

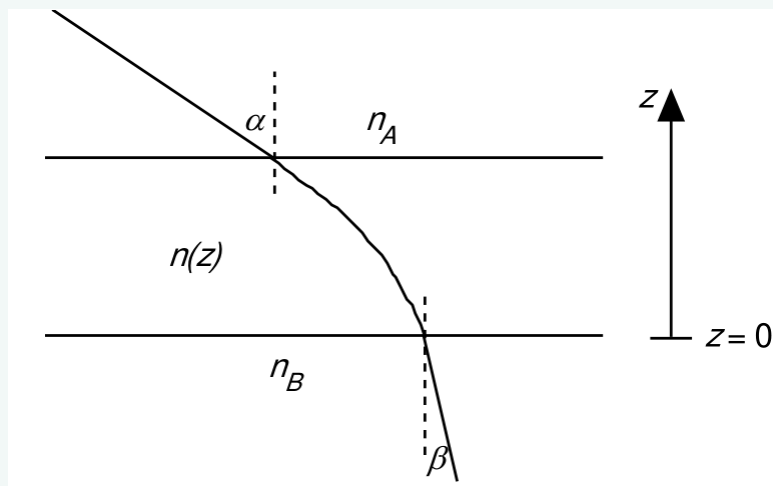
IPhO 1984

Problemas teóricos y soluciones · Sigtuna, Suecia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1984/

Problema 1: Refracción en un medio estratificado y el espejismo del desierto

- a) Considere una lámina transparente de caras planas y paralelas, cuyo índice de refracción, n , varía con la distancia, z , a la superficie inferior (véase la figura). Demuestre que $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$. La notación es la de la figura.



- b) Suponga que se encuentra de pie en un gran desierto llano. A cierta distancia ve lo que parece ser una superficie de agua. Cuando se acerca al «agua», esta parece alejarse, de modo que la distancia al «agua» siempre es constante. Explique el fenómeno.
- c) Calcule la temperatura del aire cerca del suelo en b), suponiendo que sus ojos se encuentran a 1.60 m sobre el suelo y que la distancia al «agua» es de 250 m. El índice de refracción del aire a 15°C y a presión atmosférica normal (101.3 kPa) es 1.000276. Se supone que la temperatura del aire a más de 1 m sobre el suelo es constante e igual a 30°C . Se supone que la presión atmosférica es normal. El índice de refracción, n , es tal que $n - 1$ es proporcional a la densidad del aire. Analice la precisión de su resultado.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** La magnitud que se conserva es $n(z) \sin \theta(z)$, donde θ es el ángulo respecto a la normal. Por consiguiente,

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

- **b)** Se trata de un **espejismo inferior**: el aire caliente y menos denso cercano al suelo desvía hacia arriba la luz del cielo hasta los ojos del observador. El agua aparente permanece a una distancia constante porque la distribución horizontal de temperatura y la altura de los ojos del observador no cambian.
- **c)** Interpretando los 250 m como la distancia aparente al borde más cercano del espejismo,

$$T_{\text{ground air}} \simeq 329 \text{ K} \simeq 56^\circ \text{C}.$$

La aproximación de ángulo pequeño contribuye en menos de 0.001°C ; la incertidumbre en el borde aparente y las desviaciones respecto a una estratificación atmosférica ideal son más significativas.

Solución

a)

Dividamos la lámina en numerosas capas horizontales delgadas, cada una con un índice de refracción aproximadamente constante. Sea n_i el índice de la capa i , y sea θ_i el ángulo del rayo respecto a la normal en dicha capa.

La ley de Snell en cada interfaz da

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}.$$

Como todas las interfaces son paralelas, sus normales tienen la misma dirección. Incluyendo las interfaces de entrada y salida,

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \theta_1 = \dots = n_N \sin \theta_N = n_B \sin \beta.$$

Al tomar el límite de capas infinitesimalmente delgadas, se establece el resultado para un índice que varía de forma continua:

$$n(z) \sin \theta(z) = p = \text{constante}, \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

b)

La luz solar calienta la superficie del desierto, que a su vez calienta el aire situado inmediatamente encima. A presión aproximadamente constante, este aire más caliente tiene una densidad menor y, por tanto, un índice de refracción menor. Así, el índice de refracción aumenta con la altura dentro de la capa caliente.

