

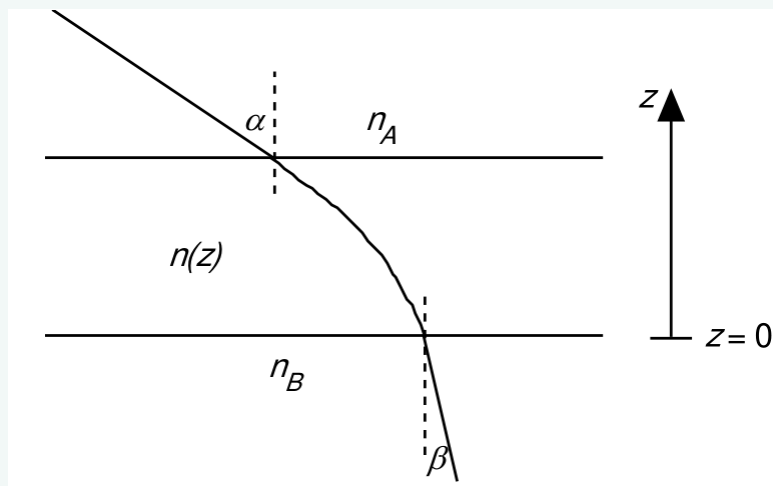
IPhO 1984

Theorieaufgaben und Lösungen · Sigtuna, Schweden · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1984/

Aufgabe 1: Brechung in einem geschichteten Medium und die Luftspiegelung in der Wüste

- a) Betrachten Sie eine planparallele transparente Platte, deren Brechungsindex n mit dem Abstand z von der unteren Oberfläche variiert (siehe Abbildung). Zeigen Sie, dass $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$. Die Bezeichnungen entsprechen denen in der Abbildung.



- b) Nehmen Sie an, Sie stehen in einer großen, ebenen Wüste. In einiger Entfernung sehen Sie etwas, das wie eine Wasserfläche aussieht. Wenn Sie sich dem „Wasser“ nähern, scheint es sich so von Ihnen zu entfernen, dass der Abstand zum „Wasser“ stets gleich bleibt. Erklären Sie dieses Phänomen.
- c) Berechnen Sie die Temperatur der bodennahen Luft in b), unter der Annahme, dass sich Ihre Augen 1.60 m über dem Boden befinden und der Abstand zum „Wasser“ 250 m beträgt. Der Brechungsindex der Luft bei 15°C und normalem Luftdruck (101.3 kPa) beträgt 1.000276. Die Temperatur der Luft in mehr als 1 m Höhe über dem Boden wird als konstant und gleich 30°C angenommen. Der Luftdruck wird als normal angenommen. Für den Brechungsindex n gilt, dass $n - 1$ proportional zur Dichte der Luft ist. Diskutieren Sie die Genauigkeit Ihres Ergebnisses.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** Die Erhaltungsgröße ist $n(z) \sin \theta(z)$, wobei θ der Winkel zum Lot ist. Folglich gilt

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

- **b)** Es handelt sich um eine **untere Luftspiegelung**: Heiße, weniger dichte Luft in Bodennähe lenkt Himmelslicht nach oben in die Augen des Beobachters. Die scheinbare Wasserfläche bleibt in konstantem Abstand, weil die horizontale Temperaturverteilung und die Augenhöhe des Beobachters unverändert bleiben.
- **c)** Wenn man 250 m als den scheinbaren Abstand zum nahen Rand der Luftspiegelung auffasst, ergibt sich

$$T_{\text{ground air}} \simeq 329 \text{ K} \simeq 56^\circ \text{C}.$$

Die Kleinwinkelnäherung trägt weniger als 0.001°C zum Fehler bei; die Unsicherheit bei der Bestimmung des scheinbaren Randes und Abweichungen von einer idealen Schichtung der Atmosphäre sind bedeutsamer.

Lösung

a)

Wir unterteilen die Platte in viele dünne horizontale Schichten, die jeweils einen näherungsweise konstanten Brechungsindex haben. Es sei n_i der Brechungsindex der Schicht i und θ_i der Winkel des Lichtstrahls zum Lot in dieser Schicht.

