsanteil und eine Welligkeit mit der doppelten angelegten Frequenz. Ihr Gleichspannungsanteil verschwindet, wenn die beiden Eingangssignale um eine Viertelperiode phasenverschoben sind.

d) Schaltung zur Messung der Wechselstromleistung

Das Ergebnis aus Teil c) macht das Hall-Element zu einem Multiplizierer: Seine Querspannung ist proportional zum Produkt aus seinem Längsstrom und dem Magnetfeld.

Eine geeignete Schaltung weist folgende Verbindungen auf:

1. Eine Feldspule wird in Reihe mit dem Gerät geschaltet. Der Hall-Stab wird im Inneren der Spule so angeordnet, dass seine c -Richtung parallel zum Feld liegt. Man verwendet eine lineare Spule, vorzugsweise eine Luftspule, sodass

$$B(t) = k_I i_L(t),$$

wobei $i_L(t)$ der Gerätestrom und k_I die Feldkonstante der Spule ist.

2. Ein separater Zweig wird parallel an das Wechselstromnetz angeschlossen; er besteht aus einem großen induktionsfreien Widerstand R , der mit den beiden Längsendkontakten des Hall-Stabes in Reihe geschaltet ist. Der Längswiderstand des Stabes folgt aus Teil a):

$$r_H = \frac{E_x a}{I_H} = \frac{a}{ne\mu b c}.$$

Bei vernachlässigbarer Reaktanz des Zweiges gilt somit

$$I_H(t) = \frac{u(t)}{R + r_H} = k_U u(t).$$

Die Wahl $R \gg r_H$ ergibt $k_U \simeq 1/R$ und begrenzt den Messstrom.

3. Gegenüberliegende Hall-Kontakte auf den b -Flächen an derselben Längsposition werden mit einem mittelwertbildenden Voltmeter mit hoher Eingangsimpedanz verbunden. Geeignet ist auch ein Tiefpassfilter mit Impedanzwandler und nachgeschaltetem Gleichspannungsmessgerät. Es wird über viele Wechselstromperioden gemittelt.

Wir vernachlässigen den Spannungsabfall an der Feldspule und die Belastung durch den Spannungsmesszweig. Dann ist $u(t)$ zugleich die Gerätespannung, und es gilt

$$U_H(t) = \frac{I_H(t) B(t)}{nec} = \frac{k_U k_I}{nec} u(t) i_L(t).$$

Ihr Mittelwert ist daher

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} \overline{u(t) i_L(t)} = \frac{k_U k_I}{nec} P.$$

Für sinusförmigen Betrieb schreiben wir

$$u(t) = U_0 \sin \omega t, \quad i_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \varphi).$$

Dann gilt

$$P = \frac{U_0 I_{L0}}{2} \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

Das Messgerät misst somit die mittlere aufgenommene Leistung einschließlich der Abhängigkeit vom Leistungsfaktor. Seine Kalibrierung in Watt lautet

$$P = \frac{nec}{k_U k_I} \overline{U_H}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Eine Raumsonde verlässt mithilfe des Mars das Sonnensystem

In einem Weltraumforschungsprojekt werden zwei Verfahren diskutiert, um eine Raumsonde aus dem Sonnensystem hinauszubefördern. Beim ersten Verfahren (i) wird die Sonde mit einer Geschwindigkeit gestartet, die groß genug ist, um das Sonnensystem direkt zu verlassen. Beim zweiten Verfahren (ii) soll sich die Sonde einem der äußeren Planeten nähern und mithilfe dieses Planeten ihre Bewegungsrichtung ändern und die zum Verlassen des Sonnensystems erforderliche Geschwindigkeit erreichen. Nehmen Sie an, dass sich die Sonde ausschließlich unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes der Sonne oder des Planeten bewegt, je nachdem, welches Feld am jeweiligen Ort stärker ist.

a) Bestimmen Sie die Mindestgeschwindigkeit und ihre Richtung relativ zur Bewegung der Erde, die der Sonde beim Start nach Verfahren (i) erteilt werden muss.

b) Nehmen Sie an, dass die Sonde in der in a) bestimmten Richtung, jedoch mit einer anderen Geschwindigkeit gestartet wurde. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Sonde beim Kreuzen der Marsbahn, d. h. ihre zur Bahn parallele und senkrechte Komponente. Zum Zeitpunkt des Kreuzens befindet sich der Mars nicht in der Nähe des Kreuzungspunktes.

c) Die Sonde trete nun in das Gravitationsfeld des Mars ein. Bestimmen Sie die minimale Startgeschwindigkeit von der Erde, die erforderlich ist, damit die Sonde das Sonnensystem verlassen kann.

