

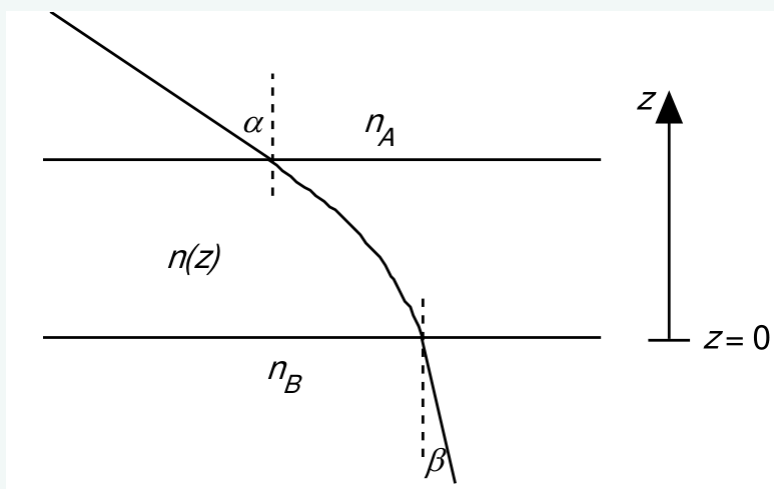
IPhO 1984

理论题与解答 · 瑞典锡格蒂纳 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1984/

题目 1：分层介质中的折射与沙漠蜃景

a) 考虑一块平行平面透明板，其折射率 n 随距下表面的距离 z 而变化（见图）。证明 $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$ 。符号的含义如图所示。



b) 假设你站在一片广阔而平坦的沙漠中。在一定距离处，你看到了看似水面的景象。当你走近这片“水面”时，它似乎也在远离你，使得你到“水面”的距离始终保持不变。解释这一现象。

c) 假设你的眼睛距地面 1.60 m，到“水面”的距离为 250 m，计算 b) 中紧贴地面的空气温度。在 15°C 和标准大气压 (101.3 kPa) 下，空气的折射率为 1.000276。假设距地面 1 m 以上的空气温度恒定，等于 30°C 。假设大气压为标准大气压。空气的折射率 n 满足 $n - 1$ 与空气密度成正比。讨论所得结果的准确性。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 守恒量为 $n(z) \sin \theta(z)$ ，其中 θ 是光线与法线的夹角。因此，

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

- b) 这是一种下蜃景：近地面温度较高、密度较小的空气使来自天空的光线向上弯曲，进入观察者的眼睛。由于水平方向上的温度分布和观察者眼睛的高度保持不变，表观水面始终保持在恒定的距离处。

- c) 将 250 m 理解为蜃景近侧边缘的表观距离,

$$T_{\text{ground air}} \simeq 329 \text{ K} \simeq 56^\circ \text{C}.$$

小角度近似带来的误差小于 0.001°C ; 表观边缘位置的不确定性以及实际大气对理想分层条件的偏离影响更大。

解答

a)

将透明板分成许多很薄的水平层, 每一层的折射率近似为常量。设第 i 层的折射率为 n_i , 光线在该层内与法线的夹角为 θ_i 。

在每个界面处, 由斯涅尔定律可得

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}.$$

由于所有界面彼此平行, 它们的法线方向相同。将入射界面和出射界面也包括在内, 有

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \theta_1 = \cdots = n_N \sin \theta_N = n_B \sin \beta.$$

令各层厚度趋于无穷小, 便得到折射率连续变化时的结果:

$$n(z) \sin \theta(z) = p = \text{常量}, \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

b)

阳光加热沙漠地表, 地表又加热紧贴其上的空气。在气压近似恒定的条件下, 温度较高的空气密度较小, 因而折射率也较小。因此, 在这一热空气层内, 折射率随高度增加而增大。

