

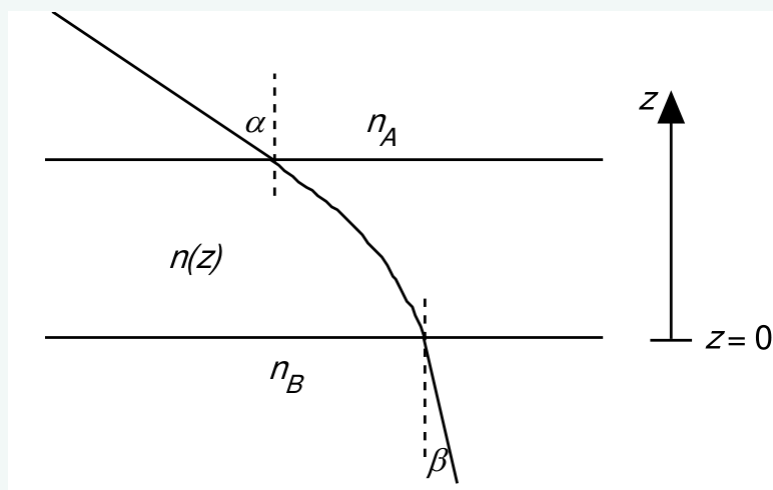
# IPhO 1984

Теоретические задачи и решения · Сигтуна, Швеция · 3 теоретические задачи с полными решениями

[eulersolve.org/ipho/1984/](http://eulersolve.org/ipho/1984/)

## Задача 1: Преломление в слоистой среде и мираж в пустыне

а) Рассмотрим плоскопараллельную прозрачную пластину, показатель преломления которой,  $n$ , изменяется с расстоянием  $z$  от нижней поверхности (см. рисунок). Покажите, что  $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$ . Обозначения приведены на рисунке.



б) Предположим, что вы стоите в большой плоской пустыне. На некотором расстоянии вы видите нечто похожее на водную поверхность. Когда вы приближаетесь к «воде», она словно отступает, так что расстояние до «воды» всегда остаётся постоянным. Объясните это явление.

в) Вычислите температуру воздуха вблизи земли в пункте б), предполагая, что ваши глаза находятся на высоте 1.60 м над землёй, а расстояние до «воды» равно 250 м. Показатель преломления воздуха при  $15^\circ\text{C}$  и нормальном атмосферном давлении (101.3 кПа) равен 1.000276. Температура воздуха на высоте более 1 м над землёй считается постоянной и равной  $30^\circ\text{C}$ . Атмосферное давление считается нормальным. Показатель преломления  $n$  таков, что  $n - 1$  пропорционально плотности воздуха. Обсудите точность полученного результата.

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- **а)** Сохраняющейся величиной является  $n(z) \sin \theta(z)$ , где  $\theta$  — угол с нормалью. Следовательно,

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

- **б)** Это **нижний мираж**: горячий, менее плотный воздух вблизи земли искривляет лучи света от неба вверх, направляя их в глаза наблюдателя. Кажущаяся водная поверхность остаётся на постоянном расстоянии, поскольку горизонтальное распределение температуры и высота глаз наблюдателя не изменяются.
- **с)** Если понимать 250 м как кажущееся расстояние до ближнего края миража, то

$$T_{\text{ground air}} \simeq 329 \text{ K} \simeq 56^\circ \text{C}.$$

Погрешность, вносимая приближением малых углов, составляет менее  $0.001^\circ \text{C}$ ; неопределённость положения видимого края и отклонения от идеальной слоистой структуры атмосферы более существенны.

## Решение

**а)**

Разобьём пластину на множество тонких горизонтальных слоёв, в каждом из которых показатель преломления приблизительно постоянен. Обозначим через  $n_i$  показатель преломления слоя  $i$ , а через  $\theta_i$  — угол луча с нормалью в этом слое.

Закон Снеллиуса на каждой границе раздела даёт

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}.$$

Поскольку все границы раздела параллельны, их нормали имеют одинаковое направление.