Das Snelliussche Brechungsgesetz liefert an jeder Grenzfläche

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}.$$

Da alle Grenzflächen parallel sind, haben ihre Normalen dieselbe Richtung. Unter Einbeziehung der Eintritts- und Austrittsflächen gilt

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \theta_1 = \dots = n_N \sin \theta_N = n_B \sin \beta.$$

Der Grenzübergang zu unendlich dünnen Schichten ergibt das Resultat für einen kontinuierlich veränderlichen Brechungsindex:

$$n(z) \sin \theta(z) = p = \text{konstant}, \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

b)

Das Sonnenlicht erwärmt die Wüstenoberfläche, die wiederum die Luft unmittelbar darüber erwärmt. Bei näherungsweise konstantem Druck hat diese wärmere Luft eine geringere Dichte und damit einen kleineren Brechungsindex. Der Brechungsindex nimmt daher innerhalb der heißen Schicht mit der Höhe zu.

Betrachten wir einen Strahl des Himmelslichts, der unter einem flachen Winkel zum Boden nach unten verläuft. Aus Teil a) folgt

$$\sin \theta(z) = \frac{p}{n(z)}.$$

Wenn der Strahl in Luft mit kleinerem Brechungsindex eintritt, nimmt sein Winkel θ zur Vertikalen zu. Erreicht er eine Höhe, in der $n(z) = p$ gilt, so verläuft er horizontal. Anschließend wendet er sich nach oben zu Bereichen mit größerem Brechungsindex und kann den Beobachter erreichen.

Der Beobachter verlängert das einfallende Licht gedanklich geradlinig rückwärts und sieht daher Himmelslicht, das scheinbar von unterhalb des Horizonts kommt. Dies ähnelt der Spiegelung des Himmels im Wasser. Bei einem glatten Temperaturgradienten erfolgt die Umkehr durch kontinuierliche Brechung.

Ist die Atmosphäre in horizontaler Richtung gleichförmig, so bleibt die optische Situation bei einer horizontalen Bewegung unverändert. Bei fester Augenhöhe bleibt die Winkellage des nahen Randes der Luftspiegelung — und damit sein scheinbarer Abstand — konstant.

c)

Es bezeichne n_e den Brechungsindex auf Augenhöhe und n_g den kleinsten Brechungsindex in der heißesten Luft unmittelbar am Boden. Wir setzen die Gültigkeit der geometrischen Optik, eine horizontale Schichtung und eine zum Boden hin zunehmende Temperatur voraus.

Zunächst bestimmen wir den Brechungsindex als Funktion der Temperatur. Für Luft, die als ideales Gas bei konstantem Druck behandelt wird, gilt

$$\rho \propto \frac{1}{T},$$

wobei T die absolute Temperatur ist. Wegen $n - 1 \propto \rho$ gilt

$$n(T) - 1 = \frac{A}{T},$$

mit

$$A = (1.000276 - 1)(273.15 + 15) = 0.0795294 \text{ K}.$$

Die Augen befinden sich oberhalb von 1 m Höhe, sodass die sie umgebende Luft die Temperatur

$$T_e = 303.15 \text{ K}$$

hat. Folglich gilt

$$n_e = 1 + \frac{0.0795294}{303.15} = 1.000262343.$$

Es sei δ der Senkungswinkel des nahen Randes der Luftspiegelung unter die Horizontale. Wenn wir die angegebene Entfernung als scheinbaren Abstand in der Bodenebene auffassen, ergibt die geradlinige Rückverlängerung der Blickrichtung

$$\tan \delta = \frac{h}{D} = \frac{1.60}{250} = 0.00640,$$

also

$$\delta = 0.0063999 \text{ rad} \simeq 0.367^\circ.$$

Der nahe Rand wird durch den Grenzstrahl bestimmt, der in der Luft mit dem kleinsten Brechungsindex horizontal verläuft. Auf Augenhöhe beträgt sein Winkel zur Vertikalen $90^\circ - \delta$; an seinem Umkehrpunkt beträgt dieser Winkel 90° . Teil a) liefert daher

$$n_e \sin(90^\circ - \delta) = n_g \sin 90^\circ,$$

oder

$$n_g = n_e \cos \delta = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}.$$

Strahlen mit einem kleineren Senkungswinkel kehren oberhalb des Bodens um und bringen Himmelslicht zum Beobachter. Strahlen mit einem größeren Senkungswinkel erreichen den Boden.

Numerisch ergibt sich

$$n_g = \frac{1.000262343}{\sqrt{1 + (1.60/250)^2}} = 1.000241859.$$

Somit gilt

$$T_g = \frac{A}{n_g - 1} = \frac{0.0795294}{0.000241859} = 328.826 \text{ K},$$

und damit

$$T_g \simeq 56^\circ \text{C}.$$

Für die Genauigkeit ist die folgende Abnahme des Brechungsindex maßgeblich:

$$n_e - n_g \simeq 2.05 \times 10^{-5}.$$

Der Winkel ist so klein, dass das Ersetzen von

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}$$

durch $1 - \frac{1}{2}(h/D)^2$ die berechnete Temperatur nur um etwa 0.0009 K ändert.