考虑一条来自天空、以与地面成很小夹角的方向向下传播的光线。由 a) 可知,

$$\sin \theta(z) = \frac{p}{n(z)}.$$

当光线进入折射率较小的空气时, 它与竖直方向的夹角 θ 增大。如果它到达满足 $n(z) = p$ 的高度, 其方向便变为水平。随后, 它转而向上, 朝折射率较大的区域传播, 并可能到达观察者。

观察者沿直线反向延长入射光线, 因此看到的天空光似乎来自地平线以下。这类似于天空在水中的倒影。在平滑的温度梯度中, 光线通过连续折射而转向。

如果大气在水平方向上是均匀的, 水平移动不会改变光学条件。在眼睛高度固定的情况下, 蜃景近侧边缘的角位置保持不变, 因此其表观距离也保持不变。

c)

用 n_e 表示眼睛高度处的折射率, 用 n_g 表示紧贴地面的最热空气中的最小折射率。假设几何光学适用, 空气水平分层, 且温度越接近地面越高。

首先确定折射率与温度的关系。将空气视为处于恒定气压下的理想气体, 则

$$\rho \propto \frac{1}{T},$$

其中 T 为绝对温度。由于 $n - 1 \propto \rho$,

$$n(T) - 1 = \frac{A}{T},$$

其中

$$A = (1.000276 - 1)(273.15 + 15) = 0.0795294 \text{ K}.$$

眼睛位于 1 m 高度以上，因此其周围空气的温度为

$$T_e = 303.15 \text{ K}.$$

因此，

$$n_e = 1 + \frac{0.0795294}{303.15} = 1.000262343.$$

设 δ 为蜃景近侧边缘相对于水平方向的俯角。将题目给出的距离理解为地面平面上的表观距离，沿观察方向作直线反向投影，可得

$$\tan \delta = \frac{h}{D} = \frac{1.60}{250} = 0.00640,$$

所以

$$\delta = 0.0063999 \text{ rad} \simeq 0.367^\circ.$$

近侧边缘由在折射率最小的空气中变为水平的极限光线决定。在眼睛高度处，这条光线与竖直方向的夹角为 $90^\circ - \delta$ ；在转向点处，该夹角为 90° 。因此，由 a) 可得

$$n_e \sin(90^\circ - \delta) = n_g \sin 90^\circ,$$

即

$$n_g = n_e \cos \delta = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}.$$

俯角较小的光线在地面上方转向，将来自天空的光传送至观察者。俯角较大的光线则到达地面。

代入数值得

$$n_g = \frac{1.000262343}{\sqrt{1 + (1.60/250)^2}} = 1.000241859.$$

于是

$$T_g = \frac{A}{n_g - 1} = \frac{0.0795294}{0.000241859} = 328.826 \text{ K},$$

因此

$$\boxed{T_g \simeq 56^\circ \text{C}}.$$

讨论准确性时，相关的折射率减小量为

$$n_e - n_g \simeq 2.05 \times 10^{-5}.$$

该角度足够小，将

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}$$

替换为 $1 - \frac{1}{2}(h/D)^2$ ，仅使计算所得温度改变约 0.0009 K。

观测条件和大气条件的假设影响更大。在保持参考折射率和上方空气温度不变的情况下，对温度公式求微分，在题给数值处可得

$$dT_g \simeq 55.7 \text{ K} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dD}{D} \right).$$

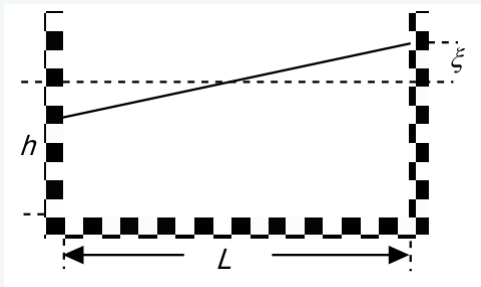
因此， h/D 的 1% 误差会使推算出的温度改变约 0.56°C 。

蜃景边缘模糊、湍流、受热不均以及对水平分层条件的偏离，都可能引入更大的误差。理想的极限角计算不需要详细的竖直分布，但要求存在一个与最热空气相对应的清晰边缘。由于题目未提供测量不确定度，因此无法合理地给出数值误差范围。