Consideremos un rayo de luz del cielo que se propaga hacia abajo formando un ángulo pequeño con el suelo. Según el apartado a),

$$\sin \theta(z) = \frac{p}{n(z)}.$$

A medida que el rayo entra en aire de menor índice de refracción, su ángulo θ respecto a la vertical aumenta. Si alcanza una altura donde $n(z) = p$, se vuelve horizontal. A continuación, se curva hacia arriba, hacia regiones de mayor índice de refracción, y puede llegar al observador.

El observador prolonga hacia atrás en línea recta la luz que le llega y, por ello, ve luz del cielo que aparentemente procede de debajo del horizonte. Esto se asemeja al reflejo del cielo en el agua. En un gradiente de temperatura suave, el cambio de sentido se produce mediante refracción continua.

Si la atmósfera es horizontalmente uniforme, el desplazamiento horizontal no altera la situación óptica. Para una altura fija de los ojos, la posición angular del borde más cercano del espejismo —y, por tanto, su distancia aparente— permanece constante.

c)

Sea n_e el índice de refracción a la altura de los ojos y n_g el índice mínimo en el aire más caliente junto al suelo. Supongamos que se cumplen las condiciones de la óptica geométrica, que existe estratificación horizontal y que la temperatura aumenta hacia el suelo.

Determinemos primero el índice de refracción en función de la temperatura. Para el aire tratado como un gas ideal a presión constante,

$$\rho \propto \frac{1}{T},$$

donde T es la temperatura absoluta. Como $n - 1 \propto \rho$,

$$n(T) - 1 = \frac{A}{T},$$

con

$$A = (1.000276 - 1)(273.15 + 15) = 0.0795294 \text{ K}.$$

Los ojos se encuentran por encima del nivel de 1 m, por lo que el aire que los rodea está a

$$T_e = 303.15 \text{ K}.$$

Por consiguiente,

$$n_e = 1 + \frac{0.0795294}{303.15} = 1.000262343.$$

Sea δ el ángulo de depresión del borde más cercano del espejismo por debajo de la horizontal.

Interpretando la distancia indicada como la distancia aparente en el plano del suelo, la prolongación rectilínea hacia atrás de la dirección de observación da

$$\tan \delta = \frac{h}{D} = \frac{1.60}{250} = 0.00640,$$

de modo que

$$\delta = 0.0063999 \text{ rad} \simeq 0.367^\circ.$$

El borde más cercano viene determinado por el rayo límite que se vuelve horizontal en el aire de índice mínimo. A la altura de los ojos, su ángulo respecto a la vertical es $90^\circ - \delta$; en su punto de retorno, ese ángulo es 90° . Por tanto, el apartado a) da

$$n_e \sin(90^\circ - \delta) = n_g \sin 90^\circ,$$

o bien

$$n_g = n_e \cos \delta = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}.$$

Los rayos con un ángulo de depresión menor cambian de sentido por encima del suelo y llevan luz del cielo al observador. Los rayos con un ángulo de depresión mayor llegan al suelo.

Numéricamente,

$$n_g = \frac{1.000262343}{\sqrt{1 + (1.60/250)^2}} = 1.000241859.$$

Así,

$$T_g = \frac{A}{n_g - 1} = \frac{0.0795294}{0.000241859} = 328.826 \text{ K},$$

y, por tanto,

$$T_g \simeq 56^\circ \text{C}.$$

En cuanto a la precisión, la disminución relevante del índice de refracción es

$$n_e - n_g \simeq 2.05 \times 10^{-5}.$$

El ángulo es lo suficientemente pequeño como para que sustituir

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}$$

por $1 - \frac{1}{2}(h/D)^2$ cambie la temperatura calculada en solo unos 0.0009 K.