Die Annahmen zur Beobachtung und zur Atmosphäre fallen stärker ins Gewicht. Differenziert man die Temperaturformel bei festgehaltenem Referenzbrechungsindex und festgehaltener Temperatur der oberen Luftschicht, so ergibt sich bei den angegebenen Werten

$$dT_g \simeq 55.7 \text{ K} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dD}{D} \right).$$

Ein Fehler von 1% in h/D ändert die daraus ermittelte Temperatur somit um etwa 0.56°C .

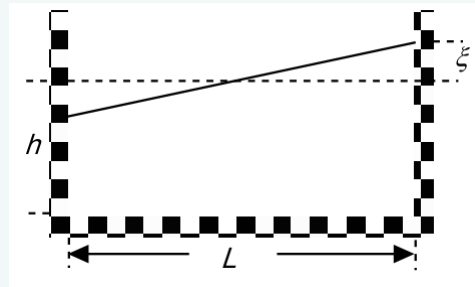
Ein unscharfer Rand der Luftspiegelung, Turbulenz, ungleichmäßige Erwärmung und Abweichungen von der horizontalen Schichtung können größere Fehler verursachen. Das genaue vertikale Profil ist für die ideale Berechnung des Grenzwinkels nicht erforderlich, wohl aber ein klar erkennbarer Rand, der der heißesten Luft zugeordnet ist. Da keine Messunsicherheiten angegeben sind, lässt sich keine numerische Fehlergrenze rechtfertigen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Seiches in Seen

In manchen Seen tritt ein merkwürdiges Phänomen auf, das als „Seiche“ bezeichnet wird und eine Schwingung des Wassers darstellt. Seen, in denen man dieses Phänomen beobachten kann, sind gewöhnlich im Verhältnis zu ihrer Tiefe lang und außerdem schmal. Wellen in einem See sind ein

vertrauter Anblick, nicht aber eine Erscheinung wie eine Seiche, bei der das gesamte Wasservolumen schwingt, ähnlich wie der Kaffee in einer Tasse, die man zu einem wartenden Gast trägt.



Um ein Modell für die Seiche zu entwickeln, betrachten wir Wasser in einem rechteckigen Behälter. Die Länge des Behälters beträgt L , die Wassertiefe h . Nehmen Sie an, dass die Wasseroberfläche zu Beginn einen kleinen Winkel mit der Horizontalen bildet. Daraufhin setzt die Seiche ein, und wir nehmen an, dass die Wasseroberfläche eben bleibt, jedoch um eine Achse schwingt, die in der horizontalen Ebene in der Mitte des Behälters liegt.

Entwickeln Sie ein Modell für die Bewegung des Wassers und leiten Sie eine Formel für die Schwingungsdauer T her. Die Anfangsbedingungen sind in der obigen Abbildung dargestellt. Nehmen Sie an, dass $\xi \ll h$. Die folgende Tabelle zeigt experimentell bestimmte Schwingungsdauern für verschiedene Wassertiefen in zwei Behältern unterschiedlicher Länge. Überprüfen Sie auf geeignete Weise, wie gut die von Ihnen hergeleitete Formel mit den experimentellen Daten übereinstimmt. Beurteilen Sie die Güte Ihres Modells.

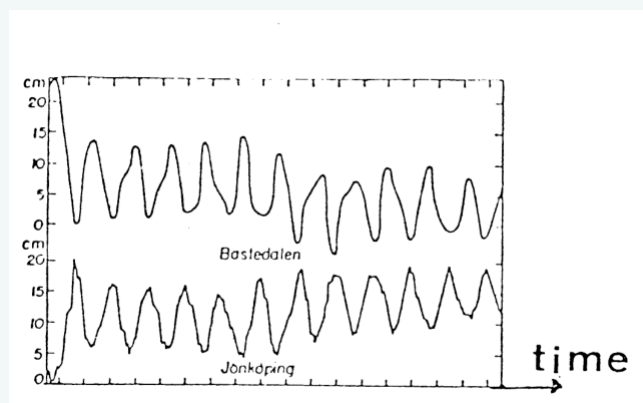
Tabelle 1. $L = 479 \text{ mm}$

h/mm	30	50	69	88	107	124	142
T/s	1.78	1.40	1.18	1.08	1.00	0.91	0.82

Tabelle 2. $L = 143 \text{ mm}$

h/mm	31	38	58	67	124
T/s	0.52	0.52	0.43	0.35	0.28

Das folgende Diagramm zeigt Messergebnisse vom Vätternsee in Schweden. Dieser See hat eine Länge von 123 km und eine mittlere Tiefe von 50 m. Welche Zeitskala hat das Diagramm?