Учитывая также границы входа и выхода луча, получаем

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \theta_1 = \dots = n_N \sin \theta_N = n_B \sin \beta.$$

Переходя к пределу бесконечно тонких слоёв, получаем результат для непрерывно изменяющегося показателя преломления:

$$n(z) \sin \theta(z) = p = \text{постоянная}, \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

**б)**

Солнечный свет нагревает поверхность пустыни, которая нагревает воздух непосредственно над ней. При приблизительно постоянном давлении этот более тёплый воздух имеет меньшую плотность и, следовательно, меньший показатель преломления. Таким образом, в горячем слое показатель преломления увеличивается с высотой.

Рассмотрим луч света от неба, распространяющийся вниз под малым углом к поверхности земли. Из пункта а) следует

$$\sin \theta(z) = \frac{p}{n(z)}.$$

По мере того как луч входит в воздух с меньшим показателем преломления, его угол  $\theta$  с вертикалью увеличивается. Если он достигает высоты, на которой  $n(z) = p$ , то становится горизонтальным. Затем он поворачивает вверх, в сторону областей с большим показателем преломления, и может попасть к наблюдателю.

Наблюдатель мысленно продолжает приходящий свет назад по прямой и поэтому видит свет от неба так, словно он приходит из-под горизонта. Это напоминает отражение неба в воде. При плавном изменении температуры поворот луча происходит за счёт непрерывного преломления.

Если атмосфера однородна по горизонтали, горизонтальное перемещение не меняет оптическую картину. При неизменной высоте глаз угловое положение ближнего края миража — а значит, и кажущееся расстояние до него — остаётся постоянным.

с)

Обозначим через  $n_e$  показатель преломления на высоте глаз, а через  $n_g$  — минимальный показатель преломления в наиболее горячем воздухе у самой земли. Предположим, что применима геометрическая оптика, слои атмосферы горизонтальны, а температура увеличивается по мере приближения к земле.

Сначала определим показатель преломления как функцию температуры. Для воздуха, рассматриваемого как идеальный газ при постоянном давлении,

$$\rho \propto \frac{1}{T},$$

где  $T$  — абсолютная температура. Поскольку  $n - 1 \propto \rho$ ,

$$n(T) - 1 = \frac{A}{T},$$

где

$$A = (1.000276 - 1)(273.15 + 15) = 0.0795294 \text{ К}.$$

Глаза находятся выше уровня 1 м, поэтому окружающий их воздух имеет температуру

$$T_e = 303.15 \text{ К}.$$

Следовательно,

$$n_e = 1 + \frac{0.0795294}{303.15} = 1.000262343.$$

Пусть  $\delta$  — угол понижения ближнего края миража относительно горизонта. Если понимать указанное расстояние как кажущееся расстояние в плоскости земли, то прямолинейное продолжение направления наблюдения назад даёт

$$\tan \delta = \frac{h}{D} = \frac{1.60}{250} = 0.00640,$$

так что

$$\delta = 0.0063999 \text{ rad} \simeq 0.367^\circ.$$

Ближний край определяется предельным лучом, который становится горизонтальным в воздухе с минимальным показателем преломления. На высоте глаз его угол с вертикалью равен  $90^\circ - \delta$ ; в точке поворота этот угол равен  $90^\circ$ . Поэтому из пункта а) следует

$$n_e \sin(90^\circ - \delta) = n_g \sin 90^\circ,$$

или

$$n_g = n_e \cos \delta = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}.$$

Лучи с меньшим углом понижения поворачивают над землёй и приносят наблюдателю свет от неба. Лучи с большим углом понижения достигают земли.

Численно получаем

$$n_g = \frac{1.000262343}{\sqrt{1 + (1.60/250)^2}} = 1.000241859.$$

Таким образом,

$$T_g = \frac{A}{n_g - 1} = \frac{0.0795294}{0.000241859} = 328.826 \text{ K},$$

и, следовательно,

$$T_g \simeq 56^\circ \text{C}.$$

Для оценки точности существенно уменьшение показателя преломления

$$n_e - n_g \simeq 2.05 \times 10^{-5}.$$

Угол достаточно мал, так что замена

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}$$

на  $1 - \frac{1}{2}(h/D)^2$  изменяет вычисленную температуру всего примерно на 0.0009 K.

Предположения, касающиеся наблюдения и состояния атмосферы, более существенны.