Hinweis: Aus dem Ergebnis von a) kennen Sie den optimalen Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit der Sonde, die nach dem Verlassen des Gravitationsfeldes des Mars zum Verlassen des Sonnensystems erforderlich ist. (Um die genaue Position des Mars während der Begegnung müssen Sie sich nicht kümmern.) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dieser Geschwindigkeit und den Geschwindigkeitskomponenten vor dem Eintritt der Sonde in das Gravitationsfeld des Mars, d. h. den in b) bestimmten Komponenten. Wie verhält es sich mit der Energieerhaltung der Sonde?

d) Schätzen Sie die maximal mögliche relative Energieeinsparung bei Verfahren (ii) gegenüber Verfahren (i) ab. Anmerkungen: Nehmen Sie an, dass alle Planeten die Sonne auf Kreisbahnen in derselben Richtung und in derselben Ebene umlaufen. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand, die Rotation der Erde um ihre Achse sowie die Energie, die zum Verlassen des Gravitationsfeldes der Erde benötigt wird.

Angaben: Die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne beträgt 30 km/s, und das Verhältnis der Abstände von Erde und Mars zur Sonne beträgt 2/3.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei $V = 30 \text{ km s}^{-1}$, und u bezeichne die Startgeschwindigkeit relativ zur Erde.

- **a)** Der Start erfolgt in Richtung der Bahnbewegung der Erde, mit

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

- **b)** Bei einem prograden Start mit der Geschwindigkeit u lauten die heliozentrischen Komponenten an der Marsbahn

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}(V + u), \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2},$$

wobei $v_{\perp}$ beim ersten Kreuzen radial nach außen gerichtet ist. Um diese Bahn zu erreichen, muss $u \geq 2.86 \text{ km s}^{-1}$ gelten.

- **c)** Mit $V_M = \sqrt{2/3} V$ beträgt die minimale Startgeschwindigkeit relativ zur Erde

$$u_{ii,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

Der Start erfolgt prograd; die optimale auslaufende Geschwindigkeit ist ebenfalls prograd und tangential zur Marsbahn gerichtet.

- **d)** Die maximale relative Einsparung an Startenergie beträgt

$$\frac{E_i - E_{ii}}{E_i} = 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \simeq 0.800,$$

also ungefähr 80%.

Lösung

Wir bezeichnen die Bahnradien von Erde und Mars mit r bzw. R und setzen $\mu = GM_{\odot}$. Aus dem angegebenen Verhältnis und der Bedingung für eine Kreisbahn folgt

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \quad V^2 = \frac{\mu}{r}.$$

Alle im Folgenden angegebenen Sondengeschwindigkeiten sind heliozentrisch, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist. Das Gravitationsfeld der Erde wird wie vorgegeben vernachlässigt.

a)

Die Sonde entkommt der Sonne, wenn ihre spezifische mechanische Energie nichtnegativ ist:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} \geq 0.$$

Ihre anfängliche heliozentrische Geschwindigkeit muss daher die Bedingung

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2} V$$

erfüllen.

Bei einer gegebenen Startgeschwindigkeit u relativ zur Erde ist die größtmögliche heliozentrische Geschwindigkeit $V + u$; sie wird durch einen Start parallel zur Bewegung der Erde erreicht. Daher gilt

$$V + u_{i,\min} = \sqrt{2} V,$$

also

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

Die zugehörige heliozentrische Geschwindigkeit beträgt 42.4 km s^{-1} . In diesem Grenzfall ist die Bahn parabolisch, und die Geschwindigkeit im Unendlichen ist null.

b)

Für einen prograden Start setzen wir

$$v_0 = V + u.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist tangential zur Erdbahn gerichtet.

Zwischen der Erd- und der Marsbahn ist die Kraft der Sonne eine Zentralkraft, sodass der Drehimpuls bezüglich der Sonne erhalten bleibt:

$$rv_0 = Rv_{\parallel}.$$

Folglich gilt

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}(V + u).$$

Aus der Erhaltung der mechanischen Energie folgt

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{\mu}{R}.$$

Mit $\mu/r = V^2$ und $\mu/R = \frac{2}{3}V^2$ ergibt sich

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 - \frac{2}{3}V^2.$$

Durch Subtraktion von $v_{\parallel}^2 = \frac{4}{9}v_0^2$ erhält man

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}v_0^2 - \frac{2}{3}V^2} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2}.$$

Dies ist die nach außen gerichtete radiale Komponente beim ersten Kreuzen. Bei einem Kreuzen nach innen kehrt sich ihr Vorzeichen um.

Damit die Sonde den Bahnradius des Mars erreicht, muss der Radikand nichtnegativ sein:

$$v_0^2 \geq \frac{6}{5}V^2.$$

Daraus folgt

$$u \geq \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1\right)V = 2.86 \text{ km s}^{-1}.$$

Gleichheit entspricht einer Bahn, deren Aphel die Marsbahn gerade berührt.

c)

Die Bahngeschwindigkeit des Mars beträgt

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}} V = 24.5 \text{ km s}^{-1}.$$

Wir betrachten die Begegnung als räumlich begrenzt und im Vergleich zur Bahnbewegung des Mars als kurz, sodass die Geschwindigkeit des Mars praktisch konstant ist. Im Bezugssystem des Mars hat die einlaufende Sondengeschwindigkeit die Komponenten

$$w_{\parallel} = v_{\parallel} - V_M, \quad w_{\perp} = v_{\perp}.$$

Für ihren Betrag gilt daher

$$w^2 = (v_{\parallel} - V_M)^2 + v_{\perp}^2.$$

In diesem Bezugssystem bleibt bei der gravitativen Begegnung die mechanische Energie erhalten. Bei gleichen Abständen vom Mars vor und nach der Begegnung ist der Betrag der Relativgeschwindigkeit gleich, obwohl sich ihre Richtung ändert.