解答已与官方解答核对。

题目 2：湖水的假潮

某些湖泊中会出现一种称为“假潮”的奇特现象，即湖水的振荡。能观察到这种现象的湖泊通常长度远大于水深，而且湖面狭窄。在湖中看到波浪是很自然的，但假潮却不同：整个湖水都在振荡，就像你端着一杯咖啡走向等候的客人时，杯中的咖啡那样。



为了建立假潮的模型，我们考察矩形容器中的水。容器的长度为 L ，水深为 h 。假设水面最初与水平面成一个小角度。随后水便开始发生假潮振荡，我们假定水面始终保持为平面，但绕一条位于水平面内、通过容器中部的轴振荡。

建立水运动的模型，并推导振荡周期 T 的公式。初始条件如上图所示。假设 $\xi \ll h$ 。下表给出了两个不同长度的容器中，不同水深所对应的实验振荡周期。用某种合理的方法检验你所推导的公式与实验数据的符合程度。评价你的模型的优劣。

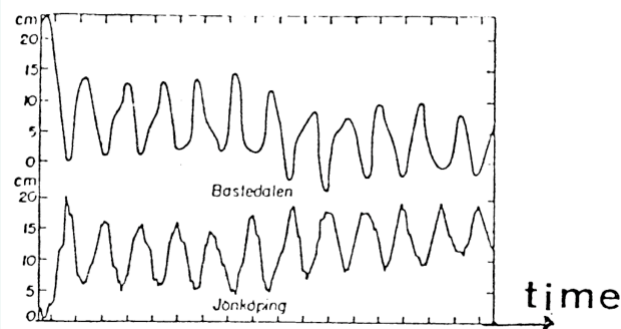
表 1. $L = 479 \text{ mm}$

h/mm	30	50	69	88	107	124	142
T/s	1.78	1.40	1.18	1.08	1.00	0.91	0.82

表 2. $L = 143 \text{ mm}$

h/mm	31	38	58	67	124
T/s	0.52	0.52	0.43	0.35	0.28

下图给出了瑞典韦特恩湖的测量结果。该湖长 123 km ，平均水深为 50 m 。图中的时间尺度是多少？



巴斯图达伦（韦特恩湖北端）和延雪平（南端）的水位。

题目译自官方英文原文。

答案

题目 2 没有编号的小问，也没有标注分值。以下按照题目中的顺序回答各项要求。

- 2 — 运动与周期：利用质心和端壁静水压力建立的简单模型给出简谐振荡，其周期为

$$T_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

考虑水平流速变化的能量模型给出改进的估计

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} \simeq 1.987 \frac{L}{\sqrt{gh}}.$$

- 2 — 与实验的比较及模型评价：在较长的容器中， T_0 比实测周期低 10.0–15.2%；在较短的容器中，低 8.6–20.0%。该模型反映了近似的标度关系 $T \propto L/\sqrt{h}$ 。能量估计与实验更为接近：两种容器中的最大偏差分别为 7.1% 和 12.4%。当水深与长度相当时，两种模型的适用性都受到限制。
- 2 — 韦特恩湖： $T_0 \simeq 2.8$ h，而 $T_1 \simeq 3.1$ h。因此，图中每次振荡约为三小时，或者说，横轴每个刻度间隔为两小时，整段记录约为一天半。

解答

2 — 运动模型与振荡周期

设容器宽度为 b ，水的密度为 ρ 。以容器中点为原点，沿水平方向取坐标 x 。将水面距容器底部的高度写为

$$H(x, t) = h + \eta(x, t), \quad \eta(x, t) = \frac{2q(t)x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