Дифференцируя формулу температуры при неизменных опорном показателе преломления и температуре воздуха над горячим слоем, для указанных значений получаем

$$dT_g \simeq 55.7 \text{ K} \left( \frac{dh}{h} - \frac{dD}{D} \right).$$

Таким образом, ошибка в 1% в величине  $h/D$  изменяет определённую по ней температуру приблизительно на  $0.56^\circ \text{C}$ .

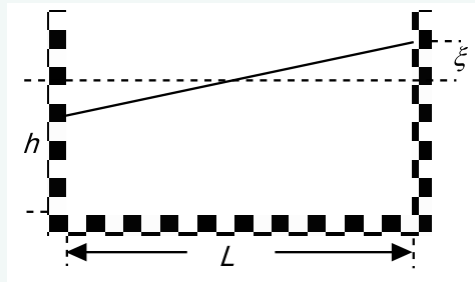
Размытый край миража, турбулентность, неравномерный нагрев и отклонения от горизонтального расположения слоёв могут вносить большие погрешности. Для идеализированного расчёта предельного угла подробный вертикальный профиль температуры не нужен, но необходим чёткий край, соответствующий наиболее горячему воздуху. Поскольку погрешности измерений не заданы, численная оценка погрешности результата не обоснована.

---

Решение проверено по официальному решению.

## Задача 2: Сейши в озере

В некоторых озёрах наблюдается необычное явление, называемое «сейшами», — колебания воды. Озёра, в которых можно наблюдать это явление, обычно имеют большую длину по сравнению с глубиной и при этом узки. Волны на озере — привычное явление, но сейши выглядят необычно: при них колеблется весь объём воды, подобно кофе в чашке, которую вы несёте ожидающему гостю.



Чтобы построить модель сейш, рассмотрим воду в прямоугольном сосуде. Длина сосуда равна  $L$ , а глубина воды —  $h$ . Предположим, что в начальный момент поверхность воды составляет небольшой угол с горизонтом. Затем начнутся сейши; будем считать, что поверхность воды остаётся плоской, но колеблется вокруг оси, лежащей в горизонтальной плоскости и проходящей через середину сосуда.

Постройте модель движения воды и выведите формулу для периода колебаний  $T$ .

Начальные условия показаны на рисунке выше. Считайте, что  $\xi \ll h$ . В приведённых ниже таблицах указаны экспериментальные периоды колебаний при различных глубинах воды в двух сосудах разной длины. Проверьте каким-либо разумным способом, насколько хорошо выведенная вами формула согласуется с экспериментальными данными. Оцените качество своей модели.

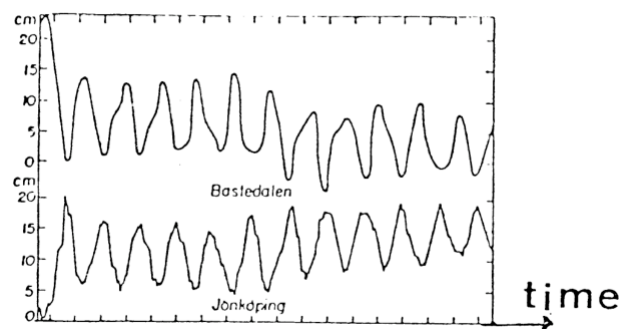
Таблица 1.  $L = 479 \text{ mm}$

| $h/\text{mm}$ | 30   | 50   | 69   | 88   | 107  | 124  | 142  |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $T/\text{s}$  | 1.78 | 1.40 | 1.18 | 1.08 | 1.00 | 0.91 | 0.82 |

Таблица 2.  $L = 143 \text{ mm}$

| $h/\text{mm}$ | 31   | 38   | 58   | 67   | 124  |
|---------------|------|------|------|------|------|
| $T/\text{s}$  | 0.52 | 0.52 | 0.43 | 0.35 | 0.28 |

На графике ниже представлены результаты измерений на озере Веттерн в Швеции. Длина этого озера составляет 123 км, а средняя глубина — 50 м. Каков масштаб времени на графике?



Уровень поверхности воды в Бастудалене (северная оконечность озера Веттерн) и Йёнчёпинге (южная оконечность).

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

В задаче **2** нет пронумерованных подпунктов или указаний на количество баллов. Ответы на её вопросы приведены в порядке их появления в условии.

