

المسألة 1: مصفوفة هوائيات لوصلة راديوية

يقيم شاب من هواة الراديو وصلة راديوية مع فتاتين تعيشان في بلدين. ويضع مصفوفة هوائيات بحيث تتلقى الفتاة التي تعيش في البلدة A إشارة عظمى، في حين لا تتلقى الفتاة التي تعيش في البلدة B أي إشارة، والعكس صحيح. تتكون المصفوفة من هوائيين قضيبيين رأسيين يرسلان بشدتين متساويتين وبانتظام في جميع الاتجاهات في المستوى الأفقي.

(a) أوجد معلمات المصفوفة، أي المسافة بين القضيبين، واتجاهها، وفرق الطور بين الإشارتين الكهربائيتين المغذيتين للقضيبيين، بحيث تكون المسافة بين القضيبين أصغر ما يمكن.

(b) أوجد الحل العددي إذا كان لدى الشاب محطة راديوية ترسل بتردد 27 MHz، وكان يقيم مصفوفة الهوائيات في بورتوروج. وقد وجد باستخدام الخريطة أن الزاويتين بين اتجاه الشمال واتجاه كل من A (كوبر) و B (بلدة بويه الصغيرة في إستريا) هما 72° و 157° ، على الترتيب.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) لتكن α الزاوية الفاصلة بين اتجاهي البلدين كما تُرى من المصفوفة، ولتكن λ الطول الموجي. تكون المسافة الدنيا بين القضيبين

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

يجب أن يكون الخط الواصل بين القضيبين عمودياً على المنصف الداخلي للزاوية بين اتجاهي البلدين. رُقم القضيبين بحيث يقع القضيب 2 في اتجاه $\hat{n}_A - \hat{n}_B$ انطلاقاً من القضيب 1، حيث يشير متجه الوحدة نحو البلدين. يجب أن يتأخر القضيب 2 عن القضيب 1 في الطور بمقدار 90° لكي تتلقى A إشارة عظمى وتندعم الإشارة عند B؛ ويجب أن يتقدم في الطور بمقدار 90° لتحقيق العكس.

- (b) الزاوية الفاصلة هي 85° ، ومن ثم

$$d_{\min} \approx 4.1 \text{ m}.$$

سمتا الخط الواصل بين القضيبين هما

$$204.5^\circ \text{ و } 24.5^\circ$$

مقيسان في اتجاه عقارب الساعة انطلاقاً من الشمال. يجب أن يتأخر القضيب الشمالي الشرقي في الطور عن القضيب الجنوبي الغربي بمقدار 90° للحصول على استقبال أعظمي في كوبر وانعدام الاستقبال في بويه؛ وعكس علاقة الطور يبادل بين الحالتين.

الحل

(a)

الإشارتان الصادرتان عن القضيبين مترابطتان، ولهما التردد نفسه واستقطابان رأسيان متطابقان. نستخدم تقريب المجال البعيد: فبعد البلديتين عن المصفوفة أكبر بكثير من المسافة بين القضيبين، ولذلك تكون للموجات الواصلة إلى أي من البلديتين سعتان متساويتان واتجاهها انتشار متوازيان عملياً.

لتكن الإزاحة الأفقية من القضيب 1 إلى القضيب 2 هي $\mathbf{d}$ ، ومقدارها d . نعرّف فرق الطور الكهربائي بالعلاقة

$$\delta = \phi_2 - \phi_1,$$

حيث تتناسب اهتزازات المصدرين مع $\cos(\omega t + \phi_j)$. ومن ثم فإن كون δ موجباً يعني أن القضيب 2 يتقدم في الطور على القضيب 1.

بالنسبة إلى مستقبل بعيد في الاتجاه $\hat{\mathbf{n}}$ ، يحقق طول المسارين العلاقة

$$r_2 - r_1 \simeq -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}.$$

وبالتالي، يكون فرق الطور بين الموجتين المستقبليتين

$$\Delta(\hat{\mathbf{n}}) = \delta - k(r_2 - r_1) = \delta + k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{d}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

إذا كان كل قضيب بمفرده يولّد شدة I_0 عند ذلك المستقبل، فإن مبدأ التراكب يعطي

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right).$$

ولذلك تتطلب الشدة العظمى أن يكون $\Delta = 2m\pi$ ، في حين يتطلب انعدام الشدة أن يكون $\Delta = (2n + 1)\pi$.