因此，左、右两端的水深分别为 $h - q$ 和 $h + q$ 。初始时 $q = \xi$ 。

忽略黏性、阻尼和表面张力。对于长而浅的容器，首先可以忽略竖直加速度，并将压强近似视为静水压强。小振幅条件 $|q| \ll h$ 使我们能够采用线性振荡模型。

水的总质量为

$$M = \rho b L h,$$

因为平均水面以上的水体积等于其下方缺少的水体积。质心的水平坐标 X 为

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho b}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x H(x, t) dx \\ &= \frac{1}{Lh} \frac{2q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \boxed{\frac{Lq}{6h}}. \end{aligned}$$

端壁对深度为 H 的水施加的静水压力大小为

$$b \int_0^H \rho g (H - z) dz = \frac{1}{2} \rho g b H^2.$$

因此，水所受的水平合力为

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho g b [(h - q)^2 - (h + q)^2] \\ &= -2 \rho g b h q. \end{aligned}$$

该力为回复力：当右侧水面较高时，力指向左侧。由牛顿第二定律得

$$M \ddot{X} = F_x,$$

即

$$\rho b L h \frac{L}{6h} \ddot{q} = -2 \rho g b h q.$$

因此，

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{12gh}{L^2} q = 0}.$$

这是简谐运动，其角频率和周期为

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{12gh}}{L}, \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}}.$$

若水从图示状态由静止释放，则

$$q(t) = \xi \cos(\omega_0 t), \quad \eta(x, t) = \frac{2\xi x}{L} \cos(\omega_0 t).$$

因此，两端以相反的相位振荡。周期与小振幅的大小、容器宽度及水的密度无关。

考虑流速的能量估计

平面水面只是对实际运动的一种近似。我们可以构建能量模型，评估计入内部流动分布的影响。

假设水平速度 $u(x, t)$ 沿水深方向近似均匀。将体积守恒关系在水深 h 附近线性化，要求

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

利用 $\eta = 2qx/L$ ，并施加两端壁处水平平均无水流穿过的条件，得到

$$u(x, t) = \frac{\dot{q}}{Lh} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

水平流速在中部最大，在端壁处为零。在浅水近似下，竖直运动的动能远小于水平运动的动能。因此

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho b h \int_{-L/2}^{L/2} u^2 dx \\ &= \frac{\rho b L^3}{60h} \dot{q}^2. \end{aligned}$$

相对于水面水平时，重力势能的增加量为

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [(h + \eta)^2 - h^2] dx \\ &= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx \\ &= \frac{\rho g b L}{6} q^2, \end{aligned}$$

其中，与 $\int \eta dx$ 成正比的项由体积守恒而为零。

由 $K + U$ 守恒，现在得到

$$\ddot{q} + \frac{10gh}{L^2} q = 0,$$

从而

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} = \sqrt{\frac{6}{5}} T_0.$$

这一估计比简单质心模型的结果约长 9.5%。

系数的差异反映了两种模型对运动的近似描述不同：第一个模型使用端壁处的静水压力，第二个模型则使用满足体积守恒的试探流场的能量。实际自由液面通常会偏离平面，因此这两个系数都不应被视为精确的流体动力学结果。

2 — 与测量结果的比较及模型评价

取 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ，预测周期如下：

对于 $L = 479 \text{ mm}$ ：

$h \text{ (mm)}$	实测 $T \text{ (s)}$	$T_0 \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$
30	1.78	1.60	1.75
50	1.40	1.24	1.36
69	1.18	1.06	1.16
88	1.08	0.935	1.02
107	1.00	0.848	0.929
124	0.91	0.788	0.863
142	0.82	0.736	0.806

对于 $L = 143 \text{ mm}$:

$h \text{ (mm)}$	实测 $T \text{ (s)}$	$T_0 \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$
31	0.52	0.470	0.515
38	0.52	0.425	0.465
58	0.43	0.344	0.377
67	0.35	0.320	0.350
124	0.28	0.235	0.258

