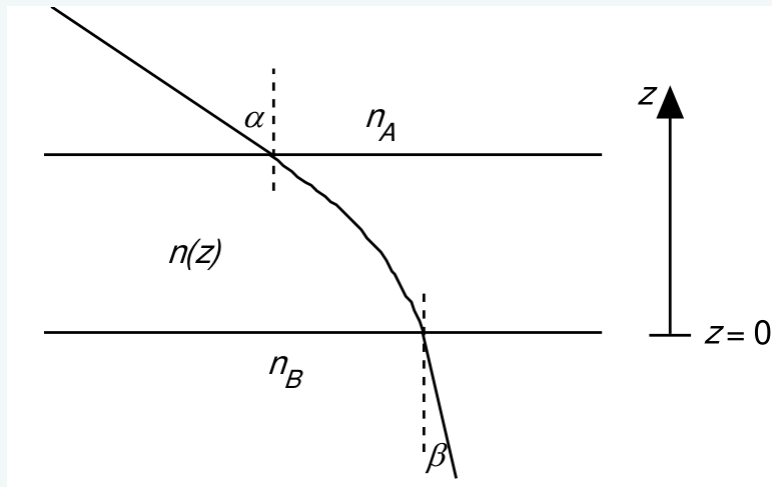


المسألة 1: الانكسار في وسط طبقي والسراب الصحراوي

(a) اعتبر صفيحة شفافة ذات وجهين مستويين متوازيين، يتغير فيها معامل الانكسار، n ، مع المسافة، z ، من السطح السفلي (انظر الشكل). أثبت أن $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$. الرمز هي المبينة في الشكل.



(b) افترض أنك تقف في صحراء واسعة مستوية. ترى على مسافة منك ما يبدو أنه سطح ماء. عندما تقترب من «الماء»، يبدو أنه يبتعد بحيث تظل المسافة بينك وبين «الماء» ثابتة دائماً. فسّر هذه الظاهرة.

(c) احسب درجة حرارة الهواء القريب من الأرض في (b)، بافتراض أن عينيك تقعان على ارتفاع 1.60 m فوق الأرض، وأن المسافة إلى «الماء» هي 250 m . معامل انكسار الهواء عند 15°C وعند الضغط الجوي العادي (101.3 kPa) هو 1.000276 . يُفترض أن درجة حرارة الهواء على ارتفاع يزيد على 1 m فوق الأرض ثابتة وتساوي 30°C . ويُفترض أن الضغط الجوي عادي. ومعامل الانكسار، n ، يحقق تناسب $n - 1$ مع كثافة الهواء. ناقش دقة نتيجتك.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) الكمية المحفوظة هي $n(z) \sin \theta(z)$ ، حيث θ هي الزاوية مع العمود على السطح. وبالتالي،

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

• (b) هذا سراب سفلي: يحني الهواء الساخن الأقل كثافة قرب الأرض ضوء السماء إلى أعلى نحو عيني الراصد. ويظل الماء الظاهري على مسافة ثابتة لأن التوزيع الأفقي لدرجة الحرارة وارتفاع عيني الراصد يظلان دون تغير.

• (c) بتفسير m 250 على أنها المسافة الظاهرية إلى الحافة القريبة للسراب،

$$T_{\text{ground air}} \simeq 329 \text{ K} \simeq 56^\circ \text{C}.$$

يساهم تقريب الزاوية الصغيرة بخطأ أقل من 0.001°C ؛ أما عدم اليقين في موضع الحافة الظاهرية والانحرافات عن التطبيق المثالي للغلاف الجوي فأكثر تأثيراً.

الحل

(a)

قسّم الصفيحة إلى عدد كبير من الطبقات الأفقية الرقيقة، بحيث يكون معامل الانكسار في كل منها ثابتاً تقريباً. لتكن n_i معامل انكسار الطبقة i ، ولتكن θ_i زاوية الشعاع مع العمود على السطح فيها.

يعطي قانون سنيل عند كل سطح فاصل

$$n_i \sin \theta_i = n_{i+1} \sin \theta_{i+1}.$$

بما أن جميع السطوح الفاصلة متوازية، فإن الأعمدة عليها لها الاتجاه نفسه. وبإدراج سطحي الدخول والخروج،

$$n_A \sin \alpha = n_1 \sin \theta_1 = \dots = n_N \sin \theta_N = n_B \sin \beta.$$

بأخذ النهاية عندما تصبح سماكات الطبقات متناهية الصغر، تثبت النتيجة لمعامل انكسار يتغير بصورة متصلة:

$$n(z) \sin \theta(z) = p = \text{ثابت}, \quad n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta.$$

(b)

يسخن ضوء الشمس سطح الصحراء، الذي يسخن بدوره الهواء الواقع فوقه مباشرة. وعند ضغط ثابت تقريباً، تكون كثافة هذا الهواء الأدفأ أقل، ومن ثم يكون معامل انكساره أصغر. ولذلك يزداد معامل الانكسار مع الارتفاع عبر الطبقة الساخنة.