Der Wasserstand in Bastudalen (am Nordende des Vätternsees) und Jönköping (am Südende).

Antworten

Aufgabe 2 enthält weder nummerierte Teilaufgaben noch gedruckte Punktzahlen. Die Fragen werden in der Reihenfolge beantwortet, in der sie abgedruckt sind.

- **2 — Bewegung und Schwingungsdauer:** Ein einfaches Modell, das den Schwerpunkt und die hydrostatischen Kräfte an den Stirnwänden verwendet, ergibt harmonische Schwingungen mit

$$T_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

Ein Energiemodell, das die räumliche Änderung der horizontalen Strömungsgeschwindigkeit berücksichtigt, liefert die verfeinerte Abschätzung

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} \simeq 1.987 \frac{L}{\sqrt{gh}}.$$

- **2 — Vergleich mit dem Experiment und Güte:** T_0 unterschätzt die gemessenen Schwingungsdauern im längeren Behälter um 10.0–15.2% und im kürzeren um 8.6–20.0%. Das Modell erfasst näherungsweise das Skalierungsverhalten $T \propto L/\sqrt{h}$. Die Energieabschätzung stimmt besser mit den Messwerten überein: Ihre größten Abweichungen betragen 7.1% beziehungsweise 12.4%. Beide Modelle sind nur eingeschränkt gültig, wenn die Tiefe mit der Länge vergleichbar wird.
- **2 — Vätternsee:** $T_0 \simeq 2.8$ h, während $T_1 \simeq 3.1$ h. Das Diagramm zeigt somit ungefähr **drei Stunden pro Schwingung** oder **zwei Stunden pro horizontalem Teilstrichabstand**, wobei insgesamt etwa **eineinhalb Tage** dargestellt sind.

Lösung

2 — Modell der Bewegung und Schwingungsdauer

Der Behälter habe die Breite b , und die Dichte des Wassers sei ρ . Die horizontale Koordinate x wird von der Mitte des Behälters aus gemessen. Wir schreiben die Höhe der Wasseroberfläche über dem Boden als

$$H(x, t) = h + \eta(x, t), \quad \eta(x, t) = \frac{2q(t)x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

Damit betragen die Wassertiefen am linken und rechten Ende $h - q$ beziehungsweise $h + q$. Zu Beginn gilt $q = \xi$.

Wir vernachlässigen Viskosität, Dämpfung und Oberflächenspannung. Für einen langen, flachen Behälter können vertikale Beschleunigungen zunächst vernachlässigt und der Druck als näherungsweise hydrostatisch angenommen werden. Die kleine Amplitude, $|q| \ll h$, ermöglicht ein lineares Schwingungsmodell.

Die Gesamtmasse beträgt

$$M = \rho b L h,$$

da das Volumen oberhalb der mittleren Wasseroberfläche gleich dem darunter fehlenden Volumen ist. Die horizontale Koordinate X des Schwerpunkts lautet

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho b}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x H(x, t) dx \\ &= \frac{1}{Lh} \frac{2q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \boxed{\frac{Lq}{6h}}. \end{aligned}$$

Die hydrostatische Kraft, die eine Stirnwand auf Wasser der Tiefe H ausübt, hat den Betrag

$$b \int_0^H \rho g (H - z) dz = \frac{1}{2} \rho g b H^2.$$

Folglich ist die resultierende horizontale Kraft auf das Wasser

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho g b [(h - q)^2 - (h + q)^2] \\ &= -2 \rho g b h q. \end{aligned}$$

Die Kraft ist rücktreibend: Wenn das Wasser rechts höher steht, wirkt sie nach links. Das zweite Newtonsche Gesetz ergibt

$$M \ddot{X} = F_x,$$

oder

$$\rho b L h \frac{L}{6h} \ddot{q} = -2 \rho g b h q.$$

Somit gilt

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{12gh}{L^2} q = 0}.$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{12gh}}{L}, \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}}.$$

Wird das Wasser aus der dargestellten Anordnung ohne Anfangsgeschwindigkeit freigegeben, so gilt

$$q(t) = \xi \cos(\omega_0 t), \quad \eta(x, t) = \frac{2\xi x}{L} \cos(\omega_0 t).$$

Die beiden Enden schwingen daher gegenphasig. Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der kleinen Amplitude, der Breite und der Dichte.