Wenn die auslaufende Relativgeschwindigkeit mit der Bewegungsrichtung des Mars einen Winkel θ bildet, gilt für den Betrag der auslaufenden heliozentrischen Geschwindigkeit

$$v_{\text{out}}^2 = V_M^2 + w^2 + 2V_M w \cos \theta.$$

Er ist für $\theta = 0$ am größten, womit sich

$$v_{\text{out,max}} = V_M + w$$

ergibt. Bei der optimalen Begegnung ist die auslaufende Relativgeschwindigkeit somit in Bewegungsrichtung des Mars gerichtet.

Die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Gravitationsfeld der Sonne am Bahnradius des Mars beträgt

$$v_{\text{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} V_M.$$

Die minimal erforderliche Relativgeschwindigkeit ist folglich

$$w_{\min} = (\sqrt{2} - 1)V_M.$$

Nun verwenden wir die in Teil b) bestimmten Komponenten:

$$\begin{aligned} w^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - 2V_M v_{\parallel} + V_M^2 \\ &= v_0^2 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 + V_M^2. \end{aligned}$$

Wegen $V_M^2 = \frac{2}{3}V^2$ vereinfacht sich dies zu

$$w^2 = v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0.$$

Im Grenzfall des Entkommens gilt

$$v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 V_M^2.$$

Die positive Lösung lautet

$$v_{0,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] = 35.555 \dots \text{ km s}^{-1}.$$

Damit beträgt die erforderliche Startgeschwindigkeit relativ zur Erde

$$u_{ii,\min} = v_{0,\min} - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

Dies übersteigt die zum Erreichen der Marsbahn erforderlichen 2.86 km s^{-1} , sodass die einlaufende Bahn möglich ist.

Der prograde Start minimiert die erforderliche Geschwindigkeit auch unter allen möglichen Startrichtungen. Um dies zu zeigen, sei α der Startwinkel relativ zur Bewegungsrichtung der Erde, und wir setzen $q = r/R = 2/3$. Dieselben Beziehungen für Energie und Drehimpuls ergeben

$$w^2 = u^2 + 2Vu(1 - q^{3/2}) \cos \alpha + V^2(3q - 1 - 2q^{3/2}).$$

Für festes u ist dieser Ausdruck bei $\cos \alpha = 1$ am größten, da $q < 1$. Ein prograder Start liefert somit bei gegebener Startgeschwindigkeit die größtmögliche Relativgeschwindigkeit bei der Begegnung.

Numerisch hat die optimale einlaufende Bahn die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_{\parallel} = 23.70 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{\perp} = 10.12 \text{ km s}^{-1}.$$

Daraus ergibt sich $w = 10.15 \text{ km s}^{-1}$. Nach der optimalen Ablenkung gilt

$$v_{\text{out}} = V_M + w = 34.64 \text{ km s}^{-1} = \sqrt{2} V_M,$$

wie gefordert.

Die Energieerhaltung wird dabei nicht verletzt. Die heliozentrische Energie der Sonde nimmt während der Begegnung um

$$\Delta E = m \mathbf{V}_M \cdot (\mathbf{w}_{\text{out}} - \mathbf{w}_{\text{in}})$$

zu. Für die optimale Ablenkung wird daraus

$$\Delta E = m V_M [w - (v_{\parallel} - V_M)] > 0.$$

Diese Energie stammt aus der Bahnbewegung des Mars. Die entsprechende Geschwindigkeitsänderung des Mars ist vernachlässigbar, weil seine Masse viel größer als die der Sonde ist.

d)

Wenn die zum Entkommen aus dem Gravitationsfeld der Erde benötigte Energie vernachlässigt wird, beträgt die beim Start im Bezugssystem der Erde zugeführte Energie

$$E_{\text{launch}} = \frac{1}{2} m u^2.$$

Die maximale relative Einsparung ist daher

$$\begin{aligned}
 f_{\max} &= \frac{E_i - E_{ii}}{E_i} \\
 &= 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \\
 &= 1 - \left(\frac{5.55519}{12.42641} \right)^2 \\
 &= 0.80015.
 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$f_{\max} \simeq 80\%.$$

Die zugehörigen Startenergien pro Masseneinheit der Sonde betragen ungefähr 77.2 MJ kg^{-1} für das direkte Entkommen und 15.4 MJ kg^{-1} bei einem idealen Swing-by am Mars.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.