Las hipótesis sobre la observación y la atmósfera tienen mayor importancia. Al diferenciar la fórmula de la temperatura, manteniendo fijos el índice de referencia y la temperatura del aire superior, se obtiene, para los valores indicados,

$$dT_g \simeq 55.7 \text{ K} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dD}{D} \right).$$

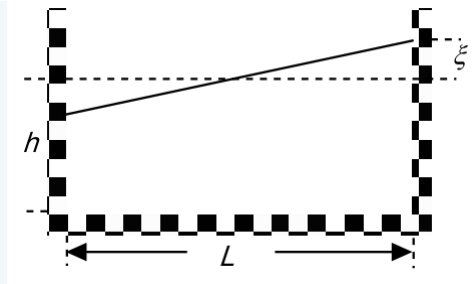
Así, un error del 1% en h/D cambia la temperatura inferida en aproximadamente 0.56°C .

Un borde difuso del espejismo, la turbulencia, el calentamiento desigual y las desviaciones respecto a la estratificación horizontal pueden introducir errores mayores. El perfil vertical detallado no es necesario para el cálculo ideal del ángulo límite, pero se requiere un borde nítido asociado al aire más caliente. Como no se proporcionan las incertidumbres de medida, no está justificado dar un margen de error numérico.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Seiches en el agua de un lago

En ciertos lagos se produce un extraño fenómeno llamado «seiche», que consiste en una oscilación del agua. Los lagos en los que se puede observar este fenómeno suelen ser largos en comparación con su profundidad y, además, estrechos. Es normal observar olas en un lago, pero no algo como un seiche, en el que oscila todo el volumen de agua, como el café en una taza que se lleva a un invitado que está esperando.



Para elaborar un modelo del seiche, consideramos el agua contenida en un recipiente rectangular. La longitud del recipiente es L y la profundidad del agua es h . Supongamos que, inicialmente, la superficie del agua forma un ángulo pequeño con la horizontal. Entonces comenzará el seiche, y suponemos que la superficie del agua sigue siendo plana, pero oscila alrededor de un eje situado en el plano horizontal y en el centro del recipiente.

Elabore un modelo del movimiento del agua y deduzca una fórmula para el período de oscilación T . Las condiciones iniciales se muestran en la figura anterior. Suponga que $\xi \ll h$. La tabla siguiente muestra los períodos de oscilación experimentales para distintas profundidades de agua en dos recipientes de diferente longitud. Compruebe, de alguna manera razonable, en qué medida la fórmula deducida concuerda con los datos experimentales. Expresé su opinión sobre la calidad de su modelo.

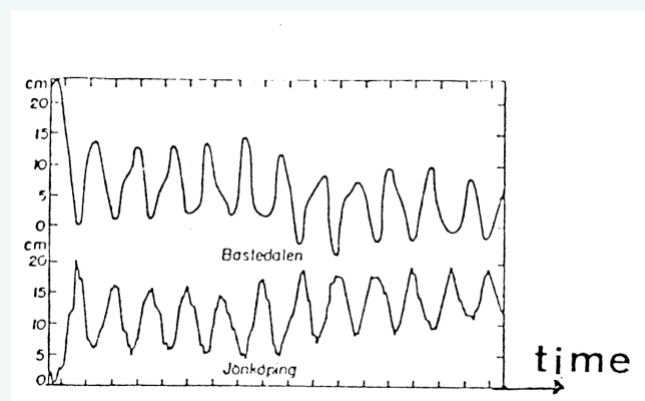
Tabla 1. $L = 479$ mm

h/mm	30	50	69	88	107	124	142
T/s	1.78	1.40	1.18	1.08	1.00	0.91	0.82

Tabla 2. $L = 143$ mm

h/mm	31	38	58	67	124
T/s	0.52	0.52	0.43	0.35	0.28

El gráfico siguiente muestra los resultados de mediciones realizadas en el lago Vättern, en Suecia. Este lago tiene una longitud de 123 km y una profundidad media de 50 m. ¿Cuál es la escala temporal del gráfico?