للحصول على شدة عظمى عند A وشدة معدومة عند B،

$$\delta + k\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = 2m\pi,$$

$$\delta + k\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = (2n + 1)\pi.$$

ب طرح المعادلتين يُحذف فرق الطور الكهربائي القابل للضبط:

$$k(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d} = \pi.$$

إذن

$$|(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot \mathbf{d}| \geq \frac{\lambda}{2}.$$

بما أن الزاوية بين متجهي الوحدة هي α ، فإن

$$|\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B| = \sqrt{2 - 2\cos \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

لا يمكن أن تتجاوز القيمة المطلقة للجداء القياسي حاصل ضرب مقداري المتجهين، ولذلك

$$2d \sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\lambda}{2}.$$

ويترتب على ذلك أن

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sin(\alpha/2)}.$$

تتحقق المساواة عندما يكون $\mathbf{d}$ موازياً للمتجه $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. وعلاوة على ذلك،

$$(\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B) \cdot (\hat{\mathbf{n}}_A + \hat{\mathbf{n}}_B) = 0.$$

ولأن متجه المجموع يتجه على امتداد النصف الداخلي للزاوية، فإن الخط المطلوب الواصل بين القضيبين يكون عمودياً على ذلك النصف.

اختر الاتجاه من القضيب 1 إلى القضيب 2 في اتجاه $\hat{\mathbf{n}}_A - \hat{\mathbf{n}}_B$. عند المسافة الدنيا،

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d_{\min} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\lambda}{4}, \quad \hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda}{4}.$$

ومن ثم يكون فرقاً الطور عند الاستقبال

$$\Delta_A = \delta + \frac{\pi}{2}, \quad \Delta_B = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

للحصول على استقبال أعظمي عند A، اختر

$$\delta = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

عندئذ يكون $\Delta_A = 0$ و $\Delta_B = -\pi$ ، كما هو مطلوب.

للحصول على استقبال أعظمي عند B، اختر

$$\delta = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

عندئذ يكون $\Delta_A = \pi$ و $\Delta_B = 0$. ولذلك يتطلب التبديل بين نمطي التشغيل تغييراً مقداره 180° في فرق الطور الكهربائي.

(b)

الزاوية الفاصلة بين اتجاهي البلتين هي

$$\alpha = 157^\circ - 72^\circ = 85^\circ.$$

باستخدام $c \simeq 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ، يكون الطول الموجي

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8}{27 \times 10^6} \simeq 11.1 \text{ m}.$$

لذلك،

$$d_{\min} = \frac{11.1}{4 \sin 42.5^\circ} \text{ m} \simeq 4.11 \text{ m},$$

أو تقريباً

$$d_{\min} = 4.1 \text{ m}.$$

سمت المنصف الداخلي هو

$$\frac{72^\circ + 157^\circ}{2} = 114.5^\circ.$$

وبالتالي يكون سمت الخط الواصل بين القضيبين والعمودي على المنصف

$$114.5^\circ - 90^\circ = 24.5^\circ,$$

ويكون الاتجاه المعاكس عند 204.5° .

سمّ القضيب الجنوبي الغربي 1 والقضيب الشمالي الشرقي 2. يكون الإسقاطان في اتجاه البلتين

$$\hat{\mathbf{n}}_A \cdot \mathbf{d} = d \cos(72^\circ - 24.5^\circ) = d \sin 42.5^\circ = \frac{\lambda}{4},$$

$$\hat{\mathbf{n}}_B \cdot \mathbf{d} = d \cos(157^\circ - 24.5^\circ) = -\frac{\lambda}{4}.$$

إذن تكون إعدادات الطور كما يلي:

الاستقبال المطلوب	طور القضيب الشمالي الشرقي بالنسبة إلى القضيب الجنوبي الغربي
أعظمي في كوبر: معدوم في بويه	يتأخر بمقدار 90°

الاستقبال المطلوب	طور القضيب الشمالي الشرقي بالنسبة إلى القضيب الجنوبي الغربي
أعظمي في بويه؛ معدوم في كوبر	يتقدم بمقدار 90°