- **2 — Движение и период:** Простая модель, использующая положение центра масс и гидростатические силы со стороны торцевых стенок, даёт гармонические колебания с периодом

$$T_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

Энергетическая модель, учитывающая изменение горизонтальной скорости течения вдоль сосуда, даёт уточнённую оценку

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} \simeq 1.987 \frac{L}{\sqrt{gh}}.$$

- **2 — Сравнение с экспериментом и качество модели:**  $T_0$  меньше измеренных периодов на 10.0–15.2% в более длинном сосуде и на 8.6–20.0% в более коротком. Модель воспроизводит приближённую зависимость  $T \propto L/\sqrt{h}$ . Энергетическая оценка лучше согласуется с данными: наибольшие расхождения составляют соответственно 7.1% и 12.4%. Обе модели имеют ограниченную применимость, когда глубина становится сравнимой с длиной.
- **2 — Озеро Веттерн:**  $T_0 \simeq 2.8$  h, тогда как  $T_1 \simeq 3.1$  h. Таким образом, на графике одному колебанию соответствуют приблизительно **три часа**, а **одному интервалу между делениями горизонтальной оси — два часа**; всего на нём представлено около **полутора суток**.

## Решение

### 2 — Модель движения и период колебаний

Пусть ширина сосуда равна  $b$ , а плотность воды —  $\rho$ . Будем отсчитывать горизонтальную координату  $x$  от середины сосуда. Запишем высоту поверхности над дном в виде

$$H(x, t) = h + \eta(x, t), \quad \eta(x, t) = \frac{2q(t)x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Таким образом, глубины у левого и правого торцов равны соответственно  $h - q$  и  $h + q$ . В начальный момент  $q = \xi$ .

Пренебрежём вязкостью, затуханием и поверхностным натяжением. Для длинного неглубокого сосуда в первом приближении можно пренебречь вертикальными ускорениями и считать давление гидростатическим. Малая амплитуда,  $|q| \ll h$ , позволяет использовать линейную модель колебаний.

Полная масса равна

$$M = \rho b L h,$$

поскольку объём воды над средним уровнем поверхности равен недостающему объёму под ним. Горизонтальная координата  $X$  центра масс равна

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho b}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x H(x, t) dx \\ &= \frac{1}{Lh} \frac{2q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \boxed{\frac{Lq}{6h}}. \end{aligned}$$

Гидростатическая сила, с которой торцевая стенка действует на воду при глубине  $H$ , имеет модуль

$$b \int_0^H \rho g (H - z) dz = \frac{1}{2} \rho g b H^2.$$

Следовательно, результирующая горизонтальная сила, действующая на воду, равна

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho g b [(h - q)^2 - (h + q)^2] \\ &= -2 \rho g b h q. \end{aligned}$$

Эта сила является возвращающей: когда уровень воды справа выше, она направлена влево. По второму закону Ньютона

$$M \ddot{X} = F_x,$$

или

$$\rho b L h \frac{L}{6h} \ddot{q} = -2 \rho g b h q.$$

Поэтому

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{12gh}{L^2} q = 0}.$$

Это уравнение гармонических колебаний, для которых

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{12gh}}{L}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

Если воду отпустить из состояния покоя в показанной на рисунке конфигурации, то

$$q(t) = \xi \cos(\omega_0 t), \quad \eta(x, t) = \frac{2\xi x}{L} \cos(\omega_0 t).$$

Таким образом, уровни воды у двух торцов колеблются в противофазе. Период не зависит от малой амплитуды, ширины сосуда и плотности воды.

### Энергетическая оценка с учётом скорости течения

Предположение о плоской поверхности является приближённым описанием реального движения. Построив энергетическую модель, можно оценить, как влияет учёт распределения скоростей внутри жидкости.