Eine Energieabschätzung unter Berücksichtigung der Strömungsgeschwindigkeit

Die ebene Oberfläche ist eine Näherung für die tatsächliche Bewegung. Wir können den Einfluss einer genaueren Beschreibung der inneren Strömung abschätzen, indem wir ein Energiemodell aufstellen.

Wir nehmen an, dass die horizontale Geschwindigkeit $u(x, t)$ über die Tiefe näherungsweise konstant ist. Die um die Tiefe h linearisierte Volumenerhaltung verlangt

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Mit $\eta = 2qx/L$ und der Bedingung, dass durch beide Stirnwände keine horizontale Strömung erfolgt, ergibt sich

$$u(x, t) = \frac{\dot{q}}{Lh} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

Die horizontale Geschwindigkeit ist in der Mitte am größten und verschwindet an den Wänden. In der Flachwassernäherung ist die kinetische Energie der vertikalen Bewegung klein gegenüber derjenigen der horizontalen Bewegung. Daher gilt

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho b h \int_{-L/2}^{L/2} u^2 dx \\ &= \frac{\rho b L^3}{60h} \dot{q}^2. \end{aligned}$$

Die Zunahme der potenziellen Energie im Schwerfeld gegenüber derjenigen bei horizontaler Wasseroberfläche beträgt

$$\begin{aligned} U &= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [(h + \eta)^2 - h^2] dx \\ &= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx \\ &= \frac{\rho g b L}{6} q^2, \end{aligned}$$

wobei der zu $\int \eta dx$ proportionale Term aufgrund der Volumenerhaltung verschwindet.

Aus der Erhaltung von $K + U$ folgt nun

$$\ddot{q} + \frac{10gh}{L^2} q = 0,$$

und damit

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} = \sqrt{\frac{6}{5}} T_0.$$

Diese Abschätzung ergibt eine um etwa 9.5% längere Schwingungsdauer als das einfache Schwerpunktmodell.

Die unterschiedlichen Koeffizienten spiegeln die näherungsweisen Beschreibungen der Bewegung wider: Das erste Modell verwendet hydrostatische Kräfte an den Stirnwänden, während das zweite die Energie eines volumenerhaltenden Strömungsansatzes verwendet. Die tatsächliche freie Oberfläche weicht im Allgemeinen von einer Ebene ab, sodass keiner der beiden Koeffizienten als exaktes hydrodynamisches Ergebnis angesehen werden sollte.

2 – Vergleich mit den Messungen und Güte des Modells

Mit $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ergeben sich die folgenden vorhergesagten Schwingungsdauern:

Für $L = 479 \text{ mm}$:

$h \text{ (mm)}$	Gemessenes $T \text{ (s)}$	$T_0 \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$
30	1.78	1.60	1.75
50	1.40	1.24	1.36
69	1.18	1.06	1.16
88	1.08	0.935	1.02
107	1.00	0.848	0.929
124	0.91	0.788	0.863
142	0.82	0.736	0.806

Für $L = 143 \text{ mm}$:

$h \text{ (mm)}$	Gemessenes $T \text{ (s)}$	$T_0 \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$
31	0.52	0.470	0.515
38	0.52	0.425	0.465
58	0.43	0.344	0.377
67	0.35	0.320	0.350
124	0.28	0.235	0.258

Für einen quantitativen Vergleich definieren wir die relative Abweichung als

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{model}} - T_{\text{measured}}}{T_{\text{measured}}}.$$

Das einfache Modell liefert Schwingungsdauern, die systematisch unter den beobachteten Werten liegen: im längeren Behälter um 10.0–15.2% und im kürzeren um 8.6–20.0%. Die Energieabschätzung verringert die maximalen absoluten Abweichungen auf 7.1% und 12.4%.

Das näherungsweise Skalierungsverhalten lässt sich auch anhand der folgenden dimensionslosen Größe überprüfen:

$$C = \frac{T\sqrt{gh}}{L}.$$

Die experimentellen Werte liegen im längeren Behälter ungefähr zwischen 2.02 und 2.14 und im kürzeren zwischen 1.98 und 2.27. Sie liegen damit recht nahe an einer gemeinsamen Konstante. Die beiden Modellvorhersagen lauten

$$C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1.814, \quad C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1.987.$$

Die Modelle liefern somit eine nützliche Beschreibung der Größenordnung und der Parameterabhängigkeit, und eine genauere Berücksichtigung der Strömungsgeschwindigkeit verbessert die Übereinstimmung mit diesen Daten.