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: تأثير هول في قضيب من InSb

يمر تيار I في قضيب طويل مصنوع من شبه الموصل InSb، على شكل متوازي مستطيلات أبعاده a ، b ، و c ($a \gg b \gg c$)، ويكون التيار موازياً للحافة a . يوجد القضيب في مجال مغناطيسي خارجي B موازٍ للحافة c . يمكن إهمال المجال المغناطيسي الناتج عن التيار I . حاملات التيار هي الإلكترونات. مقدار السرعة المتوسطة للإلكترونات في شبه موصل عند وجود مجال كهربائي فقط هو $v = \mu E$ ، حيث تُسمى μ الحركية. وإذا وُجد مجال مغناطيسي أيضاً، لم يعد المجال الكهربائي موازياً للتيار. تُعرف هذه الظاهرة بتأثير هول.

(a) حدّد مقدار المجال الكهربائي واتجاهه في القضيب بحيث ينتج التيار الموصوف أعلاه.

(b) احسب فرق الجهد الكهربائي بين النقطتين المتقابلتين على سطحي القضيب في اتجاه الحافة b .

(c) أوجد التعبير التحليلي للمركبة المستمرة (DC) لفرق الجهد الكهربائي في الحالة (b) إذا كان التيار والمجال المغناطيسي متناوبين (AC): $I = I_0 \sin \omega t$ و $B = B_0 \sin(\omega t + \delta)$.

(d) صمّم واشرح دائرة كهربائية تتيج، باستغلال نتيجة (c)، قياس القدرة التي يستهلكها جهاز كهربائي موصول بشبكة التيار المتناوب.

المعطيات: حركية الإلكترونات في InSb هي $7.8 \text{ m}^2\text{T/Vs}$ ، وتركيز الإلكترونات في InSb هو $2.5 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ، و $I = 1.0 \text{ A}$ ، و $B = 0.10 \text{ T}$ ، و $b = 1.0 \text{ cm}$ ، و $c = 1.0 \text{ mm}$ ، و $e_0 = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

نختار محاور وفق قاعدة اليد اليمنى، بحيث يكون $\hat{x}$ في اتجاه التيار الاصطلاحي و $\hat{z}$ في اتجاه المجال المغناطيسي. لتكن $e = -e_0 > 0$ ، وليكن n تركيز الإلكترونات، ونعرّف جهد هول بالعلاقة

$$U_H = V(y = +b/2) - V(y = -b/2).$$

• (a) المجال الكهربائي هو

$$\mathbf{E} = \frac{I}{nec\mu} \hat{x} - \frac{IB}{nec} \hat{y} = (3.2\hat{x} - 2.5\hat{y}) \text{ V m}^{-1}.$$

مقداره 4.1 V m^{-1} . وهو عمودي على $\mathbf{B}$ ، ويميل بزاوية

$$\theta = \tan^{-1}(\mu B) = 38^\circ$$

عن اتجاه التيار نحو $-\hat{y}$ ، وهو اتجاه $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$.

• (b)

$$U_H = \frac{IB}{nec} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ V} = 25 \text{ mV}.$$

الوجه $+y$ عند جهد أعلى.

(c •

$$U_{H,DC} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta.$$

• (d) نستخدم ملف تيار موصولاً على التوالي لتوليد $B(t) = k_I i_L(t)$ ونمرّر تياراً في قضيب هول عبر فرع مقاومي لاستشعار الجهد بحيث يكون $I_H(t) = k_U u(t)$. عندئذ يقرأ فولتметр يقيس القيمة المتوسطة، موصول بين الوجهين المتقابلين في اتجاه b ، القيمة

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} P, \quad P = U_{rms} I_{L,rms} \cos \varphi.$$

نعاير تدريجه مباشرة بالواط.

الحل

ننظر في المنطقة الوسطى المتجانسة من القضيب الطويل، مع إهمال تأثيرات التلامس والمجال المغناطيسي الذي يولّده تياره. الوجهان العرضيان غير موصولين بدائرة مغلقة، ولذلك لا يوجد تيار عرضي مستقر.