اعتبر شعاعاً من ضوء السماء ينتقل إلى أسفل بزاوية صغيرة مع سطح الأرض. من الجزء (a)،

$$\sin \theta(z) = \frac{p}{n(z)}.$$

عندما يدخل الشعاع هواءً ذا معامل انكسار أصغر، تزداد زاويته θ مع الاتجاه الرأسى. وإذا بلغ ارتفاعاً يتحقق عنده $n(z) = p$ ، فإنه يصبح أفقياً. ثم ينعطف إلى أعلى نحو مناطق ذات معامل انكسار أكبر، ويمكن أن يصل إلى الراصد.

يتتبع الراصد الضوء الواصل إليه إلى الخلف على امتداد خط مستقيم، فيرى ضوء السماء وكأنه أت من أسفل الأفق. ويشبه ذلك انعكاس السماء في الماء. وفي تدرج سلس لدرجة الحرارة، يحدث الانعطاف بفعل انكسار متصل.

إذا كان الغلاف الجوي متجانساً أفقياً، فإن الانتقال أفقياً يبقى الوضع البصري دون تغير. وعند ثبات ارتفاع العينين، يظل الموضع الزاوي للحافة القريبة للسراب، ومن ثم مسافتها الظاهرية، ثابتاً.

(c)

لتكن n_e معامل الانكسار عند ارتفاع العينين، ولتكن n_g أصغر قيمة لمعامل الانكسار في الهواء الأشد سخونة المجاور للأرض. افترض انطباق البصريات الهندسية، وتطبق الهواء أفقياً، وازدياد درجة الحرارة باتجاه الأرض.

حدّد أولاً معامل الانكسار بدلالة درجة الحرارة. بمعاملة الهواء كغاز مثالي عند ضغط ثابت،

$$\rho \propto \frac{1}{T},$$

حيث T هي درجة الحرارة المطلقة. وبما أن $n - 1 \propto \rho$ ،

$$n(T) - 1 = \frac{A}{T},$$

حيث

$$A = (1.000276 - 1)(273.15 + 15) = 0.0795294 \text{ K}.$$

تقع العينان فوق مستوى 1 m، ولذلك تكون درجة حرارة الهواء المحيط بهما

$$T_e = 303.15 \text{ K}.$$

وبالتالي،

$$n_e = 1 + \frac{0.0795294}{303.15} = 1.000262343.$$

لتكن δ زاوية انخفاض الحافة القريبة للسراب عن الاتجاه الأفقي. وبتفسير المسافة المذكورة على أنها المسافة الظاهرية في مستوى سطح الأرض، فإن مدّ اتجاه النظر إلى الخلف في خط مستقيم يعطي

$$\tan \delta = \frac{h}{D} = \frac{1.60}{250} = 0.00640,$$

ومن ثم

$$\delta = 0.0063999 \text{ rad} \simeq 0.367^\circ.$$

تتحدد الحافة القريبة بالشعاع الحدي الذي يصبح أفقيًا في الهواء ذي معامل الانكسار الأدنى. عند ارتفاع العينين، تكون زاويته مع الاتجاه الرأسى $\delta - 90^\circ$ ؛ وعند نقطة انعطافه تكون تلك الزاوية 90° . لذلك يعطي الجزء (a)

$$n_e \sin(90^\circ - \delta) = n_g \sin 90^\circ,$$

أو

$$n_g = n_e \cos \delta = \frac{n_e}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}.$$

تنعطف الأشعة ذات زاوية الانخفاض الأصغر فوق الأرض وتحمل ضوء السماء إلى الراصد. أما الأشعة ذات زاوية الانخفاض الأكبر فتصل إلى الأرض.

عدديًا،

$$n_g = \frac{1.000262343}{\sqrt{1 + (1.60/250)^2}} = 1.000241859.$$

ومن ثم

$$T_g = \frac{A}{n_g - 1} = \frac{0.0795294}{0.000241859} = 328.826 \text{ K},$$

وبالتالي

$$\boxed{T_g \simeq 56^\circ \text{C}}.$$

فيما يتعلق بالدقة، فإن الانخفاض المعني في معامل الانكسار هو

$$n_e - n_g \simeq 2.05 \times 10^{-5}.$$

الزاوية صغيرة بما يكفي بحيث إن استبدال

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + (h/D)^2}}$$

بالتعبير $1 - \frac{1}{2}(h/D)^2$ لا يغيّر درجة الحرارة المحسوبة إلا بنحو 0.0009 K.