El nivel de la superficie del agua en Bastudalen (extremo norte del lago Vättern) y Jönköping (extremo sur).

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

El problema 2 no tiene apartados numerados ni puntuaciones indicadas. Sus preguntas se responden en el orden en que aparecen.

- **2 — Movimiento y período:** Un modelo sencillo que utiliza el centro de masas y las fuerzas hidrostáticas en las paredes de los extremos da lugar a oscilaciones armónicas con

$$T_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

Un modelo energético que tiene en cuenta la variación de la velocidad del flujo horizontal proporciona la estimación más precisa

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} \simeq 1.987 \frac{L}{\sqrt{gh}}.$$

- **2 — Comparación experimental y calidad:** T_0 subestima los períodos medidos entre un 10.0–15.2% en el recipiente más largo y entre un 8.6–20.0% en el más corto. El modelo reproduce la ley de escala aproximada $T \propto L/\sqrt{h}$. La estimación energética presenta una concordancia mayor: sus discrepancias máximas son del 7.1% y del 12.4%, respectivamente. Ambos modelos tienen una validez limitada cuando la profundidad se vuelve comparable con la longitud.
- **2 — Lago Vättern:** $T_0 \simeq 2.8$ h, mientras que $T_1 \simeq 3.1$ h. Por tanto, el gráfico muestra aproximadamente **tres horas por oscilación**, o **dos horas por intervalo entre marcas del eje horizontal**, y representa en total alrededor de **un día y medio**.

Solución

2 — Modelo del movimiento y período de oscilación

Sea b la anchura del recipiente y ρ la densidad del agua. Medimos x horizontalmente desde el centro del recipiente. Escribimos la altura de la superficie sobre el fondo como

$$H(x, t) = h + \eta(x, t), \quad \eta(x, t) = \frac{2q(t)x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Así, las profundidades en los extremos izquierdo y derecho son $h - q$ y $h + q$, respectivamente. Inicialmente, $q = \xi$.

Despreciamos la viscosidad, el amortiguamiento y la tensión superficial. Para un recipiente largo y poco profundo, se pueden despreciar inicialmente las aceleraciones verticales y aproximar la presión por la hidrostática. Una amplitud pequeña, $|q| \ll h$, permite utilizar un modelo de oscilación lineal.

La masa total es

$$M = \rho b L h,$$

ya que el volumen por encima de la superficie media es igual al volumen que falta por debajo de ella. La coordenada horizontal X del centro de masas es

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{\rho b}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x H(x, t) dx \\
 &= \frac{1}{Lh} \frac{2q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\
 &= \boxed{\frac{Lq}{6h}}.
 \end{aligned}$$

La fuerza hidrostática que ejerce una pared de un extremo sobre el agua de profundidad H tiene un módulo

$$b \int_0^H \rho g (H - z) dz = \frac{1}{2} \rho g b H^2.$$

Por consiguiente, la fuerza horizontal neta sobre el agua es

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{1}{2} \rho g b [(h - q)^2 - (h + q)^2] \\
 &= -2 \rho g b h q.
 \end{aligned}$$

La fuerza es restauradora: cuando el agua está más alta a la derecha, actúa hacia la izquierda. La segunda ley de Newton da

$$M \ddot{X} = F_x,$$

o bien

$$\rho b L h \frac{L}{6h} \ddot{q} = -2 \rho g b h q.$$

Por tanto,

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{12gh}{L^2} q = 0}.$$

Este es un movimiento armónico simple, con

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{12gh}}{L}, \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}}.$$

Si se deja evolucionar desde el reposo la configuración ilustrada,

$$q(t) = \xi \cos(\omega_0 t), \quad \eta(x, t) = \frac{2\xi x}{L} \cos(\omega_0 t).$$

Por tanto, los dos extremos oscilan en oposición de fase. El período es independiente de la pequeña amplitud, de la anchura y de la densidad.