في الحسابات العددية، تُفسّر الحركية على أنها $7.8 \text{ m}^2/(\text{Vs})$ ، كما تقتضيه العلاقة $v = \mu E$ ؛ أما الوحدة $\text{m}^2\text{T}/\text{Vs}$ الواردة في المعطيات فغير متسقة من حيث الأبعاد مع هذه العلاقة.

(a) مقدار المجال الكهربائي واتجاهه

ترتبط كثافة التيار بسرعة انجراف الإلكترونات بالعلاقة

$$\mathbf{j} = -nev_e.$$

وبما أن مساحة المقطع العرضي هي bc ، فإن

$$\mathbf{j} = \frac{I}{bc} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_e = -v_d \hat{\mathbf{x}}, \quad v_d = \frac{I}{nebc}.$$

يربط قانون الحركية المعطى مقدار السرعة بمقدار المجال. وفي الصيغة المتجهة، تنجرف الإلكترونات في الاتجاه المعاكس للمجال الكهربائي عند غياب المجال المغناطيسي.

في نموذج الحركية المعتاد المتساوي الخواص، تُحدث التصادمات قوة مقاومة متوسطة $-e\mathbf{v}_e/\mu$. لذلك يكون اتزان القوى في الحالة المستقرة عند وجود المجالين معاً على الصورة

$$0 = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \frac{e}{\mu} \mathbf{v}_e.$$

ومن ثم،

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}_e}{\mu} - \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}.$$

عندما يكون $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ ، نجد

$$\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = (-v_d \hat{\mathbf{x}}) \times (B\hat{\mathbf{z}}) = v_d B \hat{\mathbf{y}},$$

ومن ثم

$$\mathbf{E} = \frac{v_d}{\mu} \hat{\mathbf{x}} - v_d B \hat{\mathbf{y}}.$$

تحافظ المركبة الطولية على الانجراف في مواجهة التصادمات. وتوازن المركبة العرضية القوة المغناطيسية. وعلى وجه التحديد، تدفع القوة المغناطيسية الإلكترونات في البداية نحو الوجه $-y$ ؛ ويولّد تراكمها المجال المطلوب في الاتجاه $-y$.

عددياً،

$$bc = (1.0 \times 10^{-2})(1.0 \times 10^{-3}) = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^2,$$

$$v_d = \frac{1.0}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-5})} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

إذن

$$E_x = \frac{25}{7.8} = 3.2 \text{ V m}^{-1}, \quad E_y = -25(0.10) = -2.5 \text{ V m}^{-1}, \quad E_z = 0.$$

المقدار هو

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{I}{nec\mu} \sqrt{1 + (\mu B)^2} = \boxed{4.1 \text{ V m}^{-1}}.$$

وتحقق الزاوية المقيسة من $\hat{x} + \hat{y}$ العلاقة

$$\tan \theta = \frac{|E_y|}{E_x} = \mu B = 0.78,$$

فتكون

$$\boxed{\theta = 38^\circ}.$$

(b) فرق الجهد العرضي

نختار نقطتين متقابلتين على الوجهين المتقابلين في اتجاه b ، ولهما الإحداثي الطولي نفسه. وبما أن $\mathbf{E} = -\nabla V$ ، فإن

$$U_H = - \int_{-b/2}^{b/2} E_y dy = -E_y b = v_d B b.$$

بالتعويض عن مقدار سرعة الانجراف نحصل على

$$\boxed{U_H = \frac{IB}{nec}}.$$

عدديًا،

$$U_H = \frac{(1.0)(0.10)}{(2.5 \times 10^{22})(1.6 \times 10^{-19})(1.0 \times 10^{-3})} = \boxed{0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}}.$$

تتراكم الإلكترونات على الوجه $-y$ ويكون عند جهد أدنى؛ أما الوجه y فيكون عند جهد أعلى.

