

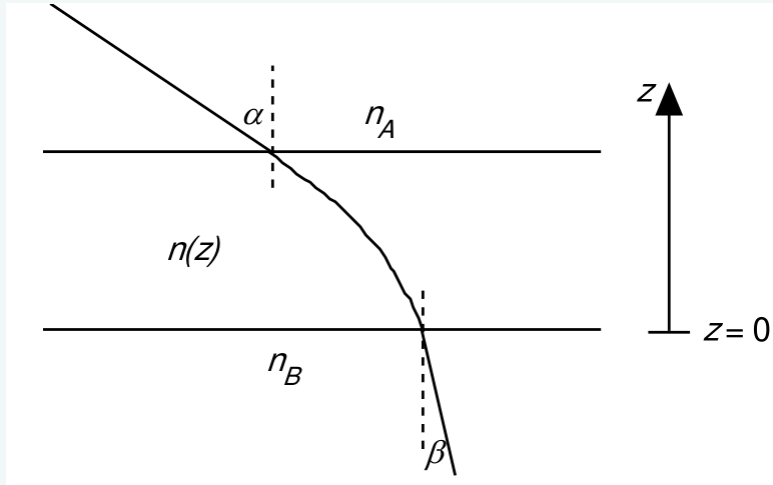
IPhO 1984

Teorik sorular ve çözümler · Sigtuna, İsveç · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1984/

Soru 1: Tabakalı bir ortamda kırılma ve çöl serabı

a) Kırılma indisi n 'nin alt yüzeyden olan z uzaklığına bağlı olarak değiştiği, düzlem ve paralel yüzeyli saydam bir levhayı ele alın (şekle bakınız). $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$ olduğunu gösterin. Gösterim şekildeki gibidir.



- b) Geniş ve düz bir çölde durduğunuz varsayın. Biraz ileride su yüzeyine benzeyen bir şey görüyorsunuz. "Suya" yaklaştığınızda, "su" ile aranızdaki uzaklık hep sabit kalacak şekilde sizden uzaklaşıyor gibi görünüyor. Bu olayı açıklayın.
- c) Gözlerinizin yerden 1.60 m yüksekte ve "suya" olan uzaklığınızın 250 m olduğunu varsayarak b)'de yere yakın havanın sıcaklığını hesaplayın. Havanın 15°C sıcaklıkta ve normal hava basıncında (101.3 kPa) kırılma indisi 1.000276'dır. Yerden 1 m'den daha yüksekteki havanın sıcaklığının sabit ve 30°C olduğu varsayılmaktadır. Atmosfer basıncının normal olduğu varsayılmaktadır. Kırılma indisi n için $n - 1$, havanın yoğunluğuyla orantılıdır. Sonucunuzun doğruluğunu tartışın.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Korunan nicelik $n(z) \sin \theta(z)$ 'dir; burada θ , normalle yapılan açıdır. Dolayısıyla,

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

- b) Bu bir **alt serap** olayıdır: yere yakın sıcak ve daha düşük yoğunluklu hava, gökyüzünden gelen ışığı yukarı doğru bükerek gözlemcinin gözlerine ulaştırır. Yatay sıcaklık dağılımı ve gözlemcinin göz yüksekliği değişmediği için görünen su sabit bir uzaklıkta kalır.

- c) 250 m'yi serabın yakın kenarına olan görünür uzaklık olarak yorumlarsak,

$$T_{\text{ground air}} \simeq 329 \text{ K} \simeq 56^\circ \text{C}.$$

Küçük açı yaklaşımının yol açtığı hata 0.001°C 'den küçüktür; görünür kenarın konumundaki belirsizlik ve atmosferin ideal tabakalanmadan sapmaları daha önemlidir.

Çözüm

a)

Levhayı, her birinin kırılma indisi yaklaşık olarak sabit olan çok sayıda ince yatay tabakaya ayırın. i tabakasının kırılma indisi n_i , ışının bu tabakada normalle yaptığı açı ise θ_i olsun.