Предположим, что горизонтальная скорость  $u(x, t)$  приблизительно одинакова по всей глубине. Закон сохранения объёма, линеаризованный относительно глубины  $h$ , требует выполнения условия

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Используя  $\eta = 2qx/L$  и налагая условие отсутствия горизонтального потока через обе торцевые стенки, получаем

$$u(x, t) = \frac{\dot{q}}{Lh} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

Горизонтальная скорость максимальна в середине сосуда и обращается в нуль у стенок. В приближении мелкой воды кинетическая энергия вертикального движения мала по сравнению с кинетической энергией горизонтального движения. Поэтому

$$K = \frac{1}{2} \rho b h \int_{-L/2}^{L/2} u^2 dx = \frac{\rho b L^3}{60h} \dot{q}^2.$$

Приращение потенциальной энергии в поле тяжести относительно состояния с горизонтальной поверхностью равно

$$U = \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [(h + \eta)^2 - h^2] dx = \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx = \frac{\rho g b L}{6} q^2,$$

где член, пропорциональный  $\int \eta dx$ , обращается в нуль вследствие сохранения объёма.

Теперь из сохранения  $K + U$  получаем

$$\ddot{q} + \frac{10gh}{L^2}q = 0,$$

и, следовательно,

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} = \sqrt{\frac{6}{5}} T_0.$$

Эта оценка периода примерно на 9.5% больше результата простой модели, основанной на движении центра масс.

Различие коэффициентов отражает приближённый характер описания движения: первая модель использует гидростатические силы со стороны торцевых стенок, а вторая — энергию пробного поля скоростей течения, удовлетворяющего закону сохранения объёма. В действительности свободная поверхность, вообще говоря, отклоняется от плоскости, поэтому ни один из коэффициентов не следует считать точным результатом гидродинамики.

## 2 — Сравнение с измерениями и качество модели

При  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  предсказанные периоды равны:

Для  $L = 479 \text{ mm}$ :

| $h$ (мм) | Измеренный $T$ (с) | $T_0$ (с) | $T_1$ (с) |
|----------|--------------------|-----------|-----------|
| 30       | 1.78               | 1.60      | 1.75      |
| 50       | 1.40               | 1.24      | 1.36      |
| 69       | 1.18               | 1.06      | 1.16      |
| 88       | 1.08               | 0.935     | 1.02      |
| 107      | 1.00               | 0.848     | 0.929     |
| 124      | 0.91               | 0.788     | 0.863     |
| 142      | 0.82               | 0.736     | 0.806     |

Для  $L = 143 \text{ mm}$ :

| $h$ (мм) | Измеренный $T$ (с) | $T_0$ (с) | $T_1$ (с) |
|----------|--------------------|-----------|-----------|
| 31       | 0.52               | 0.470     | 0.515     |
| 38       | 0.52               | 0.425     | 0.465     |
| 58       | 0.43               | 0.344     | 0.377     |
| 67       | 0.35               | 0.320     | 0.350     |
| 124      | 0.28               | 0.235     | 0.258     |

Для количественного сравнения определим относительное расхождение как

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{model}} - T_{\text{measured}}}{T_{\text{measured}}}.$$

Простая модель даёт периоды, систематически меньшие наблюдаемых: на 10.0–15.2% в более длинном сосуде и на 8.6–20.0% в более коротком. Энергетическая оценка уменьшает максимальные абсолютные значения расхождений до 7.1% и 12.4%.

Приближённую зависимость можно также проверить с помощью безразмерной величины

$$C = \frac{T\sqrt{gh}}{L}.$$

Экспериментальные значения лежат приблизительно в диапазоне от 2.02 до 2.14 для более длинного сосуда и от 1.98 до 2.27 для более короткого. Эти значения достаточно близки к общей постоянной. Две модели предсказывают

$$C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1.814, \quad C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1.987.$$

Таким образом, модели позволяют достаточно хорошо описать характерную величину периода и его зависимость от параметров, а учёт распределения скорости течения улучшает согласие с этими данными.

Тем не менее их применимость ограничена. Отношения  $h/L$  лежат в диапазоне от 0.063 до 0.30 для более длинного сосуда и от 0.22 до 0.87 для более короткого. В частности, измерения при наибольших глубинах в более коротком сосуде выходят за пределы надёжной применимости приближения мелкой воды. В этих условиях становятся существенными вертикальное движение и отклонения поверхности от предполагаемой плоскости. Экспериментальные погрешности не указаны, поэтому таблица устанавливает численное согласие, но не обеспечивает статистической проверки модели.