为进行定量比较, 将相对偏差定义为

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{model}} - T_{\text{measured}}}{T_{\text{measured}}}.$$

简单模型给出的周期系统性地低于观测值: 在较长的容器中低 10.0–15.2%, 在较短的容器中低 8.6–20.0%。能量估计将偏差绝对值的最大值分别降至 7.1% 和 12.4%。

也可以通过无量纲量来检验近似的标度关系:

$$C = \frac{T\sqrt{gh}}{L}.$$

较长容器中的实验值约在 2.02 至 2.14 之间, 较短容器中的实验值约在 1.98 至 2.27 之间。这些值与同一个常数相当接近。两个模型的预测值为

$$C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1.814, \quad C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1.987.$$

因此, 这些模型有效地描述了周期的量级及其对参数的依赖关系, 而计入流速分布后, 与这些数据的符合程度有所改善。

不过, 它们的适用性仍有限制。较长容器中的比值 h/L 从 0.063 到 0.30, 较短容器中则从 0.22 到 0.87。尤其是较短容器中水深最大的那些测量条件, 已经超出了浅水近似的可靠适用范围。此时, 竖直运动以及水面对所假定平面的偏离就变得重要。题目未给出实验不确定度, 因此表格说明的是数值上的符合程度, 而非统计意义上的验证。

2 — 湖泊测量结果的时间尺度

对于韦特恩湖,

$$L = 1.23 \times 10^5 \text{ m}, \quad h = 50 \text{ m},$$

由此得到

$$\sqrt{gh} \simeq 22.1 \text{ m s}^{-1}.$$

简单模型预测

$$T_0 = \frac{\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{3(9.81)(50)}} \simeq 1.01 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{2.8 \text{ h}}.$$

能量估计给出

$$T_1 = \frac{2\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{10(9.81)(50)}} \simeq 1.10 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{3.1 \text{ h}}.$$

因此, 任一曲线中相邻峰值之间的时间间隔约为三小时。

在所给图中，一次完整振荡约占横轴的 1.5 个刻度间隔。因此，

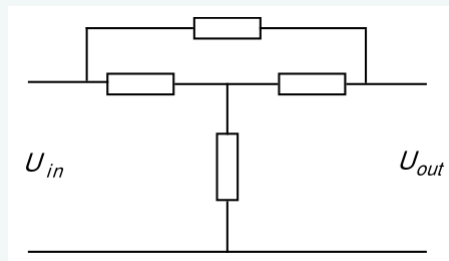
$$\text{每个刻度间隔对应的时间} \approx \frac{3 \text{ h}}{1.5} \approx \boxed{2 \text{ h}}.$$

整段记录中约有十二次振荡，对应约 36 h，即一天半。两条曲线的相位近似相反，这与湖泊两端振荡的预期相符。

解答已与官方解答核对。

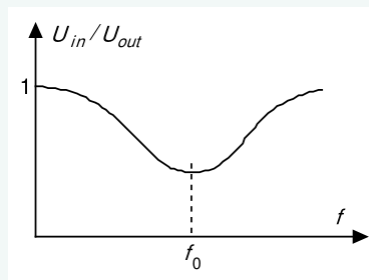
题目 3：电子频率滤波器

一个电子频率滤波器由四个元件按上图所示方式连接而成。信号源的阻抗可以忽略，负载的阻抗可视为无穷大。滤波器应使电压比 U_{out}/U_{in} 随频率的变化关系如下图所示，其中 U_{in} 为输入电压， U_{out} 为输出电压。在频率 f_0 处，两个电压之间的相位滞后为零。