للافتراضات المتعلقة بالرصد والغلاف الجوي أثر أكبر. وبأخذ تفاضل صيغة درجة الحرارة، مع تثبيت معامل الانكسار المرجعي ودرجة حرارة الهواء العلوي، نحصل عند القيم المذكورة على

$$dT_g \simeq 55.7 \text{ K} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dD}{D} \right).$$

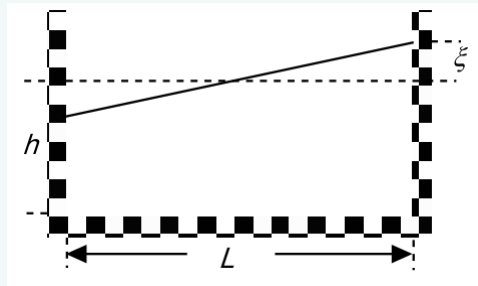
وعليه فإن خطأ بنسبة 1% في h/D يغيّر درجة الحرارة المستنتجة بنحو 0.56°C .

قد يؤدي عدم وضوح حافة السراب، والاضطراب، والتسخين غير المتجانس، والانحرافات عن التطبيق الأفقي إلى أخطاء أكبر. ولا يلزم معرفة التوزيع الرأسي التفصيلي لإجراء حساب الزاوية الحدية المثالي، لكن يلزم وجود حافة مميزة مرتبطة بالهواء الأشد سخونة. وبما أن مقادير عدم اليقين في القياس غير معطاة، فلا مسوغ لتحديد هامش خطأ عددي.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: التذبذب القائم لمياه البحيرات

تحدث في بعض البحيرات ظاهرة غريبة تسمى «التذبذب القائم»، وهي تذبذب للمياه. وتكون البحيرات التي يمكن مشاهدة هذه الظاهرة فيها طويلة عادةً مقارنة بعمقها، وضيقة أيضًا. ومن الطبيعي أن نرى أمواجًا في بحيرة، لكن ليس ظاهرة كالتذبذب القائم، حيث يتذبذب حجم الماء بأكمله، كما تتذبذب القهوة في فنجان تحمله إلى ضيف ينتظر.



لبناء نموذج للتذبذب القائم، ننظر إلى الماء في وعاء مستطيل. طول الوعاء هو L ، وعمق الماء هو h . افترض أن سطح الماء يصنع في البداية زاوية صغيرة مع الأفقي. عندئذ يبدأ التذبذب القائم، ونفترض أن سطح الماء يظل مستويًا، لكنه يتذبذب حول محور يقع في المستوى الأفقي وفي منتصف الوعاء.

أنشئ نموذجًا لحركة الماء، واشتق صيغة لدور التذبذب T . الشروط الابتدائية مبينة في الشكل أعلاه. افترض أن $h \ll \xi$. يبين الجدول أدناه أواخر التذبذب المقاسة تجريبيًا لأعماق مختلفة للماء في وعاءين مختلفي الطول. تحقق بطريقة معقولة من مدى توافق الصيغة التي اشتققتها مع البيانات التجريبية. وأبدِ رأيك في جودة نموذجك.

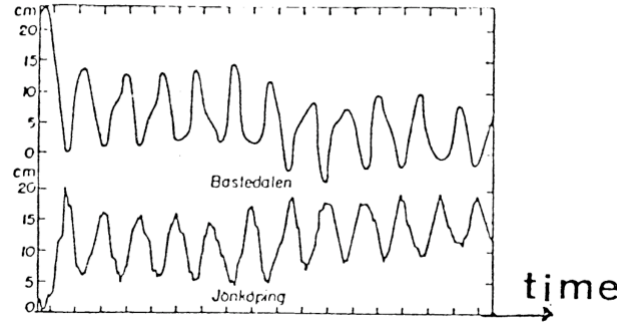
الجدول 1. $L = 479 \text{ mm}$

h/mm	30	50	69	88	107	124	142
T/s	1.78	1.40	1.18	1.08	1.00	0.91	0.82

الجدول 2. $L = 143 \text{ mm}$

h/mm	31	38	58	67	124
T/s	0.52	0.52	0.43	0.35	0.28

يبين الرسم البياني أدناه نتائج قياسات أجريت في بحيرة فاترن في السويد. يبلغ طول هذه البحيرة 123 km، ومتوسط عمقها 50 m. ما مقياس الزمن في الرسم البياني؟



منسوب سطح الماء في باستودالن (الطرف الشمالي لبحيرة فاترن) ويونشوبينغ (الطرف الجنوبي).