Her ara yüzeyde Snell yasası

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}$$

bağıntısını verir. Tüm ara yüzeyler paralel olduğundan normalleri aynı doğrultudadır. Giriş ve çıkış ara yüzeylerini de dahil edersek,

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \theta_1 = \dots = n_N \sin \theta_N = n_B \sin \beta.$$

Tabaka kalınlıklarının sonsuz küçüğe gittiği limit alınarak, sürekli değişen bir kırılma indisi için de sonuç elde edilir:

$$n(z) \sin \theta(z) = p = \text{sabit}, \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

b)

Güneş ışığı çöl yüzeyini ısıtır; yüzey de hemen üzerindeki havayı ısıtır. Yaklaşık olarak sabit basınçta, bu daha sıcak havanın yoğunluğu ve dolayısıyla kırılma indisi daha düşüktür. Bu nedenle sıcak tabaka boyunca yükseklik arttıkça kırılma indisi artar.

Gökyüzünden gelip yerle küçük bir açı yaparak aşağı doğru ilerleyen bir ışını ele alın. a) kısmından,

$$\sin \theta(z) = \frac{p}{n(z)}.$$

Işın, kırılma indisi daha küçük olan havaya girdikçe düşeyle yaptığı θ açısı artar. $n(z) = p$ olan bir yüksekliğe ulaşırsa yatay hâle gelir. Ardından kırılma indisinin daha büyük olduğu bölgelere doğru yukarı yönelir ve gözlemciye ulaşabilir.

Gözlemci, gelen ışığı geriye doğru düz bir çizgi boyunca izler ve bu nedenle gökyüzü ışığını ufku altından geliyormuş gibi görür. Bu, gökyüzünün sudaki yansımasına benzer. Düzgün bir sıcaklık gradyanında yön değiştirme, sürekli kırılma yoluyla gerçekleşir.

Atmosfer yatay doğrultuda türdeşse, yatay hareket optik durumu değiştirmez. Sabit bir göz yüksekliğinde, serabın yakın kenarının açısal konumu ve dolayısıyla görünür uzaklığı sabit kalır.

c)

Göz yüksekliğindeki kırılma indisi n_e , yere bitişik en sıcak havadaki en küçük kırılma indisi ise n_g olsun. Geometrik optiğin geçerli olduğunu, tabakalanmanın yatay olduğunu ve sıcaklığın yere doğru arttığını varsayın.

Önce kırılma indisini sıcaklığın bir fonksiyonu olarak belirleyin. Sabit basınçta ideal gaz olarak ele alınan hava için,

$$\rho \propto \frac{1}{T},$$

burada T mutlak sıcaklıktır. $n - 1 \propto \rho$ olduğundan,

$$n(T) - 1 = \frac{A}{T},$$

burada

$$A = (1.000276 - 1)(273.15 + 15) = 0.0795294 \text{ K}.$$

Gözler 1 m seviyesinin üzerinde olduğundan, çevrelerindeki havanın sıcaklığı

$$T_e = 303.15 \text{ K}$$

olur. Dolayısıyla,

$$n_e = 1 + \frac{0.0795294}{303.15} = 1.000262343.$$

Serabın yakın kenarının yatayın altındaki bakış açısı δ olsun. Verilen uzaklığı, yer düzlemi üzerindeki görünür uzaklık olarak yorumlarsak, bakış doğrultusunun geriye doğru düz bir çizgi boyunca uzatılması

$$\tan \delta = \frac{h}{D} = \frac{1.60}{250} = 0.00640,$$

bağıntısını verir; böylece

$$\delta = 0.0063999 \text{ rad} \simeq 0.367^\circ.$$

Yakın kenarı, kırılma indisinin en küçük olduğu havada yatay hâle gelen sınır ışını belirler. Bu ışının göz yüksekliğinde düşeyle yaptığı açı $90^\circ - \delta$, dönüş noktasında ise 90° 'dir. Dolayısıyla a) kısmından,

$$n_e \sin(90^\circ - \delta) = n_g \sin 90^\circ,$$

ya da

$$n_g = n_e \cos \delta = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}.$$

Yatayın altındaki bakış açısı daha küçük olan ışınlar yere ulaşmadan yukarı döner ve gökyüzü ışığını gözlemciye getirir. Yatayın altındaki bakış açısı daha büyük olan ışınlar yere ulaşır.

Sayısal olarak,

$$n_g = \frac{1.000262343}{\sqrt{1 + (1.60/250)^2}} = 1.000241859.$$

Böylece

$$T_g = \frac{A}{n_g - 1} = \frac{0.0795294}{0.000241859} = 328.826 \text{ K},$$

ve dolayısıyla

$$\boxed{T_g \simeq 56^\circ \text{C}}.$$

Doğruluğu değerlendirmek için ilgili kırılma indisi azalması

$$n_e - n_g \simeq 2.05 \times 10^{-5}$$

olarak bulunur. Açı yeterince küçüktür; bu nedenle

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}$$

yerine $1 - \frac{1}{2}(h/D)^2$ kullanılması, hesaplanan sıcaklığı yalnızca yaklaşık 0.0009 K değiştirir.