Una estimación energética que tiene en cuenta la velocidad del flujo

La superficie plana es una aproximación al movimiento real. Podemos evaluar el efecto de describir el flujo interno construyendo un modelo energético.

Supongamos que la velocidad horizontal $u(x, t)$ es aproximadamente uniforme a lo largo de la profundidad. La conservación del volumen, linealizada en torno a la profundidad h , exige

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Utilizando $\eta = 2qx/L$ e imponiendo un flujo horizontal nulo a través de ambas paredes de los extremos, se obtiene

$$u(x, t) = \frac{\dot{q}}{Lh} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

La rapidez horizontal es máxima en el centro y se anula en las paredes. En la aproximación de aguas someras, la energía cinética del movimiento vertical es pequeña en comparación con la del movimiento horizontal. Así,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho b h \int_{-L/2}^{L/2} u^2 dx \\ &= \frac{\rho b L^3}{60h} \dot{q}^2. \end{aligned}$$

El aumento de la energía potencial gravitatoria respecto a la de una superficie horizontal es

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [(h + \eta)^2 - h^2] dx \\ &= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx \\ &= \frac{\rho g b L}{6} q^2, \end{aligned}$$

donde el término proporcional a $\int \eta dx$ se anula por la conservación del volumen.

La conservación de $K + U$ da ahora

$$\ddot{q} + \frac{10gh}{L^2} q = 0,$$

y, por tanto,

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} = \sqrt{\frac{6}{5}} T_0.$$

Esta estimación es aproximadamente un 9.5% mayor que el resultado del modelo sencillo del centro de masas.

Los distintos coeficientes reflejan las descripciones aproximadas del movimiento: el primer modelo utiliza las fuerzas hidrostáticas en los extremos, mientras que el segundo utiliza la energía de un flujo de prueba que conserva el volumen. La superficie libre real generalmente se aparta de un plano, por lo que ninguno de los coeficientes debe considerarse un resultado hidrodinámico exacto.

2 — Comparación con las mediciones y calidad del modelo

Utilizando $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$, los períodos previstos son:

Para $L = 479 \text{ mm}$:

h (mm)	T medido (s)	T_0 (s)	T_1 (s)
30	1.78	1.60	1.75
50	1.40	1.24	1.36

h (mm)	T medido (s)	T_0 (s)	T_1 (s)
69	1.18	1.06	1.16
88	1.08	0.935	1.02
107	1.00	0.848	0.929
124	0.91	0.788	0.863
142	0.82	0.736	0.806

Para $L = 143$ mm:

h (mm)	T medido (s)	T_0 (s)	T_1 (s)
31	0.52	0.470	0.515
38	0.52	0.425	0.465
58	0.43	0.344	0.377
67	0.35	0.320	0.350
124	0.28	0.235	0.258

Para realizar una comparación cuantitativa, definimos la discrepancia relativa como

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{model}} - T_{\text{measured}}}{T_{\text{measured}}}.$$

El modelo sencillo da períodos sistemáticamente inferiores a los observados: entre un 10.0–15.2% en el recipiente más largo y entre un 8.6–20.0% en el más corto. La estimación energética reduce las discrepancias absolutas máximas al 7.1% y al 12.4%.

La ley de escala aproximada también se puede comprobar mediante la magnitud adimensional

$$C = \frac{T\sqrt{gh}}{L}.$$

Los valores experimentales varían aproximadamente entre 2.02 y 2.14 en el recipiente más largo, y entre 1.98 y 2.27 en el más corto. Estos valores son razonablemente próximos a una constante común. Las predicciones de los dos modelos son

$$C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1.814, \quad C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1.987.$$

Por tanto, los modelos proporcionan una descripción útil de la escala y de la dependencia respecto a los parámetros, y describir la velocidad del flujo mejora la concordancia con estos datos.