(c) المركبة المستمرة لتيار ومجال مغناطيسي متناوبين

نفترض تشغيلًا شبه ساكن: يتبع انجراف الإلكترونات وتوزيع شحنة هول الإشارات المطبقة بسرعة كافية، ويكون الجهد المستحث في أسلاك قياس الجهد مهملاً. عندئذ يكون جهد هول اللحظي

$$U_H(t) = \frac{I(t)B(t)}{nec} = \frac{I_0 B_0}{nec} \sin \omega t \sin(\omega t + \delta).$$

باستخدام

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)],$$

نحصل على

$$U_H(t) = \frac{I_0 B_0}{2nec} [\cos \delta - \cos(2\omega t + \delta)].$$

متوسط الحد الثاني على مدى دورة يساوي صفرًا. ومن ثم

$$\boxed{U_{H,DC} = \overline{U_H} = \frac{I_0 B_0}{2nec} \cos \delta}.$$

وبصورة مكافئة،

$$\overline{U_H} = \frac{I_{\text{rms}} B_{\text{rms}}}{nec} \cos \delta.$$

يحتوي الخرج على مركبة مستمرة وتموج بتردد يساوي ضعف التردد المطبق. وتندم مركبته المستمرة عندما يكون فرق الطور بين إشارتي الدخل ربع دورة.

(d) دائرة لقياس قدرة التيار المتناوب

تجعل النتيجة في الجزء (c) عنصر هول مضاعفًا: إذ يتناسب جهده العرضي مع حاصل ضرب تياره الطولي في المجال المغناطيسي. تتضمن دائرة مناسبة التوصيلات الآتية:

1. نصل ملفًا موليًّا للمجال على التوالي مع الجهاز. ونضع قضيب هول داخل الملف، بحيث يكون اتجاه c فيه موازيًا للمجال. نستخدم ملفًا ذا استجابة خطية، ويفضل أن يكون ذا قلب هوائي، بحيث

$$B(t) = k_I i_L(t),$$

حيث $i_L(t)$ هو تيار الجهاز و k_I هو ثابت المجال للملف.

2. نصل فرعًا منفصلًا بين طرفي شبكة التيار المتناوب، يتكوّن من مقاومة كبيرة غير حثية R موصولة على التوالي مع نقطتي التلامس الطرفيتين الطوليتين لقضيب هول. تُستنتج مقاومة القضيب الطولية من الجزء (a):

$$r_H = \frac{E_x a}{I_H} = \frac{a}{ne\mu b c}.$$

وهكذا، مع إهمال مفاعلة الفرع،

$$I_H(t) = \frac{u(t)}{R + r_H} = k_U u(t).$$

يتيح اختيار $R \gg r_H$ الحصول على $k_U \simeq 1/R$ ، ويحدّ من تيار الاستشعار.

3. نصل نقطتي تلامس هول المتقابلتين على الوجهين المتقابلين في اتجاه b ، عند الموضع الطولي نفسه، بفولتметр ذي معاوقة دخل عالية يقيس القيمة المتوسطة. ويمكن أيضًا استخدام مرشّح تمرير منخفض مزوّد بعازل فعّال، يتبعه مقياس للجهد المستمر. نأخذ المتوسط على مدى دورات عديدة للتيار المتناوب.

نهمل هبوط الجهد عبر ملف المجال وتأثير التحميل الناتج عن فرع استشعار الجهد. عندئذ يكون $u(t)$ أيضًا جهد الجهاز، ويكون

$$U_H(t) = \frac{I_H(t) B(t)}{nec} = \frac{k_U k_I}{nec} u(t) i_L(t).$$

ولذلك يكون متوسطه

$$\overline{U_H} = \frac{k_U k_I}{nec} \overline{u(t) i_L(t)} = \frac{k_U k_I}{nec} P.$$

في حالة التشغيل الجيبي، نكتب

$$u(t) = U_0 \sin \omega t, \quad i_L(t) = I_{L0} \sin(\omega t - \varphi).$$

عندئذ

$$P = \frac{U_0 I_{L0}}{2} \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{L,\text{rms}} \cos \varphi.$$

وبالتالي يقيس المقياس القدرة المتوسطة المستهلكة، مع مراعاة اعتمادها على معامل القدرة. وتكون معايرته بالواط وفق العلاقة

$$P = \frac{nec}{k_U k_I} \overline{U_H}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: إفلات مسبار فضائي من النظام الشمسي بمساعدة المريخ

تجري في مشروع للبحوث الفضائية مناقشة خطتين لإطلاق مسبار فضائي إلى خارج النظام الشمسي. تتمثل الخطوة الأولى (i) في إطلاق المسبار بسرعة كبيرة بما يكفي للإفلات من النظام الشمسي مباشرة. أما وفقاً للخطوة الثانية (ii)، فيقترب المسبار من أحد الكواكب الخارجية، ويغير بمساعدته اتجاه حركته ويبلغ السرعة اللازمة للإفلات من النظام الشمسي. افترض أن المسبار يتحرك تحت تأثير مجال جاذبية الشمس وحدها أو الكوكب وحده، بحسب أي المجالين أقوى عند النقطة المعنية.