Gözleme ve atmosfere ilişkin varsayımlar daha önemlidir. Referans kırılma indisi ve üstteki havanın sıcaklığı sabit tutularak sıcaklık formülünün diferansiyeli alındığında, verilen değerlerde

$$dT_g \simeq 55.7 \text{ K} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dD}{D} \right)$$

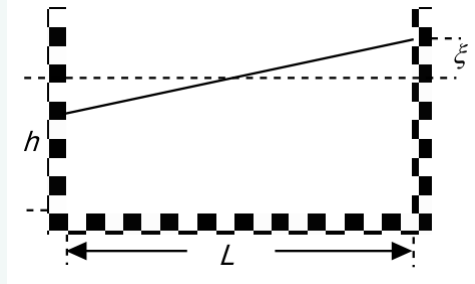
elde edilir. Dolayısıyla h/D 'deki %1'lik bir hata, çıkarılan sıcaklığı yaklaşık 0.56°C değiştirir.

Serabın kenarının bulanık olması, türbülans, düzensiz ısınma ve yatay tabakalanmadan sapmalar daha büyük hatalara yol açabilir. İdeal sınır açısı hesabı için ayrıntılı düşey profil gerekli değildir; ancak en sıcak havayla ilişkili belirgin bir kenar bulunması gerekir. Ölçüm belirsizlikleri verilmediğinden, sayısal bir hata payı belirtmek gerekçelendirilemez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Göl suyunun seş salınımı

Bazı göllerde, suyun salınım yaptığı ve "seş" adı verilen ilginç bir olay görülür. Bu olayın gözlenebildiği göller genellikle derinliklerine göre uzun ve aynı zamanda dardır. Bir gölde dalgalar görmek doğaldır; ancak bekleyen bir misafire götürdüğünüz fincandaki kahve gibi suyun tüm hacminin salındığı seş benzeri bir olay görmek alışıldık değildir.



Seş olayını modellemek için dikdörtgen bir kaptaki suyu ele alıyoruz. Kabin uzunluğu L , suyun derinliği ise h 'dir. Başlangıçta su yüzeyinin yatayla küçük bir açı yaptığını varsayın. Bu durumda seş salınımı başlayacaktır; su yüzeyinin düzlemsel kalmaya devam ettiğini, ancak yatay düzlemde bulunan ve kabin ortasından geçen bir eksen etrafında salındığını varsayıyoruz.

Suyun hareketi için bir model oluşturun ve salınım periyodu T için bir formül türetin. Başlangıç koşulları yukarıdaki şekilde verilmiştir. $\xi \ll h$ olduğunu varsayın. Aşağıdaki tabloda, farklı uzunluklardaki iki kaptaki farklı su derinlikleri için deneysel salınım periyotları verilmiştir. Türettiğiniz formülün deneysel verilerle ne kadar iyi uyuştüğünü uygun bir yöntemle kontrol edin. Modelinizin niteliği hakkındaki görüşünüzü belirtin.

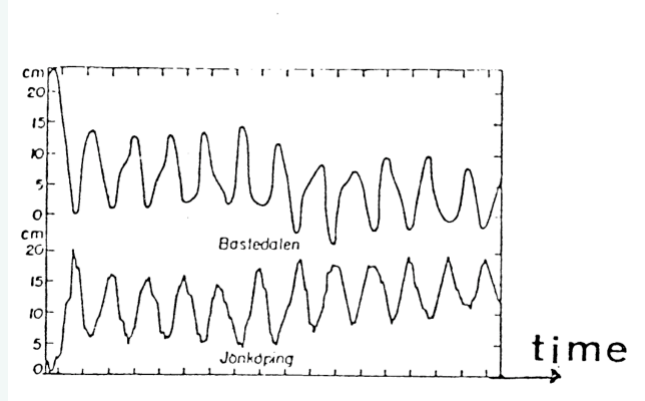
Tablo 1. $L = 479 \text{ mm}$

h/mm	30	50	69	88	107	124	142
T/s	1.78	1.40	1.18	1.08	1.00	0.91	0.82

Tablo 2. $L = 143 \text{ mm}$

h/mm	31	38	58	67	124
T/s	0.52	0.52	0.43	0.35	0.28

Aşağıdaki grafik, İsveç'teki Vättern Gölü'nde yapılan ölçümlerin sonuçlarını göstermektedir. Bu gölün uzunluğu 123 km, ortalama derinliği ise 50 m'dir. Grafikteki zaman ölçeği nedir?