Ihre Gültigkeit ist dennoch begrenzt. Die Verhältnisse h/L reichen im längeren Behälter von 0.063 bis 0.30 und im kürzeren von 0.22 bis 0.87. Insbesondere liegen die Messungen bei den größten Tiefen im kürzeren Behälter außerhalb des Bereichs, in dem die Flachwassernäherung zuverlässig ist. Vertikale Bewegungen und Abweichungen von der angenommenen ebenen Oberfläche spielen dann eine Rolle. Es sind keine experimentellen Unsicherheiten angegeben, sodass die Tabelle eine numerische Übereinstimmung, jedoch keine statistische Validierung belegt.

2 — Zeitskala der Messungen am See

Für den Vätternsee gilt

$$L = 1.23 \times 10^5 \text{ m}, \quad h = 50 \text{ m},$$

Damit ergibt sich

$$\sqrt{gh} \simeq 22.1 \text{ m s}^{-1}.$$

Das einfache Modell sagt voraus:

$$T_0 = \frac{\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{3(9.81)(50)}} \simeq 1.01 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{2.8 \text{ h}}.$$

Die Energieabschätzung liefert

$$T_1 = \frac{2\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{10(9.81)(50)}} \simeq 1.10 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{3.1 \text{ h}}.$$

Dementsprechend liegen aufeinanderfolgende Maxima jeder der beiden Kurven ungefähr **drei Stunden** auseinander.

Im wiedergegebenen Diagramm erstreckt sich eine vollständige Schwingung über ungefähr 1.5 horizontale Teilstrichabstände. Daher gilt

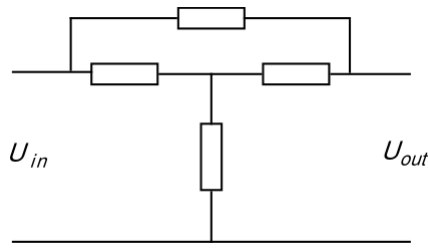
$$\text{Zeit pro Teilstrichabstand} \approx \frac{3 \text{ h}}{1.5} \approx \boxed{2 \text{ h}}.$$

Die Aufzeichnung umfasst etwa zwölf Schwingungen, was ungefähr 36 h oder eineinhalb Tagen entspricht. Die beiden Kurven sind annähernd gegenphasig, wie es für Schwingungen an gegenüberliegenden Enden des Sees zu erwarten ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Elektronisches Frequenzfilter

Ein elektronisches Frequenzfilter besteht aus vier Bauelementen, die wie in der oberen Abbildung miteinander verbunden sind. Die Impedanz der Quelle kann vernachlässigt und die Impedanz der Last als unendlich angenommen werden. Das Filter soll so beschaffen sein, dass das Spannungsverhältnis U_{out}/U_{in} die in der unteren Abbildung dargestellte Frequenzabhängigkeit aufweist, wobei U_{in} die Eingangsspannung und U_{out} die Ausgangsspannung ist. Bei der Frequenz f_0 ist die Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen null.

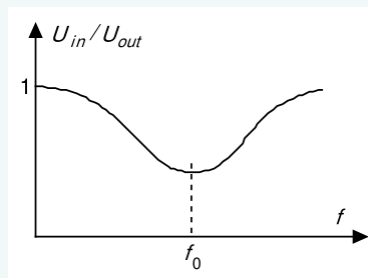


Zum Aufbau des Filters stehen die folgenden Bauelemente zur Auswahl:

2 Widerstände, 10 k Ω

2 Kondensatoren, 10 nF

2 Spulen, 160 mH (ohne Eisenkern und mit vernachlässigbarem Widerstand)



Konstruieren Sie durch Kombination von vier dieser Bauelemente ein Filter, das die angegebenen Bedingungen erfüllt. Bestimmen Sie für möglichst viele Kombinationen von Bauelementen die Frequenz f_0 und das Verhältnis U_{out}/U_{in} bei dieser Frequenz.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 3.** Es gibt **12 zulässige Anordnungen der Bauelemente**, wenn die dargestellte Absenkung entsprechend der Beschreibung im Text als Betrag von U_{out}/U_{in} interpretiert wird.

Die Positionen werden in dieser Reihenfolge definiert als

$(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (\text{links waagerecht, rechts waagerecht, obere Brücke, senkrechter Querzweig})$.