No obstante, su validez tiene límites. Las razones h/L varían entre 0.063 y 0.30 en el recipiente más largo, y entre 0.22 y 0.87 en el más corto. En particular, las mediciones con mayor profundidad en el recipiente más corto quedan fuera del ámbito de validez de la aproximación de aguas someras. En ese caso, el movimiento vertical y las desviaciones respecto a la superficie plana supuesta son importantes. No se proporcionan incertidumbres experimentales, por lo que la tabla establece una concordancia numérica, más que una validación estadística.

2 — Escala temporal de las mediciones en el lago

Para el lago Vättern,

$$L = 1.23 \times 10^5 \text{ m}, \quad h = 50 \text{ m},$$

lo que da

$$\sqrt{gh} \simeq 22.1 \text{ m s}^{-1}.$$

El modelo sencillo predice

$$T_0 = \frac{\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{3(9.81)(50)}} \simeq 1.01 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{2.8 \text{ h}}.$$

La estimación energética da

$$T_1 = \frac{2\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{10(9.81)(50)}} \simeq 1.10 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{3.1 \text{ h}}.$$

En consecuencia, los máximos sucesivos de cualquiera de las dos curvas están separados por aproximadamente **tres horas**.

En el gráfico reproducido, una oscilación completa ocupa aproximadamente 1.5 intervalos entre marcas del eje horizontal. Por tanto,

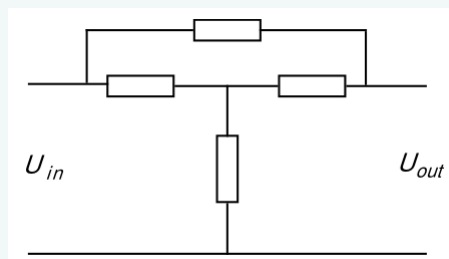
$$\text{tiempo por intervalo entre marcas} \approx \frac{3 \text{ h}}{1.5} \approx \boxed{2 \text{ h}}.$$

El registro abarca aproximadamente doce oscilaciones, que corresponden a unas **36 h**, o un día y medio. Las dos curvas están aproximadamente en oposición de fase, como cabe esperar de las oscilaciones en extremos opuestos del lago.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Filtro electrónico de frecuencias

Un filtro electrónico de frecuencias consta de cuatro componentes conectados como se muestra en la figura superior. La impedancia de la fuente puede despreciarse y la impedancia de la carga puede considerarse infinita. El filtro debe ser tal que la relación de tensiones U_{out}/U_{in} tenga la dependencia con la frecuencia mostrada en la figura inferior, donde U_{in} es la tensión de entrada y U_{out} es la tensión de salida. A la frecuencia f_0 , el desfase entre las dos tensiones es cero.

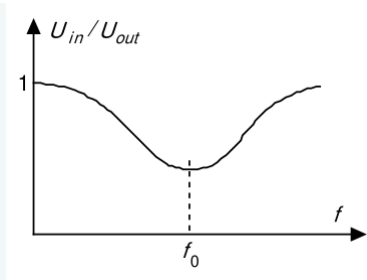


Para construir el filtro, se puede elegir entre los siguientes componentes:

2 resistencias, 10 k Ω

2 condensadores, 10 nF

2 solenoides, 160 mH (sin núcleo de hierro y con resistencia despreciable)



Construya, combinando cuatro de estos componentes, un filtro que cumpla las condiciones indicadas. Determine la frecuencia f_0 y la relación U_{out}/U_{in} a esta frecuencia para tantas combinaciones de componentes como sea posible.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 3.** Hay **12 disposiciones válidas de los componentes**, interpretando el mínimo de la gráfica como el módulo de U_{out}/U_{in} , tal como se especifica en el texto.

Definimos las posiciones, en orden, como

$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (\text{horizontal izquierda, horizontal derecha, puente superior, derivación vertical})$.

Cada R representa una resistencia de $10\text{ k}\Omega$, cada C un condensador de 10 nF y cada L un solenoide de 160 mH .