Bastudalen'de (Vättern Gölü'nün kuzey ucu) ve Jönköping'de (güney ucu) su yüzeyinin seviyesi.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

2. soruda numaralandırılmış alt kısımlar veya belirtilmiş puan değerleri yoktur. İstenenler, soruda verildikleri sırayla yanıtlanmıştır.

- **2 — Hareket ve periyot:** Kütle merkezini ve uç duvarların uyguladığı hidrostatik kuvvetleri kullanan basit bir model, periyodu

$$T_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}$$

olan harmonik salınımlar verir. Yatay akış süratinin değişimini hesaba katan bir enerji modeli ise daha gelişmiş bir tahmin verir:

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} \simeq 1.987 \frac{L}{\sqrt{gh}}$$

- **2 — Deneysel karşılaştırma ve modelin niteliği:** T_0 , ölçülen periyotlardan uzun kapta 10.0–15.2%, kısa kapta ise 8.6–20.0% daha küçüktür. Model, yaklaşık $T \propto L/\sqrt{h}$ ölçekleme ilişkisini yansıtır. Enerji tahmini daha iyi uyuşur: en büyük sapmalar sırasıyla 7.1% ve 12.4%'tür. Derinlik uzunlukla karşılaştırılabilir hâle geldiğinde her iki modelin de geçerliliği sınırlıdır.

- **2 — Vättern Gölü:** $T_0 \simeq 2.8$ h, buna karşılık $T_1 \simeq 3.1$ h olur. Dolayısıyla grafikte **her salınım yaklaşık üç saate**, diğer bir deyişle **yatay eksendeki her işaret aralığı iki saate** karşılık gelir; grafiğin tamamı yaklaşık **bir buçuk günü** temsil eder.

Çözüm

2 — Hareket modeli ve salınım periyodu

Kabın genişliği b , suyun yoğunluğu ise ρ olsun. x koordinatını kabın ortasından başlayarak yatay doğrultuda ölçelim. Yüzeyin tabandan yüksekliğini şöyle yazalım:

$$H(x, t) = h + \eta(x, t), \quad \eta(x, t) = \frac{2q(t)x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Böylece sol ve sağ uçlardaki derinlikler sırasıyla $h - q$ ve $h + q$ olur. Başlangıçta $q = \xi$ 'dir.

Viskoziteyi, sönümü ve yüzey gerilimini ihmal ediyoruz. Uzun ve sığ bir kap için ilk yaklaşımda düşey ivmeler ihmal edilebilir ve basınç hidrostatik olarak alınabilir. Küçük genlik, $|q| \ll h$, doğrusal bir salınım modeli kurmaya olanak tanır.

Toplam kütle

$$M = \rho b L h,$$

olur; çünkü ortalama yüzeyin üzerindeki hacim, bu yüzeyin altında eksilen hacme eşittir. Kütle merkezinin yatay koordinatı X şöyledir:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho b}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x H(x, t) dx \\ &= \frac{1}{Lh} \frac{2q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \boxed{\frac{Lq}{6h}}. \end{aligned}$$

Bir uç duvarın derinliği H olan suya uyguladığı hidrostatik kuvvetin büyüklüğü

$$b \int_0^H \rho g (H - z) dz = \frac{1}{2} \rho g b H^2.$$

olur. Dolayısıyla suya etki eden net yatay kuvvet

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho g b [(h - q)^2 - (h + q)^2] \\ &= -2 \rho g b h q. \end{aligned}$$

olur. Bu kuvvet geri çağırıcıdır: su sağ tarafta daha yüksek olduğunda kuvvet sola doğru etki eder. Newton'un ikinci yasası

$$M \ddot{X} = F_x,$$

ya da

$$\rho b L h \frac{L}{6h} \ddot{q} = -2 \rho g b h q.$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla,

$$\ddot{q} + \frac{12gh}{L^2}q = 0.$$

Bu, açısal frekansı ve periyodu

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{12gh}}{L}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

olan basit harmonik harekettir.