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليس للمسألة 2 أجزاء فرعية مرقمة أو درجات مطبوعة. وتُجاب مطالبها بحسب ترتيب ورودها في النص.

- **2 — الحركة والدور:** يعطي نموذج بسيط يستخدم مركز الكتلة والقوى الهيدروستاتيكية المؤثرة من الجدارين الطرفين تذبذبات توافقية دورها

$$T_0 = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

ويعطي نموذج قائم على الطاقة، يأخذ في الحسبان تغير سرعة الجريان الأفقي، التقدير المحسّن

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} \simeq 1.987 \frac{L}{\sqrt{gh}}.$$

- **2 — المقارنة التجريبية والجودة:** يعطي T_0 أدوارًا أقل من المقيسة بنسبة 10.0%–15.2% في الوعاء الأطول، وبنسبة 8.6%–20.0% في الوعاء الأقصر. ويصف النموذج علاقة تناسب التقريبية $T \propto L/\sqrt{h}$. أما تقدير الطاقة فيتفق مع القياسات بدرجة أكبر: إذ تبلغ أكبر فروقه النسبية 7.1% و12.4%، على الترتيب. وتكون صلاحية كلا النموذجين محدودة عندما يصبح العمق مقاربًا للطول.

- **2 — بحيرة فاترن:** $T_0 \simeq 2.8$ h، بينما $T_1 \simeq 3.1$ h. ومن ثم يمثل الرسم البياني نحو ثلاث ساعات لكل تذبذب، أو ساعتين لكل فاصل بين علامتي تدريج أفقيتين متتاليتين، ويمثل إجمالاً نحو يوم ونصف.

الحل

2 — نموذج الحركة ودور التذبذب

ليكن عرض الوعاء b ، وكثافة الماء ρ . نقيس x أفقيًا من منتصف الوعاء. ونكتب ارتفاع السطح عن القاع على الصورة

$$H(x, t) = h + \eta(x, t), \quad \eta(x, t) = \frac{2q(t)x}{L}, \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}.$$

إذن عمقا الماء عند الطرفين الأيسر والأيمن هما $h - q$ و $h + q$ ، على الترتيب. وفي البداية يكون $\xi = q$.

نهمل اللزوجة والتخميد والتوتر السطحي. وفي وعاء طويل قليل العمق، يمكن في البداية إهمال التسارعات الرأسية وتقريب الضغط بضغط هيدروستاتيكي. وتتيح السعة الصغيرة، $|q| \ll h$ ، استخدام نموذج خطي للتذبذب.

الكتلة الكلية هي

$$M = \rho b L h,$$

لأن الحجم الواقع فوق السطح المتوسط يساوي الحجم الناقص تحته. والإحداثي الأفقي X لمركز الكتلة هو

$$\begin{aligned} X &= \frac{\rho b}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x H(x, t) dx \\ &= \frac{1}{Lh} \frac{2q}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \left[\frac{Lq}{6h} \right]. \end{aligned}$$

مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي يؤثر بها جدار طرفي في ماء عمقه H هو

$$b \int_0^H \rho g (H - z) dz = \frac{1}{2} \rho g b H^2.$$

وبالتالي، فإن محصلة القوى الأفقية المؤثرة في الماء هي

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho g b [(h - q)^2 - (h + q)^2] \\ &= -2 \rho g b h q. \end{aligned}$$

هذه قوة إرجاع: فعندما يرتفع الماء أكثر على اليمين، تؤثر نحو اليسار. ويعطي قانون نيوتن الثاني

$$M \ddot{X} = F_x,$$

أي

$$\rho b L h \frac{L}{6h} \ddot{q} = -2 \rho g b h q.$$

ومن ثم،

$$\ddot{q} + \frac{12gh}{L^2} q = 0.$$

هذه حركة توافقية بسيطة، حيث

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{12gh}}{L}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi L}{\sqrt{3gh}}.$$

إذا تُرك الماء ليتحرك من السكون انطلاقاً من الوضع المبدئي، فإن

$$q(t) = \xi \cos(\omega_0 t), \quad \eta(x, t) = \frac{2\xi x}{L} \cos(\omega_0 t).$$

إن يتذبذب الطرفان بطورين متعاكسين. ولا يعتمد الدور على السعة الصغيرة أو العرض أو الكثافة.