为搭建该滤波器，你可以从以下元件中进行选择：

- 2 个电阻，10 k Ω
- 2 个电容，10 nF
- 2 个螺线管，160 mH（无铁芯，且电阻可忽略）



将其中四个元件组合起来，构成满足上述条件的滤波器。尽可能多地找出可行的元件组合，并确定各组合的频率 f_0 及该频率下的电压比 U_{out}/U_{in} 。

题目译自官方英文原文。

答案

- **题目 3。** 按照文字说明，将图中的凹谷理解为 U_{out}/U_{in} 的模随频率的变化，共有 **12 种有效** 的元件配置。

按顺序定义各位置为

$$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (\text{左侧水平支路}, \text{右侧水平支路}, \text{上方跨接支路}, \text{竖直分流支路}).$$

每个 R 表示一个 $10\text{ k}\Omega$ 的电阻，每个 C 表示一个 10 nF 的电容器，每个 L 表示一个 160 mH 的螺线管。

元件配置 (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	f_0 处的 $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$
(R, R, C, C) 或 (C, C, R, R)	1.59 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, R, L, L) 或 (L, L, R, R)	9.95 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, L, R, C)	5.63 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(R, C, R, L)	2.81 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(C, R, L, R)	5.63 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, R, C, R)	2.81 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, C, R, L) 或 (L, C, C, R)	5.63 kHz	$1/2$
(C, L, R, C) 或 (C, L, L, R)	2.81 kHz	$1/2$

对于每一种配置，输出电压与输入电压都在 f_0 处同相。

解答

本题没有编号的小问。我们先推导给定电路的响应，再找出元件配置并计算其最小值。

采用理想元件，其参数为

$$R = 1.00 \times 10^4 \Omega, \quad C = 1.00 \times 10^{-8} \text{ F}, \quad L = 0.160 \text{ H}.$$

在正弦稳态下，采用时间依赖关系为 $e^{i\omega t}$ 的相量表示，

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad \omega = 2\pi f.$$

信号源阻抗可忽略，因此输入电压固定。负载阻抗为无穷大，意味着没有电流从输出端流向外部负载。

设 V_m 为 Z_1, Z_2, Z_4 连接点相对于下方公共导线的电压。由基尔霍夫电流定律得

$$\begin{aligned} \frac{V_m - V_{\text{in}}}{Z_1} + \frac{V_m - V_{\text{out}}}{Z_2} + \frac{V_m}{Z_4} &= 0, \\ \frac{V_{\text{out}} - V_m}{Z_2} + \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{Z_3} &= 0. \end{aligned}$$

消去 V_m ，得到复电压比

$$H(\omega) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_3}.$$

为方便起见，将其写成

$$H = \frac{K}{K + 1},$$

其中

$$K = \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_4}{Z_1}.$$

元件配置。 定义无量纲常数

$$\kappa = \frac{L}{R^2 C}.$$

对于以下每一种配置，代入 K 可得

$$K = \alpha + i \left(\beta\omega - \frac{\gamma}{\omega} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

表中的元件代号按 $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ 的顺序排列。

配置	α	β	γ
$RRCC, CCRR$	2	RC	$1/(RC)$
$RRLL, LLRR$	2	L/R	R/L
$RLRC$	κ	L/R	$2/(RC)$
$RCRL$	κ	$2L/R$	$1/(RC)$
$CRLR$	$1/\kappa$	RC	$2R/L$
$LRCR$	$1/\kappa$	$2RC$	R/L
$LCRL$	1	L/R	$2/(RC)$
$LCCR$	1	RC	$2R/L$
$CLRC$	1	$2L/R$	$1/(RC)$
$CLLR$	1	$2RC$	R/L

例如，配置 $RLRC$ 表示

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i\omega L, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{i\omega C}.$$

由此得到

$$K = \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega CR} + \frac{L}{CR^2} + \frac{1}{i\omega CR} = \kappa + i \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{2}{\omega CR} \right),$$

与表中所列结果一致。

频率依赖关系与相位。 令

$$u = \beta\omega - \frac{\gamma}{\omega}.$$

则

$$H = \frac{\alpha + iu}{\alpha + 1 + iu}, \quad |H|^2 = \frac{\alpha^2 + u^2}{(\alpha + 1)^2 + u^2}.$$