Şekilde gösterilen durumdan ilk hızsız olarak serbest bırakılırsa,

$$q(t) = \xi \cos(\omega_0 t), \quad \eta(x, t) = \frac{2\xi x}{L} \cos(\omega_0 t).$$

Dolayısıyla iki uç zıt fazda salınır. Periyot, küçük genliğin değerinden, genişlikten ve yoğunluktan bağımsızdır.

Akış süratini hesaba katan bir enerji tahmini

Düzlemsel yüzey, gerçek harekete ilişkin bir yaklaşımdır. Bir enerji modeli kurarak iç akışın ayrıntılarını hesaba katmanın etkisini değerlendirebiliriz.

Yatay hız $u(x, t)$ 'nin derinlik boyunca yaklaşık olarak sabit olduğunu varsayalım. h derinliği etrafında doğrusallaştırılan hacim korunumu,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

koşulunu gerektirir.

$\eta = 2qx/L$ bağıntısı kullanılıp her iki uç duvardan geçen yatay akışın sıfır olması koşulu uygulandığında

$$u(x, t) = \frac{\dot{q}}{Lh} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

elde edilir.

Yatay sürat ortada en büyüktür ve duvarlarda sıfır olur. Sığ su yaklaşımında düşey hareketin kinetik enerjisi, yatay hareketinkine göre küçüktür. Dolayısıyla

$$K = \frac{1}{2} \rho b h \int_{-L/2}^{L/2} u^2 dx \\ = \frac{\rho b L^3}{60h} \dot{q}^2.$$

Yerçekimi potansiyel enerjisinin, yüzeyin yatay olduğu durumdakine göre artışı

$$U = \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [(h + \eta)^2 - h^2] dx \\ = \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx \\ = \frac{\rho g b L}{6} q^2,$$

olur; burada $\int \eta dx$ ile orantılı terim, hacim korunumundan dolayı sıfırdır.

Şimdi $K + U$ 'nin korunumu

$$\ddot{q} + \frac{10gh}{L^2}q = 0,$$

ve dolayısıyla

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} = \sqrt{\frac{6}{5}} T_0.$$

sonucunu verir.

Bu tahmin, basit kütle merkezi sonucundan yaklaşık 9.5% daha uzundur.

Katsayıların farklı olması, hareketin yaklaşık betimlemelerini yansıtır: ilk model uçlardaki hidrostatik kuvvetleri kullanırken, ikincisi hacmi koruyan bir deneme akışının enerjisini kullanır. Gerçek serbest yüzey genellikle düzlemsellikten sapar; bu nedenle katsayıların hiçbirisi kesin bir hidrodinamik sonuç olarak görülmemelidir.

2 — Ölçümlerle karşılaştırma ve modelin niteliği

$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ kullanıldığında, öngörülen periyotlar şöyledir:

$L = 479 \text{ mm}$ için:

$h \text{ (mm)}$	Ölçülen $T \text{ (s)}$	$T_0 \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$
30	1.78	1.60	1.75
50	1.40	1.24	1.36
69	1.18	1.06	1.16
88	1.08	0.935	1.02
107	1.00	0.848	0.929
124	0.91	0.788	0.863
142	0.82	0.736	0.806

$L = 143 \text{ mm}$ için:

$h \text{ (mm)}$	Ölçülen $T \text{ (s)}$	$T_0 \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$
31	0.52	0.470	0.515
38	0.52	0.425	0.465
58	0.43	0.344	0.377
67	0.35	0.320	0.350
124	0.28	0.235	0.258

Nicel bir karşılaştırma için bağıl sapmayı şöyle tanımlayalım:

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{model}} - T_{\text{measured}}}{T_{\text{measured}}}.$$

Basit model, gözlemlerden sistematik olarak daha düşük periyotlar verir: uzun kapta 10.0–15.2%, kısa kapta ise 8.6–20.0% oranında. Enerji tahmini, en büyük mutlak sapmaları 7.1% ve 12.4%'e indirir.

Yaklaşık ölçekleme ilişkisi, boyutsuz

$$C = \frac{T\sqrt{gh}}{L}.$$

niceliği aracılığıyla da kontrol edilebilir.

Deneyssel değerler uzun kapta yaklaşık 2.02 ile 2.14, kısa kapta ise 1.98 ile 2.27 arasında değişir. Bunlar ortak bir sabite makul ölçüde yakındır. İki modelin öngörülleri şöyledir:

$$C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1.814, \quad C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1.987.$$

Dolayısıyla modeller, büyüklük ölçeğini ve parametrelere bağımlılığı yararlı biçimde betimler; akış süratinin ayrıntılarını hesaba katmak da bu verilerle uyumu iyileştirir.