(a) حدّد أدنى سرعة ينبغي إكسابها للمسبار عند إطلاقه وفقاً للخطوة (i)، واتجاهها بالنسبة إلى حركة الأرض.

(b) افترض أن المسبار أُطلق في الاتجاه المحدّد في (a)، ولكن بسرعة أخرى. حدّد سرعة المسبار عندما يعبر مدار المريخ، أي مركبتها الموازية لهذا المدار والعمودية عليه. لا يكون المريخ قريباً من نقطة العبور عند حدوث العبور.

(c) ليدخل المسبار مجال جاذبية المريخ. أوجد أدنى سرعة إطلاق من الأرض تلزم المسبار للإفلات من النظام الشمسي.

تلميح: تعرف من نتيجة (a) المقدار الأمثل لسرعة المسبار واتجاهها اللازمين للإفلات من النظام الشمسي بعد مغادرة مجال جاذبية المريخ. (لا داعي للاهتمام بموضع المريخ الدقيق أثناء اللقاء.) أوجد العلاقة بين هذه السرعة ومركبتي السرعة قبل دخول المسبار مجال جاذبية المريخ؛ أي المركبتين اللتين حدّدتهما في (b). ماذا عن انحفاظ طاقة المسبار؟

(d) قدر أكبر وفر نسبي ممكن في الطاقة في الخطوة (ii) مقارنة بالخطوة (i). ملاحظات: افترض أن جميع الكواكب تدور حول الشمس في مدارات دائرية، في الاتجاه نفسه وفي المستوى نفسه. أهمل مقاومة الهواء، ودوران الأرض حول محورها، وكذلك الطاقة المستخدمة في الإفلات من مجال جاذبية الأرض.

المعطيات: سرعة الأرض حول الشمس هي 30 km/s، ونسبة بُعد الأرض عن الشمس إلى بُعد المريخ عنها هي 2/3.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

لتكن $V = 30 \text{ km s}^{-1}$ ، وليرمز u إلى سرعة الإطلاق بالنسبة إلى الأرض.

• (a) يكون الإطلاق في اتجاه حركة الأرض المدارية، بسرعة

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

• (b) عند الإطلاق في اتجاه الحركة المدارية بسرعة u ، تكون مركبتا السرعة بالنسبة إلى الشمس عند مدار المريخ

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}(V + u), \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}(V + u)^2 - \frac{2}{3}V^2},$$

حيث تتجه $v_{\perp}$ شعاعياً إلى الخارج عند العبور الأول. ويتطلب بلوغ هذا المدار أن يكون $u \geq 2.86 \text{ km s}^{-1}$.

• (c) مع $V_M = \sqrt{2/3}V$ ، تكون أدنى سرعة إطلاق بالنسبة إلى الأرض

$$u_{ii,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

يكون الإطلاق في اتجاه الحركة المدارية؛ وتكون السرعة المثلى بعد اللقاء أيضاً في اتجاه الحركة المدارية ومماسية لمدار المريخ.

• (d) أكبر وفر نسبي في طاقة الإطلاق هو

$$\frac{E_i - E_{ii}}{E_i} = 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \simeq 0.800,$$

أي نحو 80%.

الحل

لنرمز إلى نصفي قطر مداري الأرض والمريخ بالرمزين r و R ، على الترتيب، ولنضع $\mu = GM_\odot$. تعطينا النسبة المعطاة وشرط المدار الدائري

$$\frac{r}{R} = \frac{2}{3}, \quad V^2 = \frac{\mu}{r}.$$

جميع سرعات المسبار الواردة أدناه مقيسة بالنسبة إلى الشمس، ما لم يُذكر خلاف ذلك صراحةً. ويُهمل مجال جاذبية الأرض وفقاً للتعليمات.