Jedes R bezeichnet einen Widerstand von 10 k Ω , jedes C einen Kondensator von 10 nF und jedes L eine Spule von 160 mH.

Anordnung der Bauelemente (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	U_{out}/U_{in} bei f_0
(R, R, C, C) oder (C, C, R, R)	1.59 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, R, L, L) oder (L, L, R, R)	9.95 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, L, R, C)	5.63 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(R, C, R, L)	2.81 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(C, R, L, R)	5.63 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, R, C, R)	2.81 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, C, R, L) oder (L, C, C, R)	5.63 kHz	$1/2$

Anordnung der Bauelemente (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	$U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$ bei f_0
(C, L, R, C) oder (C, L, L, R)	2.81 kHz	1/2

Bei jeder Anordnung sind Ausgangs- und Eingangsspannung **bei f_0 in Phase**.

Lösung

Die Aufgabe hat keine nummerierten Teilaufgaben. Wir leiten zunächst das Übertragungsverhalten der gegebenen Schaltung her, ermitteln dann die Anordnungen der Bauelemente und berechnen ihre Minima.

Wir verwenden ideale Bauelemente mit

$$R = 1.00 \times 10^4 \Omega, \quad C = 1.00 \times 10^{-8} \text{ F}, \quad L = 0.160 \text{ H}.$$

Im eingeschwungenen Zustand bei sinusförmiger Anregung gilt bei Verwendung komplexer Zeiger mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad \omega = 2\pi f.$$

Die vernachlässigbare Quellenimpedanz legt die Eingangsspannung fest. Die unendliche Lastimpedanz bedeutet, dass kein Strom über einen äußeren Stromkreis aus dem Ausgangsanschluss abfließt.

Es sei V_m die Spannung am Verbindungspunkt von Z_1, Z_2, Z_4 , gemessen gegenüber dem gemeinsamen unteren Leiter. Die Kirchhoffsche Knotenregel liefert

$$\begin{aligned} \frac{V_m - V_{\text{in}}}{Z_1} + \frac{V_m - V_{\text{out}}}{Z_2} + \frac{V_m}{Z_4} &= 0, \\ \frac{V_{\text{out}} - V_m}{Z_2} + \frac{V_{\text{out}} - V_{\text{in}}}{Z_3} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von V_m ergibt sich das komplexe Spannungsverhältnis zu

$$H(\omega) \equiv \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_3}.$$

Zweckmäßigerweise schreiben wir dies als

$$H = \frac{K}{K + 1},$$

wobei

$$K = \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_4}{Z_1}.$$

Anordnungen der Bauelemente. Wir definieren die dimensionslose Konstante

$$\kappa = \frac{L}{R^2 C}.$$

Für jede der folgenden Anordnungen ergibt das Einsetzen in K

$$K = \alpha + i \left(\beta \omega - \frac{\gamma}{\omega} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Die Bauelementcodes in der Tabelle sind in der Reihenfolge $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ angegeben.

Anordnung	α	β	γ
$RRCC, CCRR$	2	RC	$1/(RC)$
$RRLL, LLRR$	2	L/R	R/L
$RLRC$	κ	L/R	$2/(RC)$
$RCRL$	κ	$2L/R$	$1/(RC)$
$CRLR$	$1/\kappa$	RC	$2R/L$
$LRCL$	$1/\kappa$	$2RC$	R/L
$LCRL$	1	L/R	$2/(RC)$
$LCCR$	1	RC	$2R/L$
$CLRC$	1	$2L/R$	$1/(RC)$
$CLLR$	1	$2RC$	R/L

Beispielsweise bedeutet die Anordnung $RLRC$

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i\omega L, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{i\omega C}.$$

Sie ergibt

$$K = \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega CR} + \frac{L}{CR^2} + \frac{1}{i\omega CR} = \kappa + i \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{2}{\omega CR} \right),$$

wie in der Tabelle angegeben.

Frequenzabhängigkeit und Phase. Wir setzen

$$u = \beta\omega - \frac{\gamma}{\omega}.$$

Dann gilt

$$H = \frac{\alpha + iu}{\alpha + 1 + iu}, \quad |H|^2 = \frac{\alpha^2 + u^2}{(\alpha + 1)^2 + u^2}.$$

Da

$$\frac{d|H|^2}{d(u^2)} = \frac{2\alpha + 1}{[(\alpha + 1)^2 + u^2]^2} > 0,$$

ist der Betrag für $u = 0$ am kleinsten. Außerdem gilt

$$\frac{du}{d\omega} = \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} > 0,$$

sodass es genau ein Minimum bei positiver Frequenz gibt:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

Bei dieser Frequenz gilt

$$\boxed{H(\omega_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > 0}.$$

Das Spannungsverhältnis ist somit reell und positiv: Die Phasendifferenz ist wie gefordert null.