Bununla birlikte geçerliliklerinin sınırları vardır. h/L oranları uzun kapta 0.063 ile 0.30, kısa kapta ise 0.22 ile 0.87 arasında değişir. Özellikle kısa kaptaki en derin suyla yapılan ölçümler, sıg su yaklaşımının güvenilir olduğu aralığın dışında kalır. Bu durumda düşey hareket ve varsayılan düzlemsel yüzeyden sapmalar önem kazanır. Deneyssel belirsizlikler verilmediğinden tablo, istatistiksel bir doğrulama değıl, sayısal uyum ortaya koyar.

2 — Göl ölçümlerinin zaman ölçeğı

Vättern Gölü için,

$$L = 1.23 \times 10^5 \text{ m}, \quad h = 50 \text{ m},$$

olduğundan

$$\sqrt{gh} \simeq 22.1 \text{ m s}^{-1}.$$

elde edilir.

Basit modelin öngörüsü şöyledir:

$$T_0 = \frac{\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{3(9.81)(50)}} \simeq 1.01 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{2.8 \text{ h}}.$$

Enerji tahmini ise şu sonucu verir:

$$T_1 = \frac{2\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{10(9.81)(50)}} \simeq 1.10 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{3.1 \text{ h}}.$$

Buna göre, her iki eğriden herhangi birindeki ardışık tepeler arasında yaklaşık **üç saat** vardır.

Verilen grafikte tam bir salınım, yatay eksenindeki yaklaşık 1.5 işaret aralığını kaplar. Dolayısıyla,

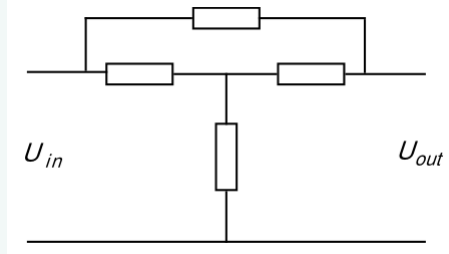
$$\text{işaret aralığı başına süre} \approx \frac{3 \text{ h}}{1.5} \approx \boxed{2 \text{ h}}.$$

Kayıt boyunca yaklaşık on iki salınım vardır; bu da yaklaşık 36 h, yani bir buçuk güne karşılık gelir. Gölün karşı uçlarındaki salınımlar için beklendiğı gibi, iki eğri yaklaşık olarak zıt fazdadır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Elektronik frekans filtresi

Bir elektronik frekans filtresi, üstteki şekildeki gibi bağlanmış dört devre elemanından oluşmaktadır. Kaynağın empedansı ihmal edilebilir ve yükün empedansı sonsuz kabul edilebilir. Filtre, U_{out}/U_{in} gerilim oranının frekansa bağımlılığı alttaki şekilde gösterildiği gibi olacak biçimde tasarlanmalıdır; burada U_{in} giriş gerilimi, U_{out} ise çıkış gerilimidir. f_0 frekansında iki gerilim arasındaki faz gecikmesi sıfırdır.

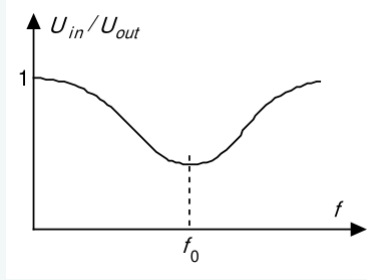


Filtreyi oluşturmak için aşağıdaki devre elemanları arasından seçim yapabilirsiniz:

2 direnç, 10 k Ω

2 kondansatör, 10 nF

2 solenoid, 160 mH (demir çekirdeksiz ve dirençleri ihmal edilebilir)



Bu elemanların dördünü birleştirerek belirtilen koşulları sağlayan bir filtre oluşturunuz. Mümkün olduğunca çok eleman kombinasyonu için f_0 frekansını ve bu frekanstaki U_{out}/U_{in} oranını belirleyiniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- Soru 3.** Metinde belirtildiği üzere, grafikteki çukuru U_{out}/U_{in} oranının büyüklüğü olarak yorumladığımızda **12 geçerli eleman yerleşimi** vardır.

Konumları sırasıyla şöyle tanımlayalım:

$$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (\text{sol yatay, sağ yatay, üst köprü, düşey şönt}).$$

Her R , 10 k Ω değerinde bir direnci; her C , 10 nF değerinde bir kondansatörü; her L ise 160 mH değerinde bir solenoidi göstermektedir.