(a)

يفلت المسبار من جاذبية الشمس إذا كانت طاقته الميكانيكية لكل وحدة كتلة غير سالبة:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} \geq 0.$$

لذلك يجب أن تحقق سرعته الابتدائية بالنسبة إلى الشمس

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2} V.$$

عند سرعة إطلاق معطاة u بالنسبة إلى الأرض، تكون أكبر سرعة ممكنة بالنسبة إلى الشمس هي $V + u$ ، وتتحقق بالإطلاق موازياً لحركة الأرض وفي اتجاهها. ومن ثم

$$V + u_{i,\min} = \sqrt{2} V,$$

وبالتالي

$$u_{i,\min} = (\sqrt{2} - 1)V = 12.4 \text{ km s}^{-1}.$$

السرعة المقابلة بالنسبة إلى الشمس هي 42.4 km s^{-1} . وعند هذه العتبة يكون المسار قطعاً مكافئاً، وتندعم السرعة عند اللانهاية.

(b)

للإطلاق في اتجاه الحركة المدارية، نضع

$$v_0 = V + u.$$

تكون السرعة الابتدائية مماسية لمدار الأرض.

بين مداري الأرض والمريخ، تكون قوة الشمس مركزية، لذا ينحفظ الزخم الزاوي حول الشمس:

$$rv_0 = Rv_{\parallel}.$$

وعليه،

$$v_{\parallel} = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}(V + u).$$

يعطي انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) - \frac{\mu}{R}.$$

وباستخدام $\mu/R = \frac{2}{3}V^2$ و $\mu/r = V^2$

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v_0^2 - \frac{2}{3}V^2.$$

وبطرح $v_{\parallel}^2 = \frac{4}{9}v_0^2$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{5}{9}v_0^2 - \frac{2}{3}V^2} = \sqrt{\frac{5}{9}(V+u)^2 - \frac{2}{3}V^2}.$$

هذه هي المركبة الشعاعية المتجهة إلى الخارج عند العبور الأول. وتنعكس إشارتها عند العبور نحو الداخل.

لكي يبلغ المسبار نصف قطر مدار المريخ، يجب أن تكون الكمية تحت الجذر غير سالبة:

$$v_0^2 \geq \frac{6}{5}V^2.$$

ومن ثم

$$u \geq \left(\sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right) V = 2.86 \text{ km s}^{-1}.$$

تقابل المساواة مدارًا يلامس أوجهُ مدار المريخ تمامًا.

(c)

السرعة المدارية للمريخ هي

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}} V = 24.5 \text{ km s}^{-1}.$$

نعدّ اللقاء محصورًا في حيز صغير وقصير المدة مقارنة بالحركة المدارية للمريخ، بحيث تكون سرعة المريخ ثابتة عمليًا. في الإطار المرجعي للمريخ، تكون مركبتا سرعة المسبار الوارد

$$w_{\parallel} = v_{\parallel} - V_M, \quad w_{\perp} = v_{\perp}.$$

ومن ثم يُعطى مقدارها بالعلاقة

$$w^2 = (v_{\parallel} - V_M)^2 + v_{\perp}^2.$$

في هذا الإطار المرجعي، يحافظ اللقاء الثقالي على الطاقة الميكانيكية. وعند مسافتين متساويتين من المريخ قبل اللقاء وبعده، يكون مقدار السرعة النسبية واحدًا، مع تغيير اتجاهها.

إذا صنعت السرعة النسبية بعد اللقاء زاوية θ مع حركة المريخ، فإن السرعة بالنسبة إلى الشمس بعد اللقاء تحقق

$$v_{\text{out}}^2 = V_M^2 + w^2 + 2V_M w \cos \theta.$$

وتبلغ أكبر قيمة لها عندما يكون $\theta = 0$ ، مما يعطي

$$v_{\text{out,max}} = V_M + w.$$

وهكذا يوجّه اللقاء الأمثل السرعة النسبية بعد اللقاء في اتجاه حركة المريخ.