Disposición de los componentes (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	U_{out}/U_{in} a f_0
(R, R, C, C) o (C, C, R, R)	1.59 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, R, L, L) o (L, L, R, R)	9.95 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, L, R, C)	5.63 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(R, C, R, L)	2.81 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(C, R, L, R)	5.63 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, R, C, R)	2.81 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, C, R, L) o (L, C, C, R)	5.63 kHz	$1/2$
(C, L, R, C) o (C, L, L, R)	2.81 kHz	$1/2$

En todas las disposiciones, la salida y la entrada están **en fase a f_0** .

Solución

El problema no tiene apartados numerados. Primero deducimos la respuesta del circuito dado; después identificamos las disposiciones de los componentes y calculamos sus mínimos.

Utilizamos componentes ideales con

$$R = 1.00 \times 10^4 \Omega, \quad C = 1.00 \times 10^{-8} \text{ F}, \quad L = 0.160 \text{ H}.$$

En régimen sinusoidal estacionario, utilizando fasores con dependencia temporal $e^{i\omega t}$,

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad \omega = 2\pi f.$$

La impedancia despreciable de la fuente fija la tensión de entrada. La impedancia infinita de la carga significa que no sale corriente hacia el exterior por el terminal de salida.

Sea V_m la tensión en el punto de unión de Z_1, Z_2, Z_4 , medida respecto al conductor inferior común. La ley de corrientes de Kirchhoff da

$$\begin{aligned} \frac{V_m - V_{\text{in}}}{Z_1} + \frac{V_m - V_{\text{out}}}{Z_2} + \frac{V_m}{Z_4} &= 0, \\ \frac{V_{\text{out}} - V_m}{Z_2} + \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{Z_3} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando V_m , la relación compleja de tensiones es

$$H(\omega) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_3}.$$

Resulta conveniente escribirla como

$$H = \frac{K}{K + 1},$$

donde

$$K = \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_4}{Z_1}.$$

Disposiciones de los componentes. Definimos la constante adimensional

$$\kappa = \frac{L}{R^2 C}.$$

Para cada una de las siguientes disposiciones, la sustitución en K da

$$K = \alpha + i \left(\beta \omega - \frac{\gamma}{\omega} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Los códigos de los componentes en la tabla están escritos en el orden $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$.

Disposición	α	β	γ
<i>RRCC, CCRR</i>	2	<i>RC</i>	$1/(RC)$
<i>RRLL, LLRR</i>	2	L/R	R/L
<i>RLRC</i>	κ	L/R	$2/(RC)$
<i>RCRL</i>	κ	$2L/R$	$1/(RC)$
<i>CRLR</i>	$1/\kappa$	<i>RC</i>	$2R/L$
<i>LRCL</i>	$1/\kappa$	$2RC$	R/L
<i>LCRL</i>	1	L/R	$2/(RC)$
<i>LCCR</i>	1	<i>RC</i>	$2R/L$
<i>CLRC</i>	1	$2L/R$	$1/(RC)$
<i>CLLR</i>	1	$2RC$	R/L

Por ejemplo, la disposición *RLRC* significa

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i\omega L, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{i\omega C}.$$

Esta da

$$K = \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega CR} + \frac{L}{CR^2} + \frac{1}{i\omega CR} = \kappa + i \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{2}{\omega CR} \right),$$

como se indica en la tabla.

Dependencia con la frecuencia y fase. Sea

$$u = \beta\omega - \frac{\gamma}{\omega}.$$

Entonces

$$H = \frac{\alpha + iu}{\alpha + 1 + iu}, \quad |H|^2 = \frac{\alpha^2 + u^2}{(\alpha + 1)^2 + u^2}.$$

Puesto que

$$\frac{d|H|^2}{d(u^2)} = \frac{2\alpha + 1}{[(\alpha + 1)^2 + u^2]^2} > 0,$$

el módulo es mínimo cuando $u = 0$. Además,

$$\frac{du}{d\omega} = \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} > 0,$$

por lo que existe exactamente un mínimo a una frecuencia positiva:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

A esta frecuencia,

$$\boxed{H(\omega_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > 0}.$$

Por tanto, la relación de tensiones es real y positiva: la diferencia de fase es cero, como se requiere.