Eleman yerleşimi (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	f_0 frekansında U_{out}/U_{in}
(R, R, C, C) veya (C, C, R, R)	1.59 kHz	$2/3 \approx 0.667$

Eleman yerleşimi (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	f_0 frekansında $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$
(R, R, L, L) veya (L, L, R, R)	9.95 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, L, R, C)	5.63 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(R, C, R, L)	2.81 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(C, R, L, R)	5.63 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, R, C, R)	2.81 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, C, R, L) veya (L, C, C, R)	5.63 kHz	$1/2$
(C, L, R, C) veya (C, L, L, R)	2.81 kHz	$1/2$

Her yerleşimde çıkış ve giriş f_0 frekansında aynı fazdadır.

Çözüm

Sorunun numaralandırılmış alt bölümleri yoktur. Önce verilen devrenin tepkisini türetecek, ardından eleman yerleşimlerini belirleyip bunların minimumlarını hesaplayacağız.

Değerleri

$$R = 1.00 \times 10^4 \Omega, \quad C = 1.00 \times 10^{-8} \text{ F}, \quad L = 0.160 \text{ H}$$

olan ideal elemanlar kullanalım. Sinüzoidal kararlı durumda, zaman bağımlılığı $e^{i\omega t}$ olan fazörleri kullanırsak,

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad \omega = 2\pi f.$$

Kaynak empedansının ihmal edilebilir olması giriş gerilimini sabit tutar. Yük empedansının sonsuz olması, çıkış ucundan dışarıya akım akmadığı anlamına gelir.

V_m, Z_1, Z_2, Z_4 elemanlarının birleştiği düğümün ortak alt iletkene göre ölçülen gerilimi olsun.

Kirchhoff'un akım yasası şu denklemleri verir:

$$\begin{aligned} \frac{V_m - V_{\text{in}}}{Z_1} + \frac{V_m - V_{\text{out}}}{Z_2} + \frac{V_m}{Z_4} &= 0, \\ \frac{V_{\text{out}} - V_m}{Z_2} + \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{Z_3} &= 0. \end{aligned}$$

V_m elendiğinde karmaşık gerilim oranı şöyle bulunur:

$$H(\omega) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_3}.$$

Bu ifadeyi şu biçimde yazmak uygundur:

$$H = \frac{K}{K + 1},$$

burada

$$K = \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_4}{Z_1}.$$

Eleman yerleşimleri. Boyutsuz sabiti şöyle tanımlayalım:

$$\kappa = \frac{L}{R^2 C}.$$

Aşağıdaki yerleşimlerin her biri için empedanslar K ifadesinde yerine konulduğunda

$$K = \alpha + i \left(\beta \omega - \frac{\gamma}{\omega} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

elde edilir. Tablodaki eleman kodları $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ sırasıyla yazılmıştır.

Yerleşim	α	β	γ
$RRCC, CCRR$	2	RC	$1/(RC)$
$RRLL, LLRR$	2	L/R	R/L
$RLRC$	κ	L/R	$2/(RC)$
$RCRL$	κ	$2L/R$	$1/(RC)$
$CRLR$	$1/\kappa$	RC	$2R/L$
$LRCL$	$1/\kappa$	$2RC$	R/L
$LCRL$	1	L/R	$2/(RC)$
$LCCR$	1	RC	$2R/L$
$CLRC$	1	$2L/R$	$1/(RC)$
$CLLR$	1	$2RC$	R/L

Örneğin $RLRC$ yerleşimi şu anlama gelir:

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i\omega L, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{i\omega C}.$$

Bu yerleşim için

$$K = \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega CR} + \frac{L}{CR^2} + \frac{1}{i\omega CR} = \kappa + i \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{2}{\omega CR} \right),$$

elde edilir; bu da tabloda verilen ifadedir.

Frekans bağımlılığı ve faz. Şöyle tanımlayalım:

$$u = \beta \omega - \frac{\gamma}{\omega}.$$

O hâlde

$$H = \frac{\alpha + iu}{\alpha + 1 + iu}, \quad |H|^2 = \frac{\alpha^2 + u^2}{(\alpha + 1)^2 + u^2}.$$

$$\frac{d|H|^2}{d(u^2)} = \frac{2\alpha + 1}{[(\alpha + 1)^2 + u^2]^2} > 0,$$

olduğundan büyüklük, $u = 0$ olduğunda en küçüktür. Ayrıca,

$$\frac{du}{d\omega} = \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} > 0,$$

olduğundan pozitif frekanslarda tam olarak bir minimum vardır:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

Bu frekansta,

$$H(\omega_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > 0.$$

Dolayısıyla gerilim oranı reel ve pozitifdir: istendiği gibi faz farkı sıfırdır.