## 2 — Масштаб времени озёрных измерений

Для озера Веттерн

$$L = 1.23 \times 10^5 \text{ m}, \quad h = 50 \text{ m},$$

откуда

$$\sqrt{gh} \simeq 22.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Простая модель предсказывает

$$T_0 = \frac{\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{3(9.81)(50)}} \simeq 1.01 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{2.8 \text{ h}}.$$

Энергетическая оценка даёт

$$T_1 = \frac{2\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{10(9.81)(50)}} \simeq 1.10 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{3.1 \text{ h}}.$$

Следовательно, последовательные максимумы каждой из кривых разделены промежутком времени приблизительно в **три часа**.

На приведённом графике одно полное колебание занимает приблизительно 1.5 интервала между делениями горизонтальной оси. Поэтому

$$\text{время на один интервал между делениями} \approx \frac{3 \text{ h}}{1.5} \approx \boxed{2 \text{ h}}.$$

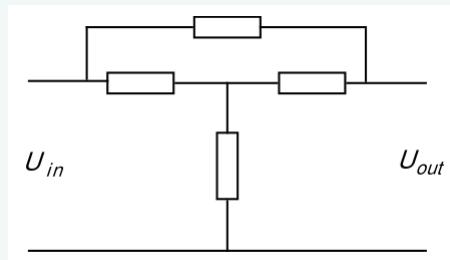
На всей записи укладывается примерно двенадцать колебаний, что соответствует приблизительно 36 h, или полутора суткам. Две кривые находятся приблизительно в противофазе, как и следует ожидать для колебаний у противоположных концов озера.

---

Решение проверено по официальному решению.

### Задача 3: Электронный частотный фильтр

Электронный частотный фильтр состоит из четырёх элементов, соединённых так, как показано на верхнем рисунке. Импедансом источника можно пренебречь, а импеданс нагрузки можно считать бесконечным. Фильтр должен обеспечивать зависимость отношения напряжений  $U_{out}/U_{in}$  от частоты, показанную на нижнем рисунке, где  $U_{in}$  — входное напряжение, а  $U_{out}$  — выходное напряжение. При частоте  $f_0$  сдвиг фаз между этими двумя напряжениями равен нулю.

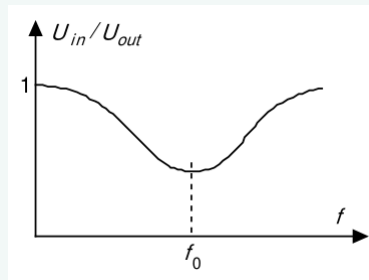


Для построения фильтра можно выбрать элементы из следующего набора:

2 резистора по 10 кОм

2 конденсатора по 10 нФ

2 катушки индуктивности по 160 мГн (без железного сердечника и с пренебрежимо малым сопротивлением)



Соберите из четырёх этих элементов фильтр, удовлетворяющий указанным условиям. Определите частоту  $f_0$  и отношение  $U_{out}/U_{in}$  при этой частоте для как можно большего числа комбинаций элементов.

Условие переведено с официального английского текста.

#### Ответы

- **Задача 3.** Существует **12 допустимых вариантов расположения элементов**, если показанную на графике кривую с провалом понимать как зависимость модуля  $U_{out}/U_{in}$ , как указано в тексте.

Обозначим позиции элементов в следующем порядке:

$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) =$  (левая горизонтальная, правая горизонтальная, верхняя перемычка, вертикальный шунт).

Каждая буква  $R$  обозначает резистор сопротивлением 10 кОм, каждая  $C$  — конденсатор ёмкостью 10 нФ, а каждая  $L$  — катушку индуктивностью 160 мН.

| Расположение элементов ( $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ ) | $f_0$    | $U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$ при $f_0$ |
|-------------------------------------------------|----------|------------------------------------------|
| $(R, R, C, C)$ или $(C, C, R, R)$               | 1.59 kHz | $2/3 \approx 0.667$                      |
| $(R, R, L, L)$ или $(L, L, R, R)$               | 9.95 kHz | $2/3 \approx 0.667$                      |
| $(R, L, R, C)$                                  | 5.63 kHz | $4/29 \approx 0.138$                     |
| $(R, C, R, L)$                                  | 2.81 kHz | $4/29 \approx 0.138$                     |
| $(C, R, L, R)$                                  | 5.63 kHz | $25/29 \approx 0.862$                    |
| $(L, R, C, R)$                                  | 2.81 kHz | $25/29 \approx 0.862$                    |
| $(L, C, R, L)$ или $(L, C, C, R)$               | 5.63 kHz | $1/2$                                    |
| $(C, L, R, C)$ или $(C, L, L, R)$               | 2.81 kHz | $1/2$                                    |

Для каждого варианта расположения элементов выходное и входное напряжения совпадают по фазе при  $f_0$ .