سرعة الإفلات من جاذبية الشمس عند نصف قطر مدار المريخ هي

$$v_{\text{esc}}(R) = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{2} V_M.$$

وعليه، فإن أدنى سرعة نسبية مطلوبة هي

$$w_{\text{min}} = (\sqrt{2} - 1)V_M.$$

نستخدم الآن المركبتين اللتين أوجدنا في الجزء (b):

$$\begin{aligned} w^2 &= v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 - 2V_M v_{\parallel} + V_M^2 \\ &= v_0^2 - \frac{2}{3}V^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 + V_M^2. \end{aligned}$$

وبما أن $V_M^2 = \frac{2}{3}V^2$ ، تُبسَّط هذه العلاقة إلى

$$w^2 = v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0.$$

عند عتبة الإفلات،

$$v_0^2 - \frac{4}{3}V_M v_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 V_M^2.$$

الجزر الموجب هو

$$v_{0,\min} = V_M \left[\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + (\sqrt{2} - 1)^2} \right] = 35.555 \dots \text{ km s}^{-1}.$$

لذلك تكون سرعة الإطلاق المطلوبة بالنسبة إلى الأرض

$$u_{\text{ii},\min} = v_{0,\min} - V = 5.56 \text{ km s}^{-1}.$$

تتجاوز هذه القيمة السرعة 2.86 km s^{-1} اللازمة لبلوغ مدار المريخ، لذا فإن المسار الوارد ممكن.

كما أن الإطلاق في اتجاه الحركة المدارية يجعل السرعة المطلوبة أصغر ما يمكن بين اتجاهات الإطلاق الممكنة. ولإثبات ذلك، لتكن α زاوية الإطلاق بالنسبة إلى حركة الأرض، ولنكتب $q = r/R = 2/3$. تعطي علاقات الطاقة والزخم الزاوي نفسها

$$w^2 = u^2 + 2Vu(1 - q^{3/2}) \cos \alpha + V^2(3q - 1 - 2q^{3/2}).$$

عند تثبيت u ، تبلغ هذه الكمية أكبر قيمة لها عندما يكون $\cos \alpha = 1$ ، لأن $q < 1$. وهكذا يتيح الإطلاق في اتجاه الحركة المدارية أكبر سرعة نسبية ممكنة عند اللقاء لسرعة إطلاق معطاة.

عدياً، تكون مركبتا السرعة على المسار الوارد الأمثل

$$v_{\parallel} = 23.70 \text{ km s}^{-1}, \quad v_{\perp} = 10.12 \text{ km s}^{-1}.$$

وتعطيان $w = 10.15 \text{ km s}^{-1}$. وبعد الانعطاف الأمثل،

$$v_{\text{out}} = V_M + w = 34.64 \text{ km s}^{-1} = \sqrt{2} V_M,$$

كما هو مطلوب.

لا يوجد أي انتهاك لانحفاظ الطاقة. تزداد طاقة المسبار بالنسبة إلى الشمس أثناء اللقاء بمقدار

$$\Delta E = m \mathbf{V}_M \cdot (\mathbf{w}_{\text{out}} - \mathbf{w}_{\text{in}}).$$

وللانعطاف الأمثل، تصبح هذه العلاقة

$$\Delta E = m V_M [w - (v_{\parallel} - V_M)] > 0.$$

تأتي هذه الطاقة من الحركة المدارية للمريخ. ويكون التغير المقابل في سرعة المريخ مهملاً لأن كتلته أكبر بكثير من كتلة المسبار.

(d)

بإهمال طاقة الإفلات من الأرض، تكون الطاقة المُكسَّبة عند الإطلاق في الإطار المرجعي للأرض

$$E_{\text{launch}} = \frac{1}{2} m u^2.$$

ومن ثم يكون أكبر وفر نسبي

$$\begin{aligned}
 f_{\max} &= \frac{E_i - E_{ii}}{E_i} \\
 &= 1 - \left(\frac{u_{ii,\min}}{u_{i,\min}} \right)^2 \\
 &= 1 - \left(\frac{5.55519}{12.42641} \right)^2 \\
 &= 0.80015.
 \end{aligned}$$

وعليه

$$f_{\max} \simeq 80\%.$$

تبلغ طاقتا الإطلاق المقابلتان لكل وحدة كتلة من المسبار نحو 77.2 MJ kg^{-1} للإفلات المباشر، و 15.4 MJ kg^{-1} بمساعدة المريح المثالية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.