Her iki frekans limitinde,

$$\omega \rightarrow 0 : \quad u \rightarrow -\infty, \quad \omega \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow +\infty,$$

ve bunun sonucunda

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1.$$

Bu nedenle listelenen her yerleşim istenen eğriyi verir: büyüklük birden başlar, düzgün biçimde azalarak f_0 frekansında tek bir pozitif minimuma ulaşır ve ardından bire doğru yükselir.

Sayısal frekanslar ve gerilim oranları. Tablodan dört farklı frekans elde edilir:

$$\begin{aligned} f_{RC} &= \frac{1}{2\pi RC} = 1.5915 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{1.59 \text{ kHz}}, \\ f_{RL} &= \frac{R}{2\pi L} = 9.9472 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{9.95 \text{ kHz}}, \\ f_+ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = 5.6270 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{5.63 \text{ kHz}}, \\ f_- &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = 2.8135 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{2.81 \text{ kHz}}. \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\kappa = \frac{0.160}{(10^4)^2(10^{-8})} = 0.160 = \frac{4}{25}.$$

Dolayısıyla olası minimum oranlar şunlardır:

$$\begin{aligned} \alpha = 2 : \quad H_0 &= \frac{2}{3}, \\ \alpha = \kappa : \quad H_0 &= \frac{\kappa}{1 + \kappa} = \frac{L}{R^2C + L} = \frac{4}{29}, \\ \alpha = \frac{1}{\kappa} : \quad H_0 &= \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{R^2C}{R^2C + L} = \frac{25}{29}, \\ \alpha = 1 : \quad H_0 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bu ifadeler yerleşim tablosuyla birleştirildiğinde yukarıdaki cevapların tümü elde edilir.

Yerleşimlerin eksiksizliği. Her türden en fazla iki eleman kullanılmasına izin verildiğinde, dört konuma eleman türlerini atamanın 54 yolu vardır: bunların 18'inde iki türün her birinden ikişer eleman, 36'sında ise üç türün tümü kullanılır.

Her iki uçtaki limitin bir olması, K 'nın hem $\omega \rightarrow 0$ hem de $\omega \rightarrow \infty$ iken ıraksamasını gerektirir. Bu, tüm atamaları kontrol etmek için basit bir yol sunar. Her empedansı pozitif bir sabit ile s^p 'nin çarpımı olarak yazalım; burada

$$s = i\omega, \quad p_R = 0, \quad p_L = 1, \quad p_C = -1.$$

K 'nın dört teriminin üsleri şunlardır:

$$p_2 - p_3, \quad p_4 - p_3, \quad p_2 + p_4 - p_1 - p_3, \quad p_4 - p_1.$$

Uç nokta koşulu, ancak ve ancak bu üsler arasında hem pozitif hem de negatif bir değer bulunduğunda sağlanır. Bu koşulu sağlayan 22 yerleşim kalır: daha önce elde edilen 12 yerleşim ve aşağıdaki on yerleşim.

Kalan yerleşimler	Koşulları sağlamama nedenleri
$RLCC, RCLL, LRCC, CRLL$	H 'nin reel olduğu tek sonlu pozitif frekans $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 'dir ve burada $H = 0$ olur. Bu durumda çıkışın fazı tanımsızdır ve minimum sıfırdır.
$LLRC, LLCR, CCRL, CCLR$	H 'nin reel olduğu tek sonlu pozitif frekansta $H = -1$ olur: faz farkı 180° 'dir.
$LLCC, CCLL$	Sönümsüz rezonans kutuplarına sahiptirler ve şekilde gösterilen düzgün çukuru vermezler.

Son iki yerleşim için $x = \omega\sqrt{LC}$ yazıldığında açıkça

$$H = \frac{(1 - x^2)^2}{1 - 3x^2 + x^4},$$

elde edilir; bu ifadenin paydası

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

değerlerinde sıfır olur. Dolayısıyla listelenen 12 yerleşim, grafiğin belirtilen yorumunu ve sıfır faz farkı koşulunu sağlayan tüm olasılıkları kapsar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.