In beiden Frequenzgrenzfällen gilt

$$\omega \rightarrow 0 : \quad u \rightarrow -\infty, \quad \omega \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow +\infty,$$

und folglich

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1.$$

Jede aufgeführte Anordnung weist daher den geforderten Kurvenverlauf auf: Ihr Betrag beginnt bei eins, fällt glatt bis zu einem einzigen positiven Minimum bei f_0 ab und steigt anschließend wieder gegen eins an.

Zahlenwerte der Frequenzen und Spannungsverhältnisse. Aus der Tabelle ergeben sich vier verschiedene Frequenzen:

$$\begin{aligned} f_{RC} &= \frac{1}{2\pi RC} = 1.5915 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{1.59 \text{ kHz}}, \\ f_{RL} &= \frac{R}{2\pi L} = 9.9472 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{9.95 \text{ kHz}}, \\ f_+ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = 5.6270 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{5.63 \text{ kHz}}, \\ f_- &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = 2.8135 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{2.81 \text{ kHz}}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\kappa = \frac{0.160}{(10^4)^2(10^{-8})} = 0.160 = \frac{4}{25}.$$

Die möglichen minimalen Spannungsverhältnisse sind daher

$$\begin{aligned} \alpha = 2 : \quad H_0 &= \frac{2}{3}, \\ \alpha = \kappa : \quad H_0 &= \frac{\kappa}{1 + \kappa} = \frac{L}{R^2C + L} = \frac{4}{29}, \\ \alpha = \frac{1}{\kappa} : \quad H_0 &= \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{R^2C}{R^2C + L} = \frac{25}{29}, \\ \alpha = 1 : \quad H_0 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Kombination dieser Ausdrücke mit der Tabelle der Anordnungen liefert alle oben angegebenen Antworten.

Vollständigkeit der Anordnungen. Es gibt 54 Möglichkeiten, die vier Positionen mit Bauelementtypen zu besetzen, wobei höchstens zwei Bauelemente jedes Typs zulässig sind: 18 verwenden je zwei Bauelemente von zwei Typen, und 36 verwenden alle drei Typen.

Die Grenzwerte eins an beiden Enden erfordern, dass K sowohl für $\omega \rightarrow 0$ als auch für $\omega \rightarrow \infty$ divergiert. Daraus ergibt sich eine einfache Möglichkeit, alle Zuordnungen zu überprüfen. Wir schreiben jede Impedanz als eine positive Konstante mal s^p , mit

$$s = i\omega, \quad p_R = 0, \quad p_L = 1, \quad p_C = -1.$$

Die vier Terme von K haben die Exponenten

$$p_2 - p_3, \quad p_4 - p_3, \quad p_2 + p_4 - p_1 - p_3, \quad p_4 - p_1.$$

Die Bedingung für die Grenzwerte ist genau dann erfüllt, wenn diese Exponenten sowohl einen positiven als auch einen negativen Wert enthalten. Es bleiben 22 Anordnungen übrig: die 12 bereits ermittelten und die folgenden zehn.

Verbleibende Anordnungen	Grund für den Ausschluss
$RLCC, RCLL, LRCC, CRLL$	Ihre einzige endliche positive Frequenz mit reellem H ist $\omega = 1/\sqrt{LC}$, wobei $H = 0$ gilt. Die Phase der Ausgangsspannung ist dann undefiniert, und das Minimum ist null.
$LLRC, LLCR, CCRL, CCLR$	Ihre einzige endliche positive Frequenz mit reellem H ergibt $H = -1$: Die Phasendifferenz beträgt 180° .
$LLCC, CCLL$	Sie haben ungedämpfte Resonanzpole und ergeben nicht die dargestellte glatte Absenkung.

Für die letzten beiden Anordnungen ergibt sich mit $x = \omega\sqrt{LC}$ explizit

$$H = \frac{(1 - x^2)^2}{1 - 3x^2 + x^4},$$

wobei der Nenner bei

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

verschwindet. Somit erfassen die 12 aufgeführten Anordnungen alle Möglichkeiten, die mit der angegebenen Interpretation des Diagramms vereinbar sind und die Bedingung der Phasendifferenz null erfüllen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.