## Решение

В задаче нет пронумерованных подпунктов. Сначала выведем передаточную функцию данной схемы, затем найдём подходящие варианты расположения элементов и вычислим соответствующие минимумы.

Будем считать элементы идеальными, причём

$$R = 1.00 \times 10^4 \Omega, \quad C = 1.00 \times 10^{-8} \text{ F}, \quad L = 0.160 \text{ H}.$$

В установившемся синусоидальном режиме, используя комплексные амплитуды с временной зависимостью  $e^{i\omega t}$ , получаем

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad \omega = 2\pi f.$$

Пренебрежимо малый импеданс источника означает, что входное напряжение задано.

Бесконечный импеданс нагрузки означает, что из выходного вывода во внешнюю цепь ток не течёт.

Пусть  $V_m$  — напряжение в узле соединения  $Z_1, Z_2, Z_4$ , отсчитываемое относительно общего нижнего проводника. По первому закону Кирхгофа

$$\begin{aligned} \frac{V_m - V_{\text{in}}}{Z_1} + \frac{V_m - V_{\text{out}}}{Z_2} + \frac{V_m}{Z_4} &= 0, \\ \frac{V_{\text{out}} - V_m}{Z_2} + \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{Z_3} &= 0. \end{aligned}$$

Исключая  $V_m$ , получаем комплексное отношение напряжений:

$$H(\omega) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_3}.$$

Его удобно записать в виде

$$H = \frac{K}{K + 1},$$

где

$$K = \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_4}{Z_1}.$$

**Расположение элементов.** Введём безразмерную постоянную

$$\kappa = \frac{L}{R^2 C}.$$

Для каждого из следующих вариантов расположения элементов подстановка в выражение для  $K$  даёт

$$K = \alpha + i \left( \beta \omega - \frac{\gamma}{\omega} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Буквенные обозначения элементов в таблице записаны в порядке  $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ .

| Расположение | $\alpha$   | $\beta$ | $\gamma$ |
|--------------|------------|---------|----------|
| $RRCC, CCRR$ | 2          | $RC$    | $1/(RC)$ |
| $RRLL, LLRR$ | 2          | $L/R$   | $R/L$    |
| $RLRC$       | $\kappa$   | $L/R$   | $2/(RC)$ |
| $RCRL$       | $\kappa$   | $2L/R$  | $1/(RC)$ |
| $CRLR$       | $1/\kappa$ | $RC$    | $2R/L$   |
| $LRCL$       | $1/\kappa$ | $2RC$   | $R/L$    |
| $LCRL$       | 1          | $L/R$   | $2/(RC)$ |
| $LCCR$       | 1          | $RC$    | $2R/L$   |
| $CLRC$       | 1          | $2L/R$  | $1/(RC)$ |
| $CLLR$       | 1          | $2RC$   | $R/L$    |

Например, расположение  $RLRC$  означает

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i\omega L, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{i\omega C}.$$

При этом получаем

$$K = \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega CR} + \frac{L}{CR^2} + \frac{1}{i\omega CR} = \kappa + i \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{2}{\omega CR} \right),$$

как и указано в таблице.

**Частотная зависимость и фаза.** Положим

$$u = \beta \omega - \frac{\gamma}{\omega}.$$

Тогда

$$H = \frac{\alpha + iu}{\alpha + 1 + iu}, \quad |H|^2 = \frac{\alpha^2 + u^2}{(\alpha + 1)^2 + u^2}.$$

Поскольку

$$\frac{d|H|^2}{d(u^2)} = \frac{2\alpha + 1}{[(\alpha + 1)^2 + u^2]^2} > 0,$$

модуль минимален при  $u = 0$ . Кроме того,

$$\frac{du}{d\omega} = \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} > 0,$$

поэтому при положительных частотах существует ровно один минимум:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

При этой частоте

$$\boxed{H(\omega_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > 0}.$$

Таким образом, отношение напряжений действительно и положительно: разность фаз равна нулю, как и требуется.