تقدير قائم على الطاقة يأخذ سرعة الجريان في الحسبان

يمثل السطح المستوي تقريباً للحركة الفعلية. ويمكننا تقييم أثر وصف الجريان الداخلي تفصيلياً ببناء نموذج قائم على الطاقة.

نفترض أن السرعة الأفقية $u(x, t)$ منتظمة تقريباً على امتداد العمق. ويتطلب انحفاظ الحجم، بعد تقريب معادلته خطياً حول العمق h ، أن يكون

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

باستخدام $\eta = 2qx/L$ وفرض انعدام الجريان الأفقي عبر كلا الجدارين الطرفيين، نحصل على

$$u(x, t) = \frac{\dot{q}}{Lh} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right).$$

تكون السرعة الأفقية أعظمية عند المنتصف، وتنعدم عند الجدارين. وفي تقريب المياه الضحلة، تكون الطاقة الحركية للحركة الرأسية صغيرة مقارنة بالطاقة الحركية للحركة الأفقية. ومن ثم

$$K = \frac{1}{2} \rho b h \int_{-L/2}^{L/2} u^2 dx$$

$$= \boxed{\frac{\rho b L^3}{60h} \dot{q}^2}.$$

الزيادة في طاقة الوضع الثقالية مقارنة بحالة السطح الأفقي هي

$$U = \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} [(h + \eta)^2 - h^2] dx$$

$$= \frac{\rho g b}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \eta^2 dx$$

$$= \boxed{\frac{\rho g b L}{6} q^2},$$

حيث ينعدم الحد المتناسب مع $\int \eta dx$ بفعل انحفاظ الحجم.

يعطي انحفاظ $K + U$ الآن

$$\ddot{q} + \frac{10gh}{L^2} q = 0,$$

وبالتالي

$$T_1 = \frac{2\pi L}{\sqrt{10gh}} = \sqrt{\frac{6}{5}} T_0.$$

هذا التقدير أطول بنحو 9.5% من نتيجة نموذج مركز الكتلة البسيط.

يعكس اختلاف المعاملين الطبيعية التقريبية لوصف الحركة: يستخدم النموذج الأول القوى الهيدروستاتيكية عند الطرفين، بينما يستخدم الثاني طاقة جريان مفترض يحافظ على الحجم. وينحرف السطح الحر الفعلي عمومًا عن المستوى، لذا لا ينبغي اعتبار أي من المعاملين نتيجة هيدروديناميكية دقيقة.

2 — المقارنة مع القياسات وجودة النموذج

باستخدام $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ ، تكون الأدوار المتوقعة كما يلي:

عند $L = 479 \text{ mm}$:

T_1 (s)	T_0 (s)	T المقيس (s)	h (mm)
1.75	1.60	1.78	30
1.36	1.24	1.40	50
1.16	1.06	1.18	69
1.02	0.935	1.08	88
0.929	0.848	1.00	107
0.863	0.788	0.91	124
0.806	0.736	0.82	142

عند $L = 143 \text{ mm}$:

(s) T_1	(s) T_0	(s) T المقيس	(mm) h
0.515	0.470	0.52	31
0.465	0.425	0.52	38
0.377	0.344	0.43	58
0.350	0.320	0.35	67
0.258	0.235	0.28	124

لإجراء مقارنة كمية، نعرّف الفرق النسبي على النحو الآتي

$$\varepsilon = \frac{T_{\text{model}} - T_{\text{measured}}}{T_{\text{measured}}}.$$

يعطي النموذج البسيط أدوارًا أقل من القيم المرصودة بصورة منتظمة: بنسبة 10.0%–15.2% في الوعاء الأطول، وبنسبة 8.6%–20.0% في الوعاء الأقصر. ويخفض تقدير الطاقة القيم العظمى المطلقة للفروق النسبية إلى 7.1% و12.4%.

يمكن أيضًا التحقق من علاقة التناسب التقريبية باستخدام الكمية اللابعدية

$$C = \frac{T\sqrt{gh}}{L}.$$

تتراوح القيم التجريبية تقريبًا بين 2.02 و2.14 في الوعاء الأطول، وبين 1.98 و2.27 في الوعاء الأقصر. وهذه القيم قريبة بدرجة معقولة من ثابت مشترك. وتنبؤا النموذجين هما

$$C_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1.814, \quad C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} \simeq 1.987.$$

وهكذا يقدم النموذجان وصفًا مفيدًا للمقدار وللاعتدال على المعلومات، كما أن وصف سرعة الجريان تفصيليًا يحسن التوافق مع هذه البيانات.