En ambos límites de frecuencia,

$$\omega \rightarrow 0 : \quad u \rightarrow -\infty, \quad \omega \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow +\infty,$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1.$$

Por tanto, todas las disposiciones enumeradas presentan la curva requerida: su módulo parte de la unidad, disminuye suavemente hasta un único mínimo positivo a f_0 y luego aumenta hacia la unidad.

Valores numéricos de las frecuencias y las relaciones de tensiones. La tabla da cuatro frecuencias distintas:

$$f_{RC} = \frac{1}{2\pi RC} = 1.5915 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{1.59 \text{ kHz}},$$

$$f_{RL} = \frac{R}{2\pi L} = 9.9472 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{9.95 \text{ kHz}},$$

$$f_+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = 5.6270 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{5.63 \text{ kHz}},$$

$$f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = 2.8135 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{2.81 \text{ kHz}}.$$

Además,

$$\kappa = \frac{0.160}{(10^4)^2(10^{-8})} = 0.160 = \frac{4}{25}.$$

Por tanto, los posibles valores mínimos de la relación son

$$\begin{aligned} \alpha = 2 : \quad H_0 &= \frac{2}{3}, \\ \alpha = \kappa : \quad H_0 &= \frac{\kappa}{1 + \kappa} = \frac{L}{R^2C + L} = \frac{4}{29}, \\ \alpha = \frac{1}{\kappa} : \quad H_0 &= \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{R^2C}{R^2C + L} = \frac{25}{29}, \\ \alpha = 1 : \quad H_0 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Combinando estas expresiones con la tabla de disposiciones se obtienen todas las respuestas anteriores.

Exhaustividad de las disposiciones. Hay 54 asignaciones de tipos de componentes a las cuatro posiciones, permitiendo como máximo dos de cada tipo: 18 utilizan dos componentes de cada uno de dos tipos, y 36 utilizan los tres tipos.

Los límites iguales a la unidad en ambos extremos requieren que K diverja tanto cuando $\omega \rightarrow 0$ como cuando $\omega \rightarrow \infty$. Esto proporciona una forma sencilla de comprobar todas las asignaciones. Escribimos cada impedancia como una constante positiva multiplicada por s^p , con

$$s = i\omega, \quad p_R = 0, \quad p_L = 1, \quad p_C = -1.$$

Los cuatro términos de K tienen los exponentes

$$p_2 - p_3, \quad p_4 - p_3, \quad p_2 + p_4 - p_1 - p_3, \quad p_4 - p_1.$$

La condición en los extremos se cumple precisamente cuando estos exponentes incluyen tanto un valor positivo como uno negativo. Quedan así 22 disposiciones: las 12 ya obtenidas y las diez siguientes.

Disposiciones restantes	Motivo por el que no cumplen las condiciones
$RLCC, RCLL, LRCC, CRL$	Su única frecuencia positiva finita con H real es $\omega = 1/\sqrt{LC}$, donde $H = 0$. La fase de salida queda entonces indefinida y el mínimo es cero.
$LLRC, LLCR, CCRL, CCLR$	Su única frecuencia positiva finita con H real da $H = -1$: la diferencia de fase es de 180° .
$LLCC, CCLL$	Tienen polos resonantes no amortiguados y no producen el mínimo suave ilustrado.

Para las dos últimas disposiciones, al escribir $x = \omega\sqrt{LC}$ se obtiene explícitamente

$$H = \frac{(1 - x^2)^2}{1 - 3x^2 + x^4},$$

cuyo denominador se anula en

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, las 12 disposiciones enumeradas agotan las posibilidades que satisfacen la interpretación de la gráfica y la condición de desfase nulo.

La solución se comprobó con la solución oficial.