В обоих предельных случаях по частоте

$$\omega \rightarrow 0 : \quad u \rightarrow -\infty, \quad \omega \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow +\infty,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1.$$

Следовательно, каждый из перечисленных вариантов расположения элементов даёт требуемую кривую: модуль отношения напряжений начинается с единицы, плавно убывает до единственного положительного минимума при  $f_0$ , а затем возрастает, стремясь к единице.

**Численные значения частот и отношений напряжений.** Из таблицы получаются четыре различные частоты:

$$\begin{aligned} f_{RC} &= \frac{1}{2\pi RC} = 1.5915 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{1.59 \text{ kHz}}, \\ f_{RL} &= \frac{R}{2\pi L} = 9.9472 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{9.95 \text{ kHz}}, \\ f_+ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = 5.6270 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{5.63 \text{ kHz}}, \\ f_- &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = 2.8135 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{2.81 \text{ kHz}}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\kappa = \frac{0.160}{(10^4)^2(10^{-8})} = 0.160 = \frac{4}{25}.$$

Поэтому возможные минимальные значения отношения напряжений равны

$$\begin{aligned} \alpha = 2 : \quad H_0 &= \frac{2}{3}, \\ \alpha = \kappa : \quad H_0 &= \frac{\kappa}{1 + \kappa} = \frac{L}{R^2 C + L} = \frac{4}{29}, \\ \alpha = \frac{1}{\kappa} : \quad H_0 &= \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{R^2 C}{R^2 C + L} = \frac{25}{29}, \\ \alpha = 1 : \quad H_0 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти выражения с таблицей расположения элементов, получаем все приведённые выше ответы.

**Полнота перебора расположений.** Существует 54 способа выбрать типы четырёх элементов и разместить их на четырёх позициях при условии, что элементов каждого типа не более двух: в 18 вариантах используются по два элемента каждого из двух типов, а в 36 — элементы всех трёх типов.

Чтобы в обоих предельных случаях отношение напряжений стремилось к единице, необходимо, чтобы  $K$  неограниченно возрастало по модулю как при  $\omega \rightarrow 0$ , так и при  $\omega \rightarrow \infty$ . Это позволяет легко проверить все варианты. Запишем каждый импеданс как произведение положительной постоянной на  $s^p$ , где

$$s = i\omega, \quad p_R = 0, \quad p_L = 1, \quad p_C = -1.$$

Четыре слагаемых в  $K$  имеют показатели степени

$$p_2 - p_3, \quad p_4 - p_3, \quad p_2 + p_4 - p_1 - p_3, \quad p_4 - p_1.$$

Условие для предельных значений выполняется тогда и только тогда, когда среди этих показателей есть как положительное, так и отрицательное значение. После этой проверки остаются 22 варианта расположения: 12 уже полученных и следующие десять.

| Оставшиеся расположения  | Причина несоответствия условиям                                                                                                                                                                           |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $RLCC, RCLL, LRCC, CRLl$ | Единственная конечная положительная частота, при которой $H$ действительно, равна $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ; при ней $H = 0$ . Фаза выходного напряжения в этом случае не определена, а минимум равен нулю. |
| $LLRC, LLCR, CCRL, CCLR$ | При единственной конечной положительной частоте, при которой $H$ действительно, получаем $H = -1$ : разность фаз составляет $180^\circ$ .                                                                 |
| $LLCC, CCLL$             | У них имеются резонансные полюса без затухания, и они не дают изображённого плавного провала.                                                                                                             |

Для последних двух вариантов, вводя  $x = \omega\sqrt{LC}$ , получаем явное выражение

$$H = \frac{(1 - x^2)^2}{1 - 3x^2 + x^4},$$

знаменатель которого обращается в нуль при

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, перечисленные 12 вариантов расположения исчерпывают все возможности, удовлетворяющие принятой интерпретации графика и условию нулевого сдвига фаз.

---

Решение проверено по официальному решению.