ومع ذلك، فإن لصلاحيتهما حدودًا. تتراوح النسب h/L بين 0.063 و0.30 في الوعاء الأطول، وبين 0.22 و0.87 في الوعاء الأقصر. وعلى وجه الخصوص، تقع القياسات عند أكبر الأعماق في الوعاء الأقصر خارج نطاق موثوقية تقريب المياه الضحلة. وعندئذ تصبح الحركة الرأسية والانحرافات عن السطح المستوي المفترض ذات أهمية. ولم تُعطَ قيم لعدم اليقين التجريبي، لذا يثبت الجدول توافقًا عدديًا ولا يمثل تحققًا إحصائيًا من صحة النموذج.

2 — مقياس الزمن لقياسات البحيرة

لبحيرة فاترن،

$$L = 1.23 \times 10^5 \text{ m}, \quad h = 50 \text{ m},$$

مما يعطي

$$\sqrt{gh} \simeq 22.1 \text{ m s}^{-1}.$$

يتنبأ النموذج البسيط بأن

$$T_0 = \frac{\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{3(9.81)(50)}} \simeq 1.01 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{2.8 \text{ h}}.$$

ويعطي تقدير الطاقة

$$T_1 = \frac{2\pi(1.23 \times 10^5)}{\sqrt{10(9.81)(50)}} \simeq 1.10 \times 10^4 \text{ s} = \boxed{3.1 \text{ h}}.$$

وعليه، تفصل بين القمم المتتالية في أي من المنحنيين نحو ثلاث ساعات.

في الرسم البياني المعروض، يشغل التذبذب الكامل نحو 1.5 فاصل بين علامات التدرج الأفقية. ولذلك،

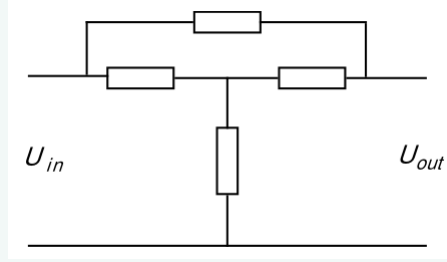
$$\text{الزمن لكل فاصل تدرج} \approx \frac{3 \text{ h}}{1.5} \approx \boxed{2 \text{ h}}.$$

يوجد نحو اثني عشر تذبذباً على امتداد التسجيل، وهو ما يقابل نحو 36 h، أي يوماً ونصفاً. والمنحنيان متعاكسان في الطور تقريباً، كما هو متوقع للتذبذبات عند طرفي البحيرة المتقابلين.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: مرشح تردد إلكتروني

يتكون مرشح تردد إلكتروني من أربعة عناصر موصولة كما في الشكل العلوي. يمكن إهمال ممانعة المصدر، ويمكن اعتبار ممانعة الحمل لانهاية. ينبغي أن يكون المرشح بحيث تعتمد نسبة الجهد U_{out}/U_{in} على التردد وفقاً لما هو مبين في الشكل السفلي، حيث U_{in} هو جهد الدخل و U_{out} هو جهد الخرج. عند التردد f_0 ، يكون تأخر الطور بين الجهدين صفراً.

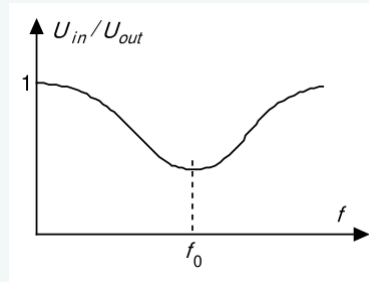


لبناء المرشح، يمكنك الاختيار من العناصر الآتية:

مقاومتان، $10\text{ k}\Omega$

مكثفان، 10 nF

ملفان لولبيان، 160 mH (من دون قلب حديدي وبمقاومة مهملة)



أنشئ، بتجميع أربعة من هذه العناصر، مرشحاً يحقق الشروط المذكورة. حدّد التردد f_0 والنسبة U_{out}/U_{in} عند هذا التردد لأكبر عدد ممكن من توليفات العناصر.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 3. يوجد 12 توزيعاً صالحاً للعناصر على المواضع، عند تفسير الانخفاض المرسوم على أنه يمثل مقدار U_{out}/U_{in} ، كما هو محدد في النص.

نعرف المواضع، بالترتيب، كما يأتي:

(الفرع التفرعي الرأسي، الجسر العلوي، الأفقي الأيمن، الأفقي الأيسر) (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) .

يرمز كل R إلى مقاومة مقدارها $10\text{ k}\Omega$ ، وكل C إلى مكثف سعته 10 nF ، وكل L إلى ملف لولبي معامل حثته 160 mH .

توزيع العناصر (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)	f_0	U_{out}/U_{in} عند f_0
(R, R, C, C) أو (C, C, R, R)	1.59 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, R, L, L) أو (L, L, R, R)	9.95 kHz	$2/3 \approx 0.667$
(R, L, R, C)	5.63 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(R, C, R, L)	2.81 kHz	$4/29 \approx 0.138$
(C, R, L, R)	5.63 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, R, C, R)	2.81 kHz	$25/29 \approx 0.862$
(L, C, C, R) أو (L, C, R, L)	5.63 kHz	$1/2$
(C, L, L, R) أو (C, L, R, C)	2.81 kHz	$1/2$

في كل توزيع، يكون جهدا الخرج والدخل متفقين في الطور عند f_0 .

الحل

ليس للمسألة أجزاء فرعية مرقمة. نشق أولاً استجابة الدائرة المعطاة، ثم نحدد توزيعات العناصر ونحسب قيمها الدنيا.

نستخدم عناصر مثالية ذات القيم

$$R = 1.00 \times 10^4 \Omega, \quad C = 1.00 \times 10^{-8} \text{ F}, \quad L = 0.160 \text{ H}.$$

في الحالة المستقرة الجيبية، وباستخدام المتجهات الطورية ذات الاعتماد الزمني $e^{i\omega t}$

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad \omega = 2\pi f.$$

تجعل ممانعة المصدر المهمة جهد الدخل محدداً. وتعني ممانعة الحمل اللانهائية أنه لا يغادر طرف الخرج أي تيار خارجي.

ليكن V_m الجهد عند نقطة التقاء Z_1, Z_2, Z_4 ، مقاساً بالنسبة إلى الموصل السفلي المشترك. يعطي قانون كيرشوف للتيار

$$\frac{V_m - V_{in}}{Z_1} + \frac{V_m - V_{out}}{Z_2} + \frac{V_m}{Z_4} = 0,$$

$$\frac{V_{out} - V_m}{Z_2} + \frac{V_{out} - V_{in}}{Z_3} = 0.$$

بحذف V_m ، نحصل على نسبة الجهد المركبة

$$H(\omega) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_3}.$$

من الملائم كتابتها على الصورة

$$H = \frac{K}{K + 1},$$

حيث

$$K = \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_4}{Z_3} + \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_4}{Z_1}.$$

توزيعات العناصر. نعرف الثابت العديم الأبعاد

$$\kappa = \frac{L}{R^2 C}.$$

لكل توزيع من التوزيعات الآتية، يعطي التعويض في K

$$K = \alpha + i \left(\beta\omega - \frac{\gamma}{\omega} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

تُكتب رموز العناصر في الجدول بالترتيب $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$.

γ	β	α	التوزيع
$1/(RC)$	RC	2	$RRCC, CCRR$
R/L	L/R	2	$RRLL, LLRR$
$2/(RC)$	L/R	κ	$RLRC$
$1/(RC)$	$2L/R$	κ	$RCRL$
$2R/L$	RC	$1/\kappa$	$CRLR$
R/L	$2RC$	$1/\kappa$	$LRCR$
$2/(RC)$	L/R	1	$LCRL$
$2R/L$	RC	1	$LCCR$
$1/(RC)$	$2L/R$	1	$CLRC$
R/L	$2RC$	1	$CLLR$

على سبيل المثال، يعني التوزيع $RLRC$ أن

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = i\omega L, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = \frac{1}{i\omega C}.$$

وهو يعطي

$$K = \frac{i\omega L}{R} + \frac{1}{i\omega CR} + \frac{L}{CR^2} + \frac{1}{i\omega CR} = \kappa + i \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{2}{\omega CR} \right),$$

كما هو مدرج في الجدول.

الاعتماد على التردد والطور. نضع

$$u = \beta\omega - \frac{\gamma}{\omega}.$$

عندئذٍ

$$H = \frac{\alpha + iu}{\alpha + 1 + iu}, \quad |H|^2 = \frac{\alpha^2 + u^2}{(\alpha + 1)^2 + u^2}.$$

بما أن

$$\frac{d|H|^2}{d(u^2)} = \frac{2\alpha + 1}{[(\alpha + 1)^2 + u^2]^2} > 0,$$

فإن المقدار يكون أصغر ما يمكن عندما $u = 0$. علاوة على ذلك،

$$\frac{du}{d\omega} = \beta + \frac{\gamma}{\omega^2} > 0,$$

لذا توجد قيمة دنيا واحدة فقط عند تردد موجب:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}, \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}}.$$

عند هذا التردد،

$$\boxed{H(\omega_0) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > 0}.$$

إذن، نسبة الجهد الحقيقية وموجبة: فرق الطور يساوي صفرًا، كما هو مطلوب.

عند كلتا نهايتي مجال التردد،

$$\omega \rightarrow 0 : \quad u \rightarrow -\infty, \quad \omega \rightarrow \infty : \quad u \rightarrow +\infty,$$

ومن ثم

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} H = \lim_{\omega \rightarrow \infty} H = 1.$$

وعليه، فإن كل توزيع مدرج يعطي المنحنى المطلوب: يبدأ مقداره من الواحد، وينخفض بسلسلة إلى قيمة دنيا موجبة وحيدة عند f_0 ، ثم يرتفع مقترَّبًا من الواحد.

القيم العددية للترددات ونسب الجهد. يعطي الجدول أربعة ترددات مختلفة:

$$f_{RC} = \frac{1}{2\pi RC} = 1.5915 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{1.59 \text{ kHz}},$$

$$f_{RL} = \frac{R}{2\pi L} = 9.9472 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{9.95 \text{ kHz}},$$

$$f_+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{LC}} = 5.6270 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{5.63 \text{ kHz}},$$

$$f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{2LC}} = 2.8135 \times 10^3 \text{ Hz} \approx \boxed{2.81 \text{ kHz}}.$$

كذلك،

$$\kappa = \frac{0.160}{(10^4)^2(10^{-8})} = 0.160 = \frac{4}{25}.$$

وعليه، فإن القيم الدنيا الممكنة للنسبة هي

$$\alpha = 2 : \quad H_0 = \frac{2}{3},$$

$$\alpha = \kappa : \quad H_0 = \frac{\kappa}{1 + \kappa} = \frac{L}{R^2C + L} = \frac{4}{29},$$

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} : \quad H_0 = \frac{1}{1 + \kappa} = \frac{R^2C}{R^2C + L} = \frac{25}{29},$$

$$\alpha = 1 : \quad H_0 = \frac{1}{2}.$$

يعطي الجمع بين هذه العبارات وجدول التوزيعات جميع الإجابات الواردة أعلاه.

شمول التوزيعات لجميع الاحتمالات. توجد 54 طريقة لإسناد أنواع العناصر الأربعة المختارة إلى المواضيع الأربعة، مع السماح بعنصرين على الأكثر من كل نوع: تستخدم 18 طريقة عنصرين من كل نوع من نوعين، وتستخدم 36 طريقة الأنواع الثلاثة جميعها.

يتطلب اقتراب النسبة من الواحد عند الطرفين أن تتباعد K عند كل من $\omega \rightarrow 0$ و $\omega \rightarrow \infty$. وهذا يوفر طريقة بسيطة لفحص جميع التوزيعات. نكتب كل ممانعة على هيئة ثابت موجب مضروب في s^p ، حيث

$$s = i\omega, \quad p_R = 0, \quad p_L = 1, \quad p_C = -1.$$

تكون أسس الحدود الأربعة في K هي

$$p_2 - p_3, \quad p_4 - p_3, \quad p_2 + p_4 - p_1 - p_3, \quad p_4 - p_1.$$

يتحقق شرط الطرفين إذا وفقط إذا تضمنت هذه الأسس قيمة موجبة وأخرى سالبة. وهذا يُبقي 22 توزيعًا: التوزيعات الاثني عشر التي حصلنا عليها بالفعل والتوزيعات العشرة الآتية.

التوزيعات المتبقية	سبب عدم استيفائها للشروط
$RLCC, RCLL, LRCC, CRLl$	ترددتها الموجب المحدود الوحيد الذي تكون عنده H حقيقية هو $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ، حيث $H = 0$. عندئذٍ يكون طور الخرج غير معرّف، وتكون القيمة الدنيا صفراً.
$LLRC, LLCR, CCRL, CCLR$	ترددتها الموجب المحدود الوحيد الذي تكون عنده H حقيقية يعطي $H = -1$: أي إن فرق الطور يساوي 180° .
$LLCC, CCLL$	لها أقطاب رنين غير مخمّدة، ولا تعطي الانخفاض السلس المبين في الشكل.

بالنسبة إلى التوزيعين الأخيرين، فإن كتابة $x = \omega\sqrt{LC}$ تعطي صراحةً

$$H = \frac{(1 - x^2)^2}{1 - 3x^2 + x^4},$$

وينعدم مقام هذه العبارة عند

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

إذن، تستنفد التوزيعات اثنا عشر الدرجة جميع الاحتمالات التي تحقق الرسم البياني وفق التفسير المذكور وشرط انعدام فرق الطور.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.