由于

$$\frac{d|H|^2}{d(u^2)} = \frac{2\alpha + 1}{[(\alpha + 1)^2 + u^2]^2} > 0,$$

故当 $u = 0$ 时，模最小。此外，

$$\frac{du}{d\omega} = \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} > 0,$$

因此在正频率范围内恰有一个最小值，其位置为

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

在此频率下，

$$\boxed{H(\omega_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > 0}.$$

因此，电压比为正实数，即相位差为零，满足题目要求。

在频率的两个极限下，

$$\omega \rightarrow 0: \quad u \rightarrow -\infty, \quad \omega \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow +\infty,$$

从而

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1.$$

因此，所列的每一种配置都具有所要求的曲线：其模从 1 开始，平滑下降，在 f_0 处达到唯一的正最小值，然后上升并趋近于 1。

频率与电压比的数值。 由表可得四个不同的频率：

$$\begin{aligned} f_{RC} &= \frac{1}{2\pi RC} = 1.5915 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{1.59 \text{ kHz}}, \\ f_{RL} &= \frac{R}{2\pi L} = 9.9472 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{9.95 \text{ kHz}}, \\ f_+ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = 5.6270 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{5.63 \text{ kHz}}, \\ f_- &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = 2.8135 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{2.81 \text{ kHz}}. \end{aligned}$$

另外，

$$\kappa = \frac{0.160}{(10^4)^2(10^{-8})} = 0.160 = \frac{4}{25}.$$

因此，可能的最小电压比为

$$\begin{aligned} \alpha = 2: \quad H_0 &= \frac{2}{3}, \\ \alpha = \kappa: \quad H_0 &= \frac{\kappa}{1 + \kappa} = \frac{L}{R^2C + L} = \frac{4}{29}, \\ \alpha = \frac{1}{\kappa}: \quad H_0 &= \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{R^2C}{R^2C + L} = \frac{25}{29}, \\ \alpha = 1: \quad H_0 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

将这些表达式与配置表结合，即可得到上述全部答案。

配置的完备性。 将四个元件按类型分配到四个位置，且每种类型至多使用两个，共有 54 种配置：其中 18 种使用两种类型的元件，每种各两个；36 种使用全部三种类型的元件。

两端的极限均为 1，要求 K 在 $\omega \rightarrow 0$ 和 $\omega \rightarrow \infty$ 时都发散。这提供了一种检查所有配置的简便方法。将每个阻抗写成一个正常数与 s^p 的乘积，其中

$$s = i\omega, \quad p_R = 0, \quad p_L = 1, \quad p_C = -1.$$

K 的四项所对应的幂指数为

$$p_2 - p_3, \quad p_4 - p_3, \quad p_2 + p_4 - p_1 - p_3, \quad p_4 - p_1.$$

当且仅当这些幂指数中既有正值又有负值时，端点条件成立。由此筛选出 22 种配置：已得到的 12 种，以及以下十种。

其余配置	不满足要求的原因
$RLCC, RCLL, LRCC, CRLl$	使 H 为实数的唯一有限正频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$, 此时 $H = 0$ 。此时输出相位无定义, 且最小值为零。
$LLRC, LLCR, CCRL, CCLR$	在使 H 为实数的唯一有限正频率处, $H = -1$: 相位差为 180° 。
$LLCC, CCLL$	它们具有无阻尼谐振极点, 不能产生图示的平滑凹谷。

对于最后两种配置, 令 $x = \omega\sqrt{LC}$, 可显式写出

$$H = \frac{(1 - x^2)^2}{1 - 3x^2 + x^4},$$

其分母在以下位置为零:

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

因此, 所列的 12 种配置已穷尽所有满足上述图像解释和零相位差条件的可能情况。

解答已与